

# Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2026

## Guía 7: Momento Angular y Rotaciones

”The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.” Eugene Paul Wigner, *Philosophical Reflections and Syntheses*, 1992.

### I. Momento Angular

**P1** Suponga que un sistema se encuentra en un autoestado de  $J_z$  con autovalor  $\hbar m$ .

- Muestre que los valores medios tanto de  $J_x$  como  $J_y$  son cero, i.e.  $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$ , de dos formas diferentes: (i) usando el principio de incertidumbre, y (ii) usando la expansión de  $J_x$  y  $J_y$  en términos de  $J_+$  y  $J_-$ .
- Muestre que si se mide la proyección de momento angular sobre una dirección  $\hat{n}$  que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $\hat{z}$ , entonces  $\langle \mathbf{J} \cdot \hat{n} \rangle = \hbar m \cos \theta$ .

**P2** Considere un sistema de espín 1/2 (es decir  $j = 1/2$ ).

- Construya, por aplicación de los operadores de subida y bajada, la representación matricial de los operadores  $S^2$ ,  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  en la base de autoestados de  $S_z$ . Muestre que se obtiene que los operadores de espín están dados por  $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$ , donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli.
- Usando resultados anteriores, muestre que el operador rotación para un sistema de espín 1/2 se puede escribir como

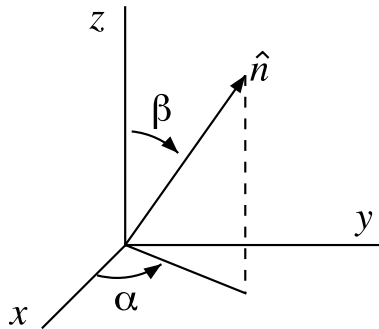
$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{n}, \phi) = \exp\left(-i \frac{\mathbf{S} \cdot \hat{n} \phi}{\hbar}\right) = \mathbb{I} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad.

- Escriba explícitamente la matriz de  $2 \times 2$  que representa la rotación  $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{n}, \phi)$  en la base

$$\left\{ |+\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle, |-\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}.$$

- Sea  $\hat{n}$  el versor definido por los ángulos polares  $\alpha$  y  $\beta$  según se muestra en la figura. Aplique al ket  $|+\rangle$  el operador de rotación adecuado<sup>†</sup> para obtener el estado  $|\mathbf{S} \cdot \hat{n}, +\rangle$ , que representa un espín orientado según  $\hat{n}$ . Compare el resultado con el obtenido en el Problema 10 de la Guía 1.



<sup>†</sup> Pruebe a hacer la cuenta de dos formas diferentes: (i) aplicando una única rotación en un ángulo y dirección adecuados, y (ii) descomponiendo la rotación en rotaciones elementales utilizando los ángulos de Euler.

(e) Muestre que para una rotación en  $\phi = 2\pi$  se satisface

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}}, \phi = 2\pi) = -\mathbb{I},$$

y, por lo tanto, ante una rotación en  $2\pi$  el estado del sistema cambia según

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi=2\pi)} \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}}, \phi = 2\pi) |\psi\rangle = -|\psi\rangle.$$

Observe que no se obtiene el mismo vector debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pág. 24.

**P3** Considere un estado arbitrario  $|\psi\rangle$  de un sistema de espín 1/2, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo  $\varphi$  alrededor del eje  $\hat{\mathbf{z}}$ , es decir

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{z}}, \varphi) |\psi\rangle = \exp\left(-i \frac{S_z \varphi}{\hbar}\right) |\psi\rangle.$$

Calcule los valores medios  $\langle \psi' | S_x | \psi' \rangle$ ,  $\langle \psi' | S_y | \psi' \rangle$  y  $\langle \psi' | S_z | \psi' \rangle$  en el sistema rotado, en función de los valores de expectación  $\langle \psi | S_x | \psi \rangle$ ,  $\langle \psi | S_y | \psi \rangle$  y  $\langle \psi | S_z | \psi \rangle$  en el sistema original.

**P4** Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín 1/2 representada por

$$\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}}, \alpha) \mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}}, \beta) \mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}}, \gamma).$$

(a) Muestre que la matriz de  $2 \times 2$  que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp\left(-i \frac{\sigma_z \alpha}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\sigma_y \beta}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\sigma_z \gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo  $\theta$ . Encuentre  $\theta$  y la dirección de dicho eje.

**P5** Considere un sistema con momento angular 1 (es decir,  $j = 1$ ).

(a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, la representación matricial de los operadores  $J^2$ ,  $J_x$ ,  $J_y$ , y  $J_z$  en la base  $\{|j = 1, m = 1\rangle, |j = 1, m = 0\rangle, |j = 1, m = -1\rangle\}$  de autoestados de  $J^2$  y  $J_z$ . Verifique explícitamente lo obtenido utilizando la relación de conmutación  $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ .

(b) Encuentre la base  $\{|j = 1, m_y\rangle\}$  de autoestados de  $J^2$  y  $J_y$ , como combinación lineal de los  $\{|j = 1, m\rangle\}$ .

(c) Evalúe  $J_z(J_z + \hbar)(J_z - \hbar)$  y  $J_y(J_y + \hbar)(J_y - \hbar)$  sin usar la representación matricial.

(d) Muestre que en el caso de momento angular  $j = 1$ , vale que

$$\mathcal{D}^{(1)}(\hat{\mathbf{y}}, \beta) = e^{-iJ_y\beta/\hbar} = 1 - i \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) \sin \beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 (1 - \cos \beta).$$

Usando esto obtenga

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos \beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \cos \beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos \beta) \end{pmatrix},$$

donde  $d(\beta)$  es la representación matricial de  $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}}, \beta)$  en la base de autoestados de  $J_z$ .

**P6** Considere un sistema con  $j = 1$  que se encuentra en el estado  $|\psi\rangle$  dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|j = 1, m = 1\rangle - |j = 1, m = -1\rangle).$$

donde los estados  $|j, m\rangle$  son los autoestados de  $J_z$ .

(a) Si se mide  $L_x$  sobre  $|\psi\rangle$ , ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide  $L_y$ .

(b) Suponga que sobre el estado  $|\psi\rangle$  se mide  $L_z$  y se obtiene  $\hbar$ , e inmediatamente después se mide  $L_y$ . ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

## II. Momento Angular Orbital

**P7** Construya los armónicos esféricos  $Y_1^m$ . Para ello, resuelva primero  $L_+ Y_1^1 = 0$  (usando  $L_+$  en la representación  $r$ ) y luego aplique el operador  $L_-$  a  $Y_1^1$  (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados de **P5**, escriba la combinación lineal de los armónicos esféricos  $\{Y_1^m\}$  que es autoestado de  $L_y$  con autovalor  $\hbar$ . Verifique su resultado aplicándole  $L_y$  en la representación  $r$ .

**P8** Suponga que fuera posible un valor semi-entero de  $l$  para el impulso angular orbital, por ejemplo  $l = 1/2$ . A partir de

$$L_+ Y_{1/2}^{1/2}(\theta, \phi) = 0,$$

podemos deducir

$$Y_{1/2}^{1/2}(\theta, \phi) \propto e^{i\phi/2} \sqrt{\sin \theta}.$$

Verifique esta afirmación. Intente construir entonces  $Y_{1/2}^{-1/2}(\theta, \phi)$  de dos maneras diferentes,

(a) aplicando  $L_-$  a  $Y_{1/2}^{1/2}(\theta, \phi)$ ,

(b) usando que  $L_- Y_{1/2}^{-1/2}(\theta, \phi) = 0$ .

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de  $l$ ).

**P9** Considere un autoestado de impulso angular orbital  $|l = 2, m = 0\rangle$ . Suponga que este estado es rotado en un ángulo  $\beta$  alrededor del eje  $\hat{y}$ . Encuentre la probabilidad de medir  $m = 0, \pm 1$ , y  $\pm 2$  en el nuevo estado.

**P10** La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico  $V(r)$  está dada por

$$\Psi(x, y, z) = (x + y + 3z)f(r),$$

con  $f(r)$  alguna función de  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

(a) ¿Es  $\Psi$  autofunción de  $L^2$ ? Si es así, ¿cuál es el valor de  $l$ ? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de  $l$  que pueden ser obtenidos cuando se mide  $L^2$ ?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con  $m$  definido?

(c) Suponga que se sabe de alguna manera que  $\Psi(x, y, z)$  es una autofunción de energía con autovalor  $E$ . Indique cómo puede hallarse  $V(r)$ .

**P11** Considere el Hamiltoniano de un rotor rígido,

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right),$$

donde  $\mathbf{L}$  es el impulso angular en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. A partir de esta expresión obtenga la ecuación de movimiento de Heisenberg para  $\mathbf{L}$  y luego halle las ecuaciones de movimiento de Euler en el límite correspondiente.

## III. Suma de Momento Angular

**P12** Considere una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  en un estado con momento angular orbital  $l = 1$ .

(a) Encuentre el estado con  $j_{max}$  y  $m_{j_{max}}$  en términos de los estados  $|l, s, m_l, m_s\rangle$ .

(b) Use  $J_- = L_- + S_-$  para generar todos los estados  $|j_{max}, m\rangle$ .

(c) Use ortonormalidad para encontrar el estado  $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$ .

(d) Use  $J_-$  para generar todos los estados  $|j_{max} - 1, m\rangle$ .

(e) ¿Cuál es el valor de expectación de  $L_z$  en el estado con  $j = 1/2$  y  $m = 1/2$ ? ¿Cuál es el valor de expectación de  $S_z$  en ese estado?

**P13** Considere dos partículas con espín  $\frac{1}{2}$ . Calcule todos los coeficientes de Clebsch-Gordan por dos caminos diferentes:

(a) Escriba los autoestados de espín total  $S^2$  y  $S_z$ ,  $\{|s, m\rangle\}$ , en función de los autoestados de  $S_1z, S_2z$ ,  $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$ , usando los operadores  $S_{\pm}$  y ortogonalidad (mismo procedimiento del **P12**).

(b) Escriba las matrices de  $4 \times 4$  que corresponden a la representación de los operadores

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \quad S_z = S_{1z} + S_{2z},$$

en la base  $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$ . Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza estas matrices. ¿Qué son los coeficientes del cambio de base?

**P14** El acoplamiento espín-órbita es un efecto relativista que introduce, a bajas energías, una interacción efectiva entre el espín y el momento angular orbital de una partícula. De esta forma, incluyendo el acoplamiento espín-órbita, el Hamiltoniano electrónico para el átomo de Hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2}, \quad \text{con } H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

y donde  $\mathbf{S}$  representa el espín del electrón.

(a) Evalúe los conmutadores

$$[H, L^2], [H, S^2], [H, J^2], [H, L_z], [H, S_z], [H, J_z],$$

donde  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo  $H$ ) que conmutan mutuamente?

Ayuda: recuerde que en coordenadas polares el operador  $p^2$  se escribe como

$$p^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial^2} r + \frac{1}{r^2} L^2.$$

(b) Considere ahora que se enciende un campo magnético externo  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ , de modo que al Hamiltoniano se le agrega el término

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar} B (L_z + 2S_z).$$

Para este caso, repita el inciso (a).

#### IV. Operadores Vectoriales, Tensores Esféricos y Teorema de Wigner–Eckart

**P15** Sean  $\{V_x, V_y, V_z\}$  tres operadores. Decimos que  $V_i$  son las componentes de un *operador vectorial* si ante rotaciones  $V_i$  se transforma de la forma

$$\mathcal{D}^\dagger(R) V_i \mathcal{D}(R) = \sum_j R_{ij} V_j,$$

donde  $R$  es la matriz que define la rotación en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{D}(R)$  el operador de rotación asociado en el espacio de Hilbert. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$[L_j, V_k] = i\hbar \varepsilon_{jkl} V_l.$$

(a) Verifique que el operador posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  es un operador vectorial.

(b) Verifique que el operador momento  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$  es un operador vectorial.

(c) Verifique que el operador de momento angular orbital  $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$  es un operador vectorial.

**P16** Sean  $\{T_{-k}^{(k)}, T_{-k+1}^{(k)}, \dots, T_{k-1}^{(k)}, T_k^{(k)}\}$   $2k+1$  operadores. Decimos que  $T_q^{(k)}$  son las componentes de un *tensor esférico irreducible* de rango  $k$  si ante rotaciones  $T_q^{(k)}$  se transforma de la forma

$$\mathcal{D}^\dagger(R) T_q^{(k)} \mathcal{D}(R) = \sum_{q'} \mathcal{D}_{q'q}^{(k)}(R) T_{q'}^{(k)},$$

donde  $\mathcal{D}_{q'q}^{(k)}$  son los elementos de matriz del operador de rotación en el subespacio de momento angular  $k$ , es decir  $\langle kq' | \mathcal{D}(R) | kq \rangle$ . Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad [J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}.$$

(a) Verifique que si  $\mathbf{V}$  es un operador vectorial, entonces los operadores  $V_q^{(1)}$  dados por

$$V_{\pm 1}^{(1)} =: \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V_0 =: V_z,$$

definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

- (b) Sea  $\mathbf{V}$  un operador vectorial. Considere los armónicos esféricos  $Y_{l=1}^m(x, y, z)$  en coordenadas cartesianas y sean  $V_q^{(1)}$ ,  $q = -1, 0, 1$ , operadores definidos de la forma

$$V_q^{(1)} = rY_1^q(V_x, V_y, V_z),$$

(es decir que en la fórmula de los armónicos esféricos sustituimos las variables  $x_i$  por los respectivos operadores  $V_i$ ). Verifique entonces que los operadores  $V_q^{(1)}$  definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

- (c) Suponiendo que las componentes de  $\mathbf{V}$  conmutan entre sí y haciendo uso del hecho que los armónicos esféricos ante rotaciones se transforman de la forma

$$Y_l^m \xrightarrow{R} (Y_l^m)' = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(l)}(R) Y_l^{m'},$$

discuta por qué la sustitución  $V_q^{(k)} = r^k Y_k^q(V_x, V_y, V_z)$  en los armónicos esféricos escritos en coordenadas cartesianas nos define un tensor esférico irreducible de rango  $k$ .

**P17** Sean  $V^{(k_1)}$  y  $W^{(k_2)}$  dos tensores esféricos irreducibles de rango  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente.

- (a) Muestre entonces que los operadores  $T_q^{(k)}$ , dados por

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1, q_2} V_{q_1}^{(k_1)} W_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | k q \rangle,$$

forman un tensor esférico irreducible de rango  $k$ . Para ello, estudie cómo transforma  $T^{(k)}$  ante rotaciones.

- (b) A partir de la expresión del inciso anterior, concluya que el producto  $V_i W_j$  de las componentes de dos operadores vectoriales  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  se puede escribir como la suma de un escalar, otro vector y un tensor esférico de rango 2.
- (c) Sean  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  dos operadores vectoriales. Construya, a partir de estos dos operadores y utilizando el inciso (a), tensores esféricos irreducibles de rango 0, rango 1 y rango 2 expresados en términos de los productos de las componentes  $V_i$  y  $W_j$ . En particular, si  $\mathbf{V} = \mathbf{W} = \mathbf{R}$  es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador momento cuadrupolar eléctrico.

**P18** Considere una partícula sin espín ligada a un centro fijo mediante un potencial central. Estudie los elementos de matriz

$$\left\langle n', l', m' \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy) \right| n, l, m \right\rangle \quad \text{y} \quad \langle n', l', m' | z | n, l, m \rangle,$$

utilizando únicamente el teorema de Wigner-Eckart. En particular, trate de relacionar los distintos elementos de matriz entre sí y establezca cuáles de ellos pueden ser no nulos.

**P19** El tensor cuadrupolar eléctrico de una partícula de carga  $q$  se define como

$$Q_{ik} := q(3x_i x_k - \delta_{ik} r^2).$$

Suponga que se conoce el valor de expectación de la componente  $zz$  del momento cuadrupolar en el autoestado de momento angular  $|\alpha, j, m = j\rangle$  (donde  $\alpha$  es un índice asociado a la dependencia radial del estado; recordar que  $L^2$  y  $L_z$  no forman un CCOC). Notemos con  $Q$  este valor de expectación, es decir que

$$Q := \langle \alpha, j, m = j | Q_{zz} | \alpha, j, m = j \rangle = q \langle \alpha, j, m = j | (3z^2 - r^2) | \alpha, j, m = j \rangle.$$

- (a) Calcule los elementos de matriz

$$q \langle \alpha, j, m' | (x^2 - y^2) | \alpha, j, m = j \rangle, \quad m' = j, j-1, \dots, -j+1, -j.$$

en función de  $Q$  y de los coeficientes de Clebsch-Gordan. Para ello,

- (i) Escriba  $xy$ ,  $xz$ , y  $(x^2 - y^2)$  como componentes de un tensor esférico irreducible de rango 2.
- (ii) Evalúe los elementos de matriz buscados utilizando el teorema de Wigner-Eckart.
- (b) Evalúe los valores de expectación de todas las componentes del tensor cuadrupolar sobre los estados  $|\alpha, j, m = j\rangle$ , es decir calcule

$$\langle \alpha, j, m = j | Q_{ik} | \alpha, j, m = j \rangle,$$

en función del valor de expectación  $Q$ . Interprete el resultado.

- (c) Probar que para un núcleo atómico de espín 0 o 1/2 los valores de expectación del momento cuadrupolar eléctrico son nulos (el espín de un núcleo es el momento angular resultante de los espines y momentos angulares relativos de los nucleones constituyentes).