Dijimos que un cuadrivector contravariante transforma como $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$. En notación matricial esto sería $\mathbb{X}' = \mathbb{\Lambda}.\mathbb{X}$. Les advertía que la notación de índices relativista es más compleja que la matricial, porque la matricial no distingue entre índices arriba y abajo. Estamos *definiendo* a la matriz $\mathbb{\Lambda} \equiv (\mathbb{\Lambda})^{\mu}{}_{\nu}$ como la que tiene un índice arriba y otro abajo. Esta matriz va a ser distinta de, por ejemplo, $\Lambda^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\eta^{\alpha\nu}$, porque $(\mathbb{\Lambda})^{\mu\nu} = \mathbb{\Lambda}.\mathbb{\eta}$ (a $\mathbb{\eta}$ si la definí como la que tiene los dos índices arriba!).

Por otro lado, llamamos $\tilde{\mathbb{X}} = (\mathbb{X})_{\mu}$ a las matrices de los cuadrivectores covariantes. Por ejemplo para la posición $\tilde{\mathbb{X}}^{t} = (ct, -\vec{x})$. Transformarán entonces como $\tilde{\mathbb{X}}' = \tilde{\mathbb{\Lambda}}.\tilde{\mathbb{X}}$, con $\tilde{\mathbb{\Lambda}}$ alguna matriz nueva a encontrar. Pasando a notación de índices, dijimos que *definíamos* a un cuadrivector covariante como alguien que transforma según $x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu}$. O sea la notación implica que $\tilde{\mathbb{\Lambda}} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}$. No se quién es $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$, solo le puse Λ porque es una transformación de Lorentz al fin y al cabo. Pero noten que $\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \neq \Lambda^{\nu}{}_{\mu}$. Aca hay un abuso de notación que debí haber remarcado más en clase: la separación **horizontal** de los índices. Si los ponen verticalmente alineados, estaríamos diciendo que son la misma cosa y nada tendría sentido. Pero no: uno va suroeste-noreste y el otro noroeste-sureste, si nos hacemos los cartográficos.

Al final, pidiendo que el intervalo sea invariante relativista, concluíamos que $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} = \delta^{\nu}{}_{\alpha}$, ó más familiarmente $\tilde{\mathbb{\Lambda}}.\mathbb{\Lambda} = \mathbb{1}$. Es decir que $\tilde{\mathbb{\Lambda}} = \mathbb{\Lambda}^{-1}$ es la inversa!

Conclusión: los cuadrivectores contravariantes transforman con $\mathbb{\Lambda} = (\mathbb{\Lambda})^{\mu}{}_{\nu}$ y los contravariantes con su inversa. En notación de índices, abusando un poco de la notación y teniendo cuidado con la separción horizontal, podemos definir la inversa como $\mathbb{\Lambda}^{-1} = (\mathbb{\Lambda})_{\mu}{}^{\nu}$.

<u>Extra-1</u>: El video de 3Blue1Brown que les hablaba en clase sobre el índice de refracción: Video. Re-piensen toda la explicación para el caso en que el medio y por lo tanto los electrones se mueven. Aunque la conclusión cuantitativa no es obvia, cualitativamente se intuye que el índice de refracción debería cambiar.

<u>Extra-2</u>: Por si no quedó claro de la clase, en el ejercicio 5 deberían llegar a que la onda reflejada a la salida cumple una relación parecida a la que cumplía para el medio quieto: $E_r = R'_{12}E_i$ con R_{12} el coeficiente de reflexión de Fresnel usual. Ojo que está primado, por ejemplo en TE tenemos $R'_{TE} = (\bar{n}'_1 - \bar{n}'_2)/(\bar{n}'_1 + \bar{n}'_2)$ con $\bar{n}'_i = n'_i \cos\theta'_i/\mu'_i$. Acá n' y μ' son datos, lo que falta es relacionar a $\cos\theta'$ con alguna función de θ: usar la aberración relativista que sale de transformar $k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}k^{\nu}$.