Repaso de electrostática y magnetostática.

Transformaciones de simetría. Ley de Gauss. Ley de Ampere.

1. En cada una de las siguientes distribuciones de carga:

   a) Escribir la densidad de carga $\rho(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r}$

   b) Utilizando transformaciones de simetría, determinar la dependencia funcional y las componentes del campo eléctrico.

   c) Utilizando la ley de Gauss, calcular el campo eléctrico. Graficar cualitativamente su módulo en función de una coordenada relevante.

   d) Calcular el potencial escalar $\phi(r)$. Graficar cualitativamente.

      i. Una esfera cargada uniformemente en volumen.
      ii. Una esfera cargada uniformemente en superficie.
      iii. Una esfera cargada en volumen con una densidad de carga que depende sólo de la coordenada radial.
      iv. Un plano infinito cargado uniformemente en superficie.
      v. Dos planos paralelos, infinitos, cargados uniformemente con densidades σ_1 y σ_2. Considerar los casos especiales $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\sigma_1 = -\sigma_2$.
      vi. Un hilo cargado con densidad uniforme.
      vii. Un cilindro infinito cargado uniformemente en volumen.
      viii. Un cilindro infinito cargado uniformemente en superficie.

2. En cada una de las siguientes distribuciones de corriente:

   a) Escribir la densidad de corriente $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r}$.

   b) Utilizando transformaciones de simetría, determinar la dependencia funcional y las componentes del campo magnético.

   c) Mediante la ley de Ampère, calcular el campo magnético. Graficar cualitativamente su módulo en función de una coordenada relevante.

   d) Calcular el potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Graficar cualitativamente su módulo.

      i. Un hilo infinito por el que circula una corriente I.
      ii. Un plano infinito con densidad de corriente superficial uniforme.
      iii. Dos planos paralelos, infinitos, con corrientes superficiales uniformes de igual módulo y cuyas direcciones forman un ángulo α (considerar los casos particulares $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$).
      iv. Una corriente uniforme radial que fluye entre dos esferas concéntricas de radios a y b. Interpretar el resultado.

v. Un cilindro infinito con corriente uniforme en su interior.

vi. Un cilindro infinito, hueco, con densidad superficial de corriente uniforme paralela al eje del mismo.

vii. Un solenoide infinito con n vueltas por unidad de longitud, alimentado por una corriente I.

viii. Un toro de sección circular con un total de N vueltas. ¿Qué ocurre si la sección del toro es arbitraria?

Integración directa: solución de Poisson.

3. Para las siguientes distribuciones de carga, calcular el potencial escalar electrostático mediante la integral de Poisson:

   a) Un anillo de radio a uniformemente cargado, con carga total $Q = 2\pi a\,\lambda$. Calcular el potencial únicamente para puntos sobre el eje . Obtener expresiones límite para puntos muy cercanos y muy alejados del plano del anillo.

   b) Igual al ítem anterior pero para un disco de radio a uniformemente cargado en superficie, con carga total $Q = \pi a^2\,\sigma$.

   Interpretar físicamente los resultados (sobre todo las expresiones límite), y graficar cualitativamente.

4. Calcular, usando la ley de Biot−Savart, el campo magnético sobre el eje de una espira circular de radio a por la que fluye una corriente I. Obtener la forma aproximada del campo para puntos sobre el eje muy alejados de la espira. Calcular el momento magnético y relacionar con la expresión del campo obtenida para puntos lejanos.

5. En el estado fundamental del átomo de hidrógeno, el potencial generado por el núcleo puntual y la nube electrónica es

$$\phi(r) = \frac{q}{r}(1 + r/a)\exp(-2r/a),$$

   donde a es el radio de Bohr y q es la carga del protón.

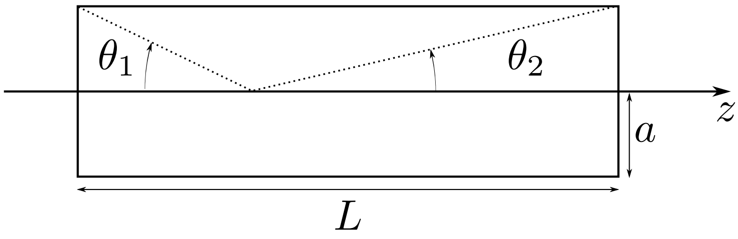
   a) Encontrar la densidad de carga para todo r.

   b) Interpretar el resultado en términos de las contribuciones del núcleo y de la nube electrónica.

   c) Verificar que esa distribución corresponde a un átomo neutro.

   d) Sabemos que la distribución de carga encontrada está asociada a átomos estables. ¿Contradice, entonces, esta distribución el teorema de Earnshaw?

6. Un solenoide de sección circular tiene largo L, radio a, n vueltas por unidad de longitud y corriente I.



a) Demostrar que el campo magnético a lo largo del eje es:

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi n I}{c}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\,\hat{z},$$

donde θ_1 y θ_2 se muestran en la figura y el eje z coincide con el eje del solenoide.

b) Si el solenoide es largo ($a \ll L$), demostrar que la componente radial del campo magnético es

$$B_r \approx \frac{96\pi n I}{c}\Big(\frac{a^2 z\, r}{L^4}\Big),$$

válida hasta segundo orden en a/L para puntos cercanos al centro del solenoide ($z \ll L, r \ll a$). En esta expresión el origen de coordenadas coincide con el centro geométrico del solenoide.

c) Como caso límite hallar el campo magnético producido por un solenoide infinito. Verificar el resultado comparándolo con el del problema 2 (d) vii.

Fuerzas y cuplas.

7. *a*) Calcular la fuerza y la cupla por unidad de área que ejerce un plano sobre el otro en los casos descriptos en los problemas 1 (d) v. y 2 (d) iii.

   b) Se tienen dos hilos infinitos paralelos. Calcular la fuerza y la cupla que ejerce uno sobre el otro por unidad de longitud en los casos:

   i. Los hilos están cargados con densidades lineales $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\lambda_1 = -\lambda_2$.

   ii. Por los hilos circulan corrientes $I_1 = I_2$ y $I_1 = -I_2$.

Principio de superposición.

8. A un cilindro infinito de radio a, se le ha hecho una cavidad cilíndrica de radio b, siendo sus ejes paralelos pero no coincidentes. La separación entre sus ejes es d, de modo que $d + b < a$.

   a) Si el cilindro posee una densidad de carga volumétrica uniforme, calcular el campo eléctrico dentro de la cavidad interior. ¿Puede tal cilindro estar hecho de material conductor?

b) Si el cilindro se vuelve conductor y se le hace circular una densidad de corriente $\mathbf{j}$ uniforme paralela a su eje, calcular el campo magnético dentro de la cavidad interior.

Notar que la cavidad "congela" el campo en el valor que tenía en su centro antes de haberse realizado, y que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí.

9. Se tienen tres cáscaras cilíndricas concéntricas de radios $a < b < c$. La cáscara de radio c está siempre a potencial cero. Calcular el potencial electrostático en la región $r \leq c$ en los siguientes casos:

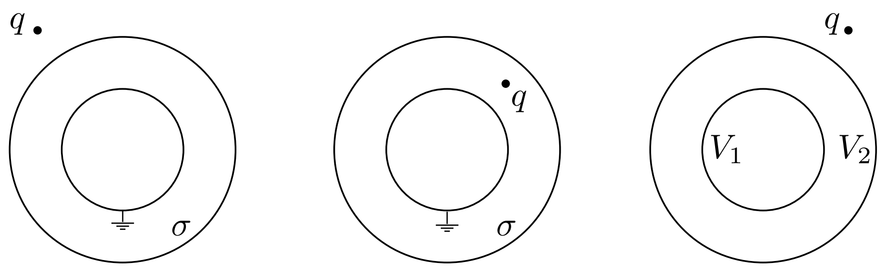
   a) Los cilindros de radios a y b son conductores y están conectados a potenciales V_1 y V_2.

   b) Los cilindros de radios a y b están cargados uniformemente con cargas Q_1 y Q_2 por unidad de longitud. ¿Qué sucedería si los cilindros fueran conductores?

   c) El cilindro de radio a está conectado a potencial V y el de radio b está cargado con carga Q por unidad de longitud. Interpretar cada una de las contribuciones al potencial.

10. *a*) Calcular el potencial electrostático para todo punto del espacio producido por una esfera metálica a tierra rodeada por una cáscara esférica con una densidad de carga uniforme σ.

    b) Suponiendo conocido el potencial producido por una carga frente a una esfera a tierra, y el resultado del punto (a), indicar cómo utilizar el principio de superposición en los siguientes casos:



Preguntas conceptuales.

1. ¿Qué es una transformación de simetría?

2. ¿En que caracterí stica fundamental difieren las transformaciones de simetría que se usan para determinar dependencias funcionales de aquellas usadas para encontrar componentes de los campos?