Mecánica Cuántica

Segundo Cuatrimestre 2026

Guía 7: Momento Angular y Rotaciones

"The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve." – Eugene Paul Wigner, *Philosophical Reflections and Syntheses*, 1992.

I. Momento Angular

P1 **Valores medios de momento angular**. Suponga que un sistema se encuentra en un autoestado del operador $\hat{J}_z$ con autovalor $\hbar m$.

(a) Muestre que los valores medios tanto de $\hat{J}_x$ como $\hat{J}_y$ son cero de dos formas diferentes:
   (i) Usando el principio de incertidumbre.
   (ii) Usando la expansión de $\hat{J}_x$ y $\hat{J}_y$ en términos de $\hat{J}_+$ y $\hat{J}_-$.

(b) Muestre que si se mide la proyección de momento angular sobre una dirección $\vec{n}$ que forma un ángulo θ con el eje $\vec{z}$, entonces $\left\langle \vec{n} \cdot \hat{\boldsymbol{J}} \right\rangle = \hbar m \cos\theta$.

P2 **Momento angular j = 1/2**. Considere un sistema de espín 1/2.

(a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y bajada, la representación matricial de los operadores $\hat{\boldsymbol{S}}^2$, $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ y $\hat{S}_z$ en la base de autoestados de $\hat{S}_z$. Muestre que se obtiene que los operadores de espín están dados por $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i$, donde $\hat{\sigma}_i$ son las matrices de Pauli.

(b) Usando resultados anteriores, muestre que el operador rotación para un sistema de espín 1/2 se puede escribir como

$$\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{n},\phi) = \exp\left(-i\,\frac{\vec{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}}{\hbar}\phi\right) = \hat{\mathbb{I}}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\,(\vec{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})\sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

donde $\hat{\mathbb{I}}$ es la matriz identidad.

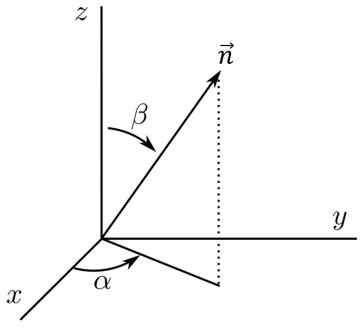
(c) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{n},\phi)$ en la base

$$\left\{|+\rangle \equiv \left|j=\frac{1}{2}, m=\frac{1}{2}\right\rangle, |-\rangle \equiv \left|j=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}\right\rangle\right\}.$$

Aplique al estado $|+\rangle$ el operador $\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{n},\phi)$ particularizando a los casos donde $\vec{n}=\vec{y}$ y $\phi=\pi/2$, $\phi=\pi$ y $\phi=3\pi/2$, ¿qué estados obtiene? Interprete.

(d) Sea $\vec{n}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplique al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado para obtener el estado $|+,\vec{n}\rangle$, que representa un espín orientado según $\vec{n}$. Compare el resultado con el obtenido en la Guía 1. Haga la cuenta de dos formas diferentes:
   (i) Aplicando una única rotación en un ángulo y dirección adecuado.
   (ii) Descomponiendo la rotación en rotaciones elementales utilizando los ángulos de Euler (ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3), los cuales se definen (en espín 1/2) como la secuencia de rotaciones dada por:

$$\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\phi_1,\phi_2,\phi_3) \equiv \hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{z},\phi_1)\,\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{y},\phi_2)\,\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{z},\phi_3).$$



(e) Muestre que para una rotación en $\phi = 2\pi$ se satisface que $\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{n}, \phi = 2\pi) = -\hat{\mathbb{I}}$, y, por lo tanto, ante una rotación en 2π el estado del sistema cambia según

$$|\psi\rangle \quad \longrightarrow \quad \hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{n}, \phi = 2\pi)\,|\psi\rangle = -\,|\psi\rangle\,.$$

Observe que no se obtiene el mismo vector debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pág. 24.

P3 **Rotación de operadores**. Considere un estado arbitrario $|\psi\rangle$ de un sistema de espín 1/2, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje $\vec{z}$, es decir

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{z}, \varphi)\,|\psi\rangle = \exp\left(-i\,\frac{\hat{S}_z\varphi}{\hbar}\right)|\psi\rangle\,.$$

Calcule los valores medios $\left\langle\psi'\middle|\hat{S}_x\middle|\psi'\right\rangle$, $\left\langle\psi'\middle|\hat{S}_y\middle|\psi'\right\rangle$ y $\left\langle\psi'\middle|\hat{S}_z\middle|\psi'\right\rangle$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\left\langle\psi\middle|\hat{S}_x\middle|\psi\right\rangle$, $\left\langle\psi\middle|\hat{S}_y\middle|\psi\right\rangle$ y $\left\langle\psi\middle|\hat{S}_z\middle|\psi\right\rangle$ en el sistema original.

P4 **Secuencia de rotaciones**. Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín 1/2 representada por el operador:

$$\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{z}, \alpha)\,\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{y}, \beta)\,\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\vec{z}, \gamma).$$

(a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{D}}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp\left(-i\frac{\hat{\sigma}_z\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\hat{\sigma}_y\beta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\hat{\sigma}_z\gamma}{2}\right)\\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

P5 **Momento angular j = 1**. Considere un sistema con momento angular $j = 1$.

(a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, la representación matricial de los operadores $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, y $\hat{J}_z$ en la base $\{|j=1, m=1\rangle, |j=1, m=0\rangle, |j=1, m=-1\rangle\}$ de autoestados de $\hat{J}_z$. Verifique explícitamente lo obtenido utilizando la relación de conmutación $\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hbar\hat{J}_z$.

(b) Encuentre la base $\{|j=1, m_y\rangle\}$ de autoestados de $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ y $\hat{J}_y$, como combinación lineal de los $\{|j=1, m\rangle\}$.

(c) Evalúe $\hat{J}_z(\hat{J}_z+\hbar)(\hat{J}_z-\hbar)$ y $\hat{J}_y(\hat{J}_y+\hbar)(\hat{J}_y-\hbar)$ sin usar la representación matricial.

(d) Muestre que en el caso de momento angular $j = 1$, vale que

$$\hat{\mathcal{D}}^{(1)}(\vec{y}, \beta) = e^{-i\hat{J}_y\beta/\hbar} = 1 - i\left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)\sin\beta - \left(\frac{\hat{J}_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)\,.$$

Usando esto, obtenga que su representación matricial en la base de autoestados de $\hat{J}_z$ es:

$$\hat{\mathcal{D}}^{(1)}(\vec{y}, \beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \cos\beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta)\end{pmatrix},$$

(e) Aplique el operador $\hat{\mathcal{D}}^{(1)}(\vec{y}, \beta)$ a cada uno de los autoestados $\{|j=1, m\rangle\}$ del operador $\hat{J}_z$. Particularice a los casos donde $\beta = \pi/2$, $\beta = \pi$ y $\beta = 3\pi/2$, ¿qué estados obtiene? Interprete.

P6 **Wigner d-Functions**. Considere un autoestado de momento angular $|j, m\rangle$ del operador $\hat{J}_z$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje $\vec{y}$.

(a) Escriba la matriz de rotación $\hat{\mathcal{D}}^{(j)}(\vec{y}, \beta)$ para el caso donde $j = 3/2$ utilizando las *Wigner d-Functions*. Halle la probabilidad de medir las distintas proyecciones de espín en el estado rotado si inicialmente $m = 1/2$.

(b) Escriba la matriz de rotación $\hat{\mathcal{D}}^{(j)}(\vec{y}, \beta)$ para el caso donde $j = 2$ utilizando las *Wigner d-Functions*. Halle la probabilidad de medir las distintas proyecciones de espín en el estado rotado si inicialmente $m = 0$.

II. Momento Angular Orbital

P7 **Armónicos esféricos**. Considere los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta,\phi)$ con $l=1$ y $m\in\{-1,0,1\}$. Utilizando la representación en $\hat{r}$:

(a) Verifique que estas funciones cumplen con las ecuaciones de autovalores $\hat{L}_z Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar m Y_l^m(\theta,\phi)$ y $\hat{\boldsymbol{L}}^2 Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta,\phi)$.

(b) Compruebe que pueden obtenerse los armónicos esféricos $Y_1^{\pm1}(\theta,\phi)$ a partir de $Y_1^0(\theta,\phi)$ aplicando los operadores de subida y bajada $\hat{L}_\pm$, respectivamente (a diferencia de un factor de normalización).

(c) Vea que $\hat{L}_+ Y_1^1(\theta,\phi) = 0$ y $\hat{L}_- Y_1^{-1}(\theta,\phi) = 0$.

P8 **Valores de momento angular orbital**. Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l para el momento angular orbital, por ejemplo $l=1/2$. A partir de la condición

$$\hat{L}_+ Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) = 0,$$

podemos deducir que

$$Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) \propto e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}.$$

Verifique esta afirmación. Intente construir entonces $Y_{1/2}^{-1/2}(\theta,\phi)$ de dos maneras diferentes:

(a) Aplicando $\hat{L}_-$ a $Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi)$,

(b) Usando que $\hat{L}_- Y_{1/2}^{-1/2}(\theta,\phi) = 0$.

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l).

P9 **Medición de momento angular.** Considere un sistema con momento angular orbital $l=1$ que se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|l=1,m=1\rangle - |l=1,m=-1\rangle\right),$$

donde $\{|l,m\rangle\}$ denota la base de autoestados común de los operadores $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ y $\hat{L}_z$, cuya representación en el espacio de coordenadas satisface $\langle\vec{r}|l,m\rangle = Y_l^m(\theta,\phi)$.

(a) Determine la función de onda espacial $\psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi\rangle$ en términos de los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta,\phi)$.

(b) Encuentre los autoestados de $\hat{L}_x$ (para $l=1$) expresados en la base $\{|l,m\rangle\}$ y escriba sus correspondientes funciones de onda en el espacio de coordenadas. Verifique explícitamente que satisfacen la ecuación de autovalores para $\hat{L}_x$ y $\hat{\boldsymbol{L}}^2$. Repita el cálculo para los autoestados de $\hat{L}_y$.

(c) Si se mide la componente $\hat{L}_x$ sobre el sistema en el estado $|\psi\rangle$, ¿qué valores posibles pueden obtenerse y con qué probabilidades? Realice el cálculo empleando la representación de Dirac (álgebra de *kets*) y verifíquelo a través de la integración de las funciones de onda.

(d) Repita el cálculo de probabilidades si, en lugar de $\hat{L}_x$, se midiera $\hat{L}_y$.

P10 **Potencial esférico**. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por

$$\Psi(x,y,z) = (x+y+3z)f(r),$$

con $f(r)$ alguna función de $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) ¿Cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos en una medición de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ sobre el estado Ψ? ¿Es Ψ autofunción de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos autoestados de $\hat{L}_z$?

(c) Suponga que se sabe de alguna manera que $\Psi(x,y,z)$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

P11 **Oscilador armónico tridimensional.** Considere una partícula de masa m bajo un potencial armónico tridimensional isótropo de frecuencia ω, cuyo Hamiltoniano es

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2+\hat{p}_z^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}^2+\hat{y}^2+\hat{z}^2\right).$$

(a) Muestre que el problema se desacopla en tres osciladores unidimensionales independientes. Halle los niveles de energía E_N en función del número cuántico total $N = n_x + n_y + n_z$. Convénzase que la degeneración de cada nivel viene dada por $g_N = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$.

(b) Dado que $\hat{H}_0$ viene de un potencial central, el sistema admite una base común de autoestados cuyas funciones de onda son de la forma $\psi_{n_r,l,m}(\vec{r}) = R_{n_r,l}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$. Considere que la partícula se encuentra en el estado

$$\psi(x,y,z) = C\left(1 + \frac{x+y}{x_0}\right)e^{-r^2/(2x_0^2)},$$

siendo $x_0 \equiv \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ una constante positiva con unidades de longitud.

(i) Halle la constante C de normalización.

(ii) Si se mide $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades? Calcule las probabilidades correspondientes si, en lugar de $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, se midiera $\hat{L}_z$.

(c) Suponga ahora que el Hamiltoniano del sistema contiene un término dependiente de la proyección en $\vec{z}$ del momento angular orbital:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{\gamma}{\hbar}\hat{L}_z^2.$$

(i) Defina los operadores de aniquilación y creación *quirales* en el plano xy:

$$\hat{a}_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y), \qquad \hat{a}_\pm^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger).$$

Verifique las relaciones de conmutación $[\hat{a}_r, \hat{a}_s^\dagger]$ para $r, s \in \{+,-\}$. Escriba $\hat{H}$ en términos de los operadores de número $\hat{N}_\pm = \hat{a}_\pm^\dagger\hat{a}_\pm$ y $\hat{N}_z = \hat{a}_z^\dagger\hat{a}_z$.

(ii) Determine los autoestados y autovalores de $\hat{H}$. Considerando que $\omega \gg \gamma > 0$, identifique los estados correspondientes al nivel fundamental y al primer excitado, indicando la degeneración de cada uno.

P12 **Rotor rígido**. Considere el Hamiltoniano de un rotor rígido,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{L}_1^2}{I_1} + \frac{\hat{L}_2^2}{I_2} + \frac{\hat{L}_3^2}{I_3}\right),$$

donde $\hat{\boldsymbol{L}} \equiv (\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3)$ es el impulso angular en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. A partir de esta expresión obtenga la ecuación de movimiento de Heisenberg para las distintas componentes de $\hat{\boldsymbol{L}}$. Recupere las ecuaciones de movimiento de Euler en el límite correspondiente.

III. Suma de Momentos Angulares

P13 **Espín 1/2 orbitando**. Considere una partícula de espín $\frac{1}{2}$ en un estado con momento angular orbital $l = 1$.

(a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.

(b) Use $\hat{J}_- = \hat{L}_- + \hat{S}_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.

(c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max}-1, j_{max}-1\rangle$.

(d) Use $\hat{J}_-$ para generar todos los estados $|j_{max}-1, m\rangle$.

(e) ¿Cuál es el valor de expectación de $\hat{L}_z$ en el estado $|j = 1/2, m = 1/2\rangle$? ¿Cuál es el valor de expectación de $\hat{S}_z$ en ese mismo estado?

P14 **Dos partículas s = 1/2**. Considere dos partículas con espín $\frac{1}{2}$. Calcule todos los coeficientes de Clebsch-Gordan por dos caminos diferentes:

(a) Escriba los autoestados de espín total $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ y $\hat{S}_z$, $\{|s, m\rangle\}$, en función de los autoestados de los operadores $\hat{S}_{1,z}$, $\hat{S}_{2,z}$, $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$, usando los operadores $\hat{S}_\pm$ y ortogonalidad (mismo procedimiento del ejercicio **P13**).

(b) Escriba las matrices de 4×4 que corresponden a la representación de los operadores

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2 = \hat{\boldsymbol{S}}_1^2 + \hat{\boldsymbol{S}}_2^2 + 2\hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2, \qquad \hat{S}_z = \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z},$$

en la base $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza estas matrices. ¿Qué son los coeficientes de la matriz de cambio de base?

P15 **Interacción espín-órbita y efecto Zeeman**. En el átomo de hidrógeno, la interacción relativista espín-órbita para el electrón introduce una corrección al Hamiltoniano no relativista $\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$, dada por

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3}\,\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}} \qquad \text{siendo} \qquad \hat{\boldsymbol{p}}^2 = -\hbar^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{L}}^2.$$

Se define el momento angular total del electrón como $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$.

(a) Muestre que puede reescribir al operador de interacción espín-órbita como:

$$\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{\boldsymbol{S}}^2\right) \qquad \text{ó} \qquad \hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{L}_z\hat{S}_z + \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+\hat{S}_- + \hat{L}_-\hat{S}_+\right).$$

(b) Calcule los conmutadores

$$\left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}}^2\right],\ \left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{S}}^2\right],\ \left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{J}}^2\right],\ \left[\hat{H}, \hat{L}_z\right],\ \left[\hat{H}, \hat{S}_z\right],\ \left[\hat{H}, \hat{J}_z\right].$$

A partir de esto, justifique por qué la base desacoplada $\{|n, l, s, m_l, m_s\rangle\}$ deja de ser una base de autoestados estacionarios y determine cuál es el CCOC adecuado para clasificar los estados del sistema.

(c) Suponga ahora que se enciende un campo magnético uniforme a lo largo del eje z, $\vec{B} = B\,\vec{z}$, agregando al Hamiltoniano el término Zeeman:

$$\hat{H}_B = \frac{\mu_B}{\hbar}B\left(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z\right)$$

Repita el cálculo de los conmutadores del inciso (a) con el Hamiltoniano total $\hat{H}' = \hat{H} + \hat{H}_B$ ¿Sigue siendo $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ una constante de movimiento? ¿Qué magnitudes físicas se conservan en presencia del campo magnético?

P16 **Espín 1 orbitando**. Considere una partícula de espín $s = 1$ con momento angular orbital $l = 1$.

(a) Determine los posibles valores del momento angular total j. Luego, empleando la tabla de Clebsch-Gordan, exprese el estado acoplado de momento angular $|j = 1, m = 0\rangle$ como combinación lineal de los estados de la base desacoplada $\{|l, s, m_l, m_s\rangle\}$.

(b) Calcule el valor medio del operador $\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ sobre el estado $|j = 1, m = 0\rangle$ mediante dos formas distintas:

(i) Escriba el operador $\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ en términos de los operadores $\hat{L}_z$, $\hat{S}_z$ y los operadores de subida y bajada $\hat{L}_\pm$ y $\hat{S}_\pm$. Realice el cálculo sobre la base desacoplada.

(ii) Escriba el operador $\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ en términos de los operadores $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ y $\hat{\boldsymbol{S}}^2$. Realice el cálculo sobre la base acoplada.

Compare el esfuerzo algebraico de ambos métodos ¿Qué camino convendría tomar si, en cambio, el estado fuera un elemento arbitrario de la base desacoplada $\{|l, s, m_l, m_s\rangle\}$?

(c) Para el estado acoplado $|j = 1, m = 0\rangle$, calcule los valores medios y varianzas para los observables $\hat{J}_z$, $\hat{L}_z$ y $\hat{S}_z$. Interprete físicamente por qué las incertezas en $\hat{L}_z$ y $\hat{S}_z$ son no nulas a pesar de que la incerteza para $\hat{J}_z$ es estrictamente nula.

IV. Operadores Vectoriales, Tensores Esféricos y Teorema de Wigner–Eckart

P17 **Operadores vectoriales**. Sean $\{\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z\}$ tres operadores. Decimos que $\hat{V}_i$ es la componente de un *operador vectorial* si ante rotaciones $\hat{V}_i$ se transforma de la forma

$$\hat{\mathcal{D}}^\dagger(R)\,\hat{V}_i\hat{\mathcal{D}}(R) = \sum_j R_{ij}\hat{V}_j,$$

donde R es la matriz que define la rotación en $\mathbb{R}^3$ y $\hat{\mathcal{D}}(R)$ el operador de rotación asociado en el espacio de Hilbert. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$\left[\hat{L}_j, \hat{V}_k\right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{V}_l.$$

(a) Verifique que el operador posición $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ es un operador vectorial.

(b) Verifique que el operador momento $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ es un operador vectorial.

(c) Verifique que el operador de momento angular orbital $\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ es un operador vectorial.

P18 **Tensores esféricos irreducibles**. Sean $\{\hat{T}^{(k)}_{-k}, \hat{T}^{(k)}_{-k+1}, \ldots, \hat{T}^{(k)}_{k-1}, \hat{T}^{(k)}_{k}\}$ $2k+1$ operadores. Decimos que $\hat{T}^{(k)}_q$ son las componentes de un *tensor esférico irreducible* de rango k si ante rotaciones $\hat{T}^{(k)}_q$ se transforma de la forma

$$\hat{\mathcal{D}}^{\dagger}(R)\, \hat{T}^{(k)}_q\, \hat{\mathcal{D}}(R) = \sum_{q'} d^{(k)}_{q'q}(R)\, \hat{T}^{(k)}_{q'},$$

donde $d^{(k)}_{q'q}$ son los elementos de matriz del operador de rotación en el subespacio de momento angular k, es decir $\left\langle k, q' \middle| \hat{\mathcal{D}}(R) \middle| k, q \right\rangle$. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$\left[\hat{J}_z, \hat{T}^{(k)}_q\right] = \hbar q \hat{T}^{(k)}_q, \qquad \left[\hat{J}_{\pm}, \hat{T}^{(k)}_q\right] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}\, \hat{T}^{(k)}_{q\pm 1}.$$

(a) Verifique que si $\hat{\boldsymbol{V}}$ es un operador vectorial, entonces los operadores $\hat{V}^{(1)}_q$ dados por

$$\hat{V}^{(1)}_{\pm 1} =: \mp \frac{\hat{V}_x \pm i\hat{V}_y}{\sqrt{2}}, \quad \hat{V}_0 =: \hat{V}_z,$$

definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(b) Sea $\hat{\boldsymbol{V}}$ un operador vectorial. Considere los armónicos esféricos $Y^m_1(x,y,z)$ en coordenadas cartesianas y sean $\hat{V}^{(1)}_q$, con $q \in \{-1, 0, 1\}$, operadores definidos de la forma

$$\hat{V}^{(1)}_q = r Y^q_1\left(\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z\right),$$

(es decir, en la fórmula de los armónicos esféricos sustituimos las variables x_i por los respectivos operadores $\hat{V}_i$). Verifique entonces que los operadores $\hat{V}^{(1)}_q$ definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(c) Suponiendo que las componentes de $\hat{\boldsymbol{V}}$ conmutan entre sí y haciendo uso del hecho que los armónicos esféricos ante rotaciones se transforman de la forma

$$Y^m_l \xrightarrow[R]{} (Y^m_l)' = \sum_{m'} d^{(l)}_{m'm}(R)\, Y^{m'}_l.$$

Discuta por qué la sustitución $\hat{V}^{(k)}_q = r^k Y^q_k(\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z)$ en los armónicos esféricos escritos en coordenadas cartesianas nos define un tensor esférico irreducible de rango k.

P19 **Construcción de tensores esféricos irreducibles**. Sean $\bar{\boldsymbol{V}}^{(k_1)}$ y $\bar{\boldsymbol{W}}^{(k_2)}$ dos tensores esféricos irreducibles de rango k_1 y k_2, respectivamente.

(a) Muestre entonces que los operadores $\hat{T}^{(k)}_q$, dados por

$$\hat{T}^{(k)}_q = \sum_{q_1, q_2} \hat{V}^{(k_1)}_{q_1} \hat{W}^{(k_2)}_{q_2} \langle k_1, k_2; q_1, q_2 | k, q\rangle,$$

forman un tensor esférico irreducible de rango k. Para ello, estudie cómo transforma las componentes de $\bar{\boldsymbol{T}}^{(k)}$ ante rotaciones.

(b) A partir de la expresión del inciso anterior, concluya que el producto $\hat{V}_i \hat{W}_j$ de las componentes de dos operadores vectoriales $\hat{\boldsymbol{V}}$ y $\hat{\boldsymbol{W}}$ se puede escribir como la suma de un escalar, otro vector y un tensor esférico de rango 2.

(c) Sean $\hat{\boldsymbol{V}}$ y $\hat{\boldsymbol{W}}$ dos operadores vectoriales. Construya, a partir de estos dos operadores y utilizando el inciso (a), tensores esféricos irreducibles de rango 0, rango 1 y rango 2 expresados en términos de los productos de las componentes $\hat{V}_i$ y $\hat{W}_j$. En particular, si $\hat{\boldsymbol{V}} = \hat{\boldsymbol{W}} = \hat{\boldsymbol{r}}$ es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador momento cuadrupolar eléctrico.

P20 **Reglas de selección dipolares I**. Considere una partícula sin espín ligada a un centro fijo mediante un potencial central. Estudie los elementos de matriz

$$\left\langle n', l', m' \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} \pm i\hat{y}) \middle| n, l, m \right\rangle \quad \text{y} \quad \langle n', l', m' | \hat{z} | n, l, m\rangle,$$

utilizando únicamente el teorema de Wigner-Eckart. En particular, trate de relacionar los distintos elementos de matriz entre sí y establezca cuáles de ellos pueden ser no nulos.

P21 **Reglas de selección dipolares II**. Considere una partícula de masa m sometida al Hamiltoniano $\hat{H}$ de un oscilador armónico tridimensional isótropo de frecuencia ω (ver ejercicio **P11**). Se desea estudiar las transiciones dipolares eléctricas inducidas por radiación, cuyos elementos de matriz son proporcionales a las componentes del operador posición $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.

(a) Estudie los elementos de matriz no nulos de la base $\{|N, l, m\rangle\}$ para cada una de las componentes del operador $\hat{\boldsymbol{r}}$ utilizando únicamente el teorema de Wigner Eckart, donde N es el número cuántico principal de energía $E_N = \hbar\omega(N + 3/2)$. Trate de relacionar los distintos elementos de matriz entre sí y establezca cuáles de ellos pueden ser no nulos.

(b) Argumente, mediante el operador paridad $\hat{\Pi}$ (sabiendo que la paridad de $|N, l, m\rangle$ es $(-1)^l$), por qué el elemento dipolar se anula si $l' = l$. Concluya las reglas de selección angulares:

$$\Delta l = \pm 1, \qquad \Delta m = 0, \pm 1.$$

(c) Utilizando la representación con operadores $\hat{x}_j = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)$, demuestre que para el número cuántico principal se debe cumplir estrictamente $\Delta N = \pm 1$.

(d) Considere el estado fundamental $|N = 0, l = 0, m = 0\rangle$. ¿A qué estados $|N' = 1, l', m'\rangle$ puede transicionar mediante la absorción de un fotón polarizado linealmente a lo largo de la dirección $\vec{z}$?

P22 **Reglas de selección cuadrupolares**. El tensor cuadrupolar eléctrico de una partícula de carga q se define como

$$\hat{Q}_{ik} := q\left(3\hat{x}_i\hat{x}_k - \delta_{ik}\hat{\boldsymbol{r}}^2\right).$$

Suponga que se conoce el valor de expectación de la componente $\hat{Q}_{zz}$ del momento cuadrupolar en el autoestado de momento angular $|\alpha, j, m = j\rangle$ (donde α es un índice asociado a la dependencia radial del estado; recordar que L^2 y L_z no forman un CCOC). Notemos con Q este valor de expectación, es decir que

$$Q := \left\langle \alpha, j, m = j \middle| \hat{Q}_{zz} \middle| \alpha, j, m = j \right\rangle = q\left\langle \alpha, j, m = j \middle| \left(3\hat{z}^2 - \hat{\boldsymbol{r}}^2\right) \middle| \alpha, j, m = j \right\rangle.$$

(a) Calcule los elementos de matriz

$$q\left\langle \alpha, j, m' \middle| \left(\hat{x}^2 - \hat{y}^2\right) \middle| \alpha, j, m = j \right\rangle, \qquad m' = j, j-1, \ldots, -j+1, -j.$$

en función de Q y de los coeficientes de Clebsch-Gordan. Para ello,

(i) Escriba $\hat{x}\hat{y}$, $\hat{x}\hat{z}$, y $(\hat{x}^2 - \hat{y}^2)$ como componentes de un tensor esférico irreducible de rango 2.

(ii) Evalúe los elementos de matriz buscados utilizando el teorema de Wigner-Eckart.

(b) Evalúe los valores de expectación de todas las componentes del tensor cuadrupolar sobre los estados $|\alpha, j, m = j\rangle$, es decir calcule

$$\left\langle \alpha, j, m = j \middle| \hat{Q}_{ik} \middle| \alpha, j, m = j \right\rangle,$$

en función del valor de expectación Q. Interprete el resultado.

(c) Probar que para un núcleo atómico de espín 0 o 1/2 los valores de expectación del momento cuadrupolar eléctrico son nulos (el espín de un núcleo es el momento angular resultante de los espines y momentos angulares relativos de los nucleones constituyentes).