Radiación electromagnética.

1. Determinar la distribución angular de potencia irradiada por una partícula cargada que realiza un movimiento rectilíneo con velocidad arbitraria.

2. Una partícula cargada efectúa un movimiento circular uniforme con frecuencia ω. Calcular $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, el valor medio temporal de la distribución de potencia y la intensidad total irradiada por ciclo.

3. Dos dipolos eléctricos paralelos están separados una distancia d. Por el primer dipolo circula una corriente $I_1 = I_0 e^{-i\omega t}$. La corriente en el segundo dipolo es $I_2 = I_1 e^{i\alpha}$, siendo α un desfasaje constante. Obtenga el vector de Poynting de este sistema radiante. Realice un diagrama de radiación para $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$.

4. Se tiene un conductor recto y delgado de longitud l alimentado por una fuente de frecuencia ω localizada en su centro. Se desprecia la resistencia. Calcular la potencia irradiada por unidad de ángulo sólido y la potencia total irradiada. Determinar en qué dirección es máxima la radiación, y cómo es la polarización de la radiación en esa dirección.

5. Resuelva el problema anterior pero en el caso de tener una espira circular de radio a con corriente $I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$.

6. Considere una partícula con carga q moviéndose en una única dirección siguiendo una trayectoria $r(t) = r_0 \operatorname{sen} \omega t$. Calcular la contribución dipolar eléctrica, dipolar magnética y cuadrupolar eléctrica (en valor medio) del campo de radiación.

7. El radio de un anillo circular es una función del tiempo $a(t) = r_0 \cos^2 \omega t$. En todo momento $\dot{a}/c \ll 1$. El anillo tiene carga q distribuida uniformemente.

   a) Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ y $\mathbf{B}_{\text{rad}}$, indicando separadamente las contribuciones de los términos dipolar eléctrico, dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.

   b) Graficar cualitativamente $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ y $\mathbf{B}_{\text{rad}}$ sobre la superficie de una esfera.

   c) Calcular la potencia media emitida por unidad de ángulo sólido. Graficar cualitativamente en función de la dirección.

   d) Calcular la potencia media total emitida en todas direcciones.

8. Dos cargas $+q$ y $-q$, separadas una distancia d, realizan una trayectoria circular en el plano $x - y\,(z = 0)$ con frecuencia ω $(d \ll c/\omega)$. Calcular la distribución de potencia y la potencia total irradiada. ¿A qué orden multipolar corresponde?

9. Idem al anterior para dos cargas iguales de valor q. Calcular explícitamente hasta el orden cuadrupolar.

10. Una esfera de radio a con magnetización uniforme $\mathbf{M}$ rota con velocidad angular constante alrededor de un eje que pasa por el centro de la esfera y forma un ángulo α con $\mathbf{M}$.

    a) Calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, la distribución angular de potencia y la intensidad total irradiada por período.

    b) A una distancia $d \gg a$ sobre el eje z se coloca un "molinito" con una paleta totalmente absorbente y otra totalmente reflejante. Calcular la cupla inicial sobre el eje del "molinito". ¿Qué aproximaciones es necesario realizar? (al menos 3!)

11. Una partícula no relativista de carga ze, masa m y energía cinética E choca con un campo de fuerzas fijo y central. La interacción es repulsiva y está descrita por un potencial $V(r)$ el cual es mayor que E a distancias cortas.

    a) Mostrar que la energía total irradiada está dada aproximadamente por

    $$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{z^2 e^2}{m^2 c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\left|\frac{dV}{dr}\right|^2 \frac{dr}{\sqrt{V(r_{\min}) - V(r)}},$$

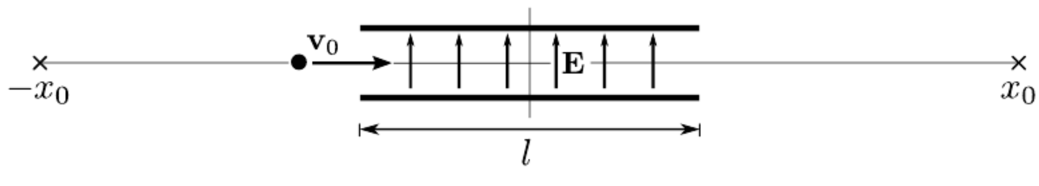
    donde $r_{\min}$ es la distancia de máximo acercamiento en el choque.

    b) Mostrar que para una interacción coulombiana $V(r) = zZe^2/r$ la energía total irradiada es

    $$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{zmv_0^5}{Zc^3}$$

    donde v_0 es la velocidad de la carga en el infinito.

12. Una partícula relativista de carga q y masa m pasa a través de un capacitor de placas paralelas de longitud ℓ. El campo $\mathbf{E}$ en el interior del capacitor es homogéneo y constante. La partícula ingresa al capacitor con una velocidad $\mathbf{v}_0$ perpendicular a $\mathbf{E}$ y paralela a las placas, y viaja tan rápido que su desviación puede despreciarse.



    a) Calcule la energía total irradiada durante el paso de la partícula por el capacitor.

    b) Escriba la expresión del campo eléctrico de radiación y grafíquelo cualitativamente en función del tiempo para los puntos $-x_0$ y x_0, que se encuentran sobre la línea que sigue la partícula, simétricos respecto del centro del capacitor y muy alejados de éste. Tenga especial cuidado en el cálculo de los intervalos temporales en que ese campo es distinto de cero.

13. Una carga q realiza un movimiento armónico sobre el eje z descrito por $z(t') = a\cos\omega_0 t'$

    a) Mostrar que la potencia instantánea irradiada por unidad de ángulo sólido es

    $$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 c\beta^4}{4\pi\, a^2} \frac{\sin^2\theta\, \cos^2\omega_0 t'}{(1+\beta\cos\theta\sin\omega_0 t')^5}$$

    donde $\beta = a\omega_0/c$.

    b) Promediando temporalmente mostrar que

    $$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 c\beta^4}{32\pi\, a^2} \frac{4+\beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^{7/2}}\, \sin^2\theta.$$

    c) Compare las distribuciones angulares para los casos no relativista y relativista.

14. Una partícula de carga $-e$ y masa m gira alrededor de otra mucho más pesada de carga Q. El radio de la órbita circular es inicialmente R.

    a) Estimar el tiempo que tarda la partícula en caer al centro de la órbita debido a la pérdida de energía por radiación.

    b) Calcular el número de vueltas que realiza antes de caer.

15. *(Dispersión de Thomson)* Cuando una onda plana incide sobre un electrón libre, el electrón oscila e irradia ondas electromagnéticas, provocando una dispersión en todas direcciones de la onda original. Calcular la sección eficaz de dispersión suponiendo que la onda incidente es linealmente polarizada, que el movimiento del electrón es no-relativista, y despreciando el impulso transferido al electrón en la dirección de propagación de la onda. Resolver primero la ecuación de movimiento del electrón sometido al campo eléctrico de la onda incidente, y encontrar luego los campos de radiación debidos al movimiento del electrón. Calcular entonces la sección eficaz diferencial (por unidad de ángulo sólido) definida como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\textit{Energia irradiada por elelectron por unidad de angulo solido y de tiempo}}{\textit{Flujo de energia incidente de la onda plana}} \tag{1}$$

y la sección eficaz total, $\sigma = \int d\Omega (d\sigma/d\Omega)$.

16. *(Radiación Cerenkov)*

   a) Demostrar que la onda de choque electromagnética emitida por un electrón que se mueve a velocidad v mayor que la velocidad de la luz en un medio con índice de refracción n ($v > c/n$) se concentra formando un ángulo θ_c respecto a la dirección de movimiento de la partícula, con

$$\cos\theta_c = \frac{c}{nv}$$

   b) Comprobar que un espejo esférico de radio de curvatura R focaliza la onda de choque en un anillo en el plano focal del espejo. Encontrar el radio de dicho anillo.

Preguntas conceptuales.

1. ¿Cual es la característica fundamental de los campos de radiación?
2. ¿Qué relación cumplen los campos de radiación eléctrico y magnético suficientemente lejos de sus fuentes?
3. Para un conjunto de n electrones libres en movimiento arbitrario, puede demostrarse (hacerlo en no más de dos renglones) que el momento dipolar eléctrico total es proporcional a la posición del centro de masa del sistema. Por lo tanto, (demostrar!) no hay radiación dipolar eléctrica. Además, también se demuestra (realizarlo, pues) que tampoco hay radiación dipolar magnética (ya que $\mathbf{m} \propto \mathbf{L}$, donde $\mathbf{L}$ es el momento angular del sistema).

   Por lo tanto, electrones acelerados no irradian. ¿¿ ??
4. Si calculamos los campos de radiación hasta el orden dipolar magnético, ¿qué términos debemos considerar?