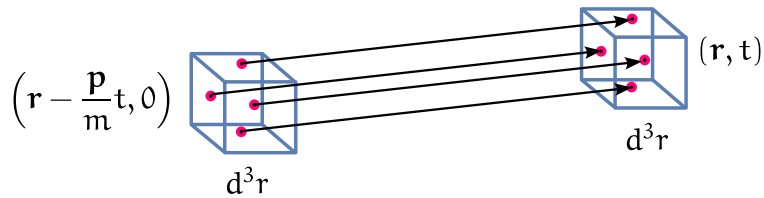


Física Teórica 3 — segundo cuatrimestre de 2025

Guía 4: problema 5*

■ **Problema 5.** El espacio está dividido en dos regiones por una pared en el plano $z = 0$. La región $z < 0$ contiene un gas ideal de partículas de masa m en equilibrio térmico a temperatura T y con una densidad de partículas n_0 . La región $z > 0$ está vacía. En $t = 0$, se retira la pared. Encuentre la densidad de partículas $n(\mathbf{r}, t)$ y la energía media por partícula $\bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t)$ para $t > 0$ (la respuesta puede quedar en términos de *una* integral). Encuentre expresiones aproximadas para la densidad de partículas y para la energía media cuando $t \gg |z|\sqrt{m/kT}$.

■ **Solución.** Si verdaderamente se trata de un gas ideal, las partículas no chocan entre sí. Cuando se remueve el plano que divide al espacio en dos regiones, todas las partículas se mueven en línea recta. Las que a tiempo t están en el elemento de volumen d^3r centrado en la posición \mathbf{r} y tienen impulso \mathbf{p} , es porque a tiempo $t = 0$ estaban en un elemento de volumen d^3r centrado en la posición $\mathbf{r} - (\mathbf{p}/m)t$.



Traducido esto a valores medios, queda

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p = f\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{m}t, \mathbf{p}, 0\right) d^3r d^3p. \quad (1)$$

Es decir que, conocida la función de distribución a tiempo $t = 0$, la función de distribución para $t > 0$ está determinada por

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{m}t, \mathbf{p}, 0\right) \equiv f_0\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{m}t, \mathbf{p}\right). \quad (2)$$

Según las condiciones del enunciado, inicialmente por debajo del plano $z = 0$ tenemos un gas de densidad n_0 a temperatura T , mientras que por encima de ese plano el espacio está vacío. Entonces,

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{n_0}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\beta p^2/2m} \Theta(-z), \quad (3)$$

donde Θ es la función escalón. Por lo tanto, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{n_0}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\beta p^2/2m} \Theta\left(\frac{p_z}{m}t - z\right) \\ &= \frac{n_0}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\beta p^2/2m} \Theta\left(p_z - m\frac{z}{t}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

*zanellaj@df.uba.ar

Rara vez estamos interesados en la función de distribución en sí misma, sino en las densidades y corrientes. La densidad de partículas para $t > 0$ está dada por

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \int d^3p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{n_0}{(2\pi m k T)^{3/2}} \int d^3p e^{-\beta p^2/2m} \Theta\left(p_z - m \frac{z}{t}\right) \\ &= \frac{n_0}{(2\pi m k T)^{3/2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{-\beta p_x^2/2m} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp_y e^{-\beta p_y^2/2m} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z e^{-\beta p_z^2/2m} \Theta\left(p_z - m \frac{z}{t}\right) \\ &= \frac{n_0}{\sqrt{2\pi m k T}} \int_{mz/t}^{\infty} dp_z e^{-\beta p_z^2/2m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Una buena práctica, cuando aparecen expresiones integrales, consiste en tratar de eliminar la mayor cantidad de dependencias dentro de la propia integral. En este caso, el cambio de variables $w = \sqrt{\beta/2m} p_z$ lleva a la siguiente expresión:

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi}} \int_{z/ct}^{\infty} dw e^{-w^2}, \quad (6)$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (7)$$

es una constante que tiene unidades de velocidad y que es del orden de la velocidad media de las partículas cuando están a temperatura T .

Analicemos la expresión (6) para ver si tiene sentido. En primer lugar, la densidad sólo depende de z . Esto es razonable, porque el problema tiene simetría de traslación en las direcciones x e y . Cuando $t \rightarrow 0^+$,

$$\frac{z}{ct} \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{si } z > 0; \\ -\infty, & \text{si } z < 0. \end{cases}, \quad \int_{z/ct}^{\infty} dw e^{-w^2} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{si } z > 0; \\ \sqrt{\pi}, & \text{si } z < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Por lo tanto,

$$n(\mathbf{r}, t) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{si } z > 0; \\ n_0, & \text{si } z < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Esto está de acuerdo con la condición inicial que habíamos supuesto. En el otro límite, cuando $t \rightarrow \infty$, independientemente del signo de z , $z/ct \rightarrow 0$ y

$$n(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{n_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dw e^{-w^2} = \frac{n_0}{2}. \quad (10)$$

Este resultado también es razonable: si inicialmente las partículas ocupaban un semiespacio con densidad n_0 , cuando ocupan todo el espacio lo hacen con densidad $n_0/2$.

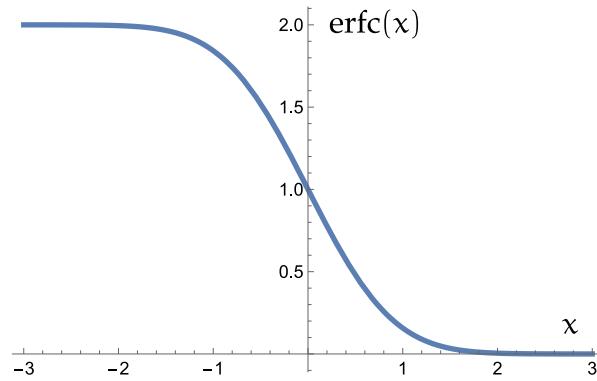
La solución para $n(\mathbf{r}, t)$ puede escribirse en términos de la función de error complementaria,

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} dw e^{-w^2}. \quad (11)$$

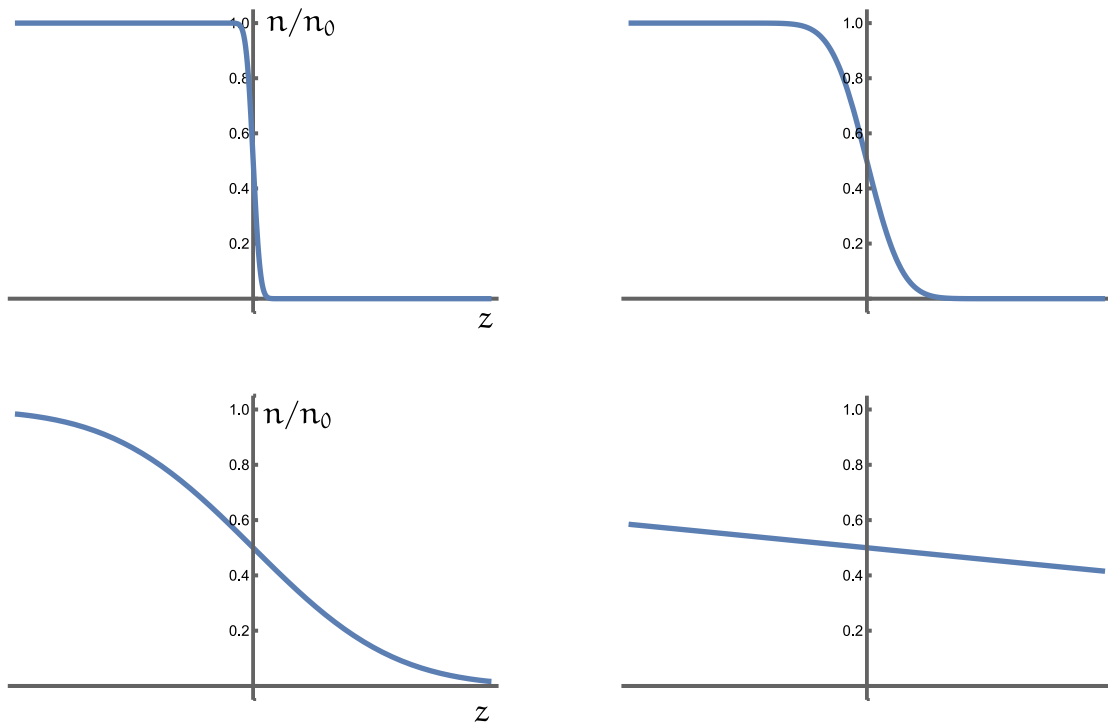
En efecto,

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{n_0}{2} \text{erfc}(\chi), \quad \chi = \frac{z}{ct}. \quad (12)$$

No es difícil imaginar el aspecto de la función $\text{erfc}(x)$. Cuando $|x| \gg 1$, tiende a 2 si $x < 0$ y en 0 si $x > 0$. En $x = 0$, $\text{erfc}(x) = 1$. El rango de valores de x en los que la función pasa de ser próxima a 2 a ser próxima a cero es de orden uno.



A medida que t aumenta, el ancho de la región en la que n pasa de valer prácticamente n_0 a valer prácticamente cero, aumenta con el tiempo como ct . Para tiempos muy pequeños, la región es muy delgada. A tiempos largos, si miramos cerca del plano $z = 0$, veremos una distribución aproximadamente uniforme con densidad $n_0/2$.



Pasemos al cálculo de la densidad de energía. Para $t > 0$,

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = \int d^3p \frac{p^2}{2m} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{n_0}{(2\pi m k T)^{3/2}} \int d^3p \frac{p^2}{2m} e^{-\beta p^2/2m} \Theta\left(p_z - m \frac{z}{t}\right). \quad (13)$$

Si usamos coordenadas cartesianas, aparecen dos tipos de integrales:

$$I_x = \frac{n_0}{(2\pi m k T)^{3/2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \frac{p_x^2}{2m} e^{-\beta p_x^2/2m} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp_y e^{-\beta p_y^2/2m} \right) \left(\int_{mz/t}^{\infty} dp_z e^{-\beta p_z^2/2m} \right),$$

$$I_z = \frac{n_0}{(2\pi m k T)^{3/2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{-\beta p_x^2/2m} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp_y e^{-\beta p_y^2/2m} \right) \left(\int_{mz/t}^{\infty} dp_z \frac{p_z^2}{2m} e^{-\beta p_z^2/2m} \right). \quad (14)$$

Es fácil mostrar que

$$I_x = \frac{n_0 k T}{2} \operatorname{erfc}(\chi), \quad I_z = \frac{n_0 k T}{4} \left[\frac{2\chi}{\sqrt{\pi}} e^{-\chi^2} + \operatorname{erfc}(\chi) \right]. \quad (15)$$

Finalmente,

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = 2I_x + I_z = \frac{3}{2} n_0 k T \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\chi) + \frac{\chi}{3\sqrt{\pi}} e^{-\chi^2} \right]. \quad (16)$$

Hay una forma mucho más sencilla de llegar a esta expresión. Es evidente que ϵ puede obtenerse derivando adecuadamente la expresión para $n(\mathbf{r}, t)$,

$$n(\mathbf{r}, t) = \int d^3p f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{n_0}{(2\pi m k T)^{3/2}} \int d^3p e^{-\beta p^2/2m} \Theta\left(p_z - m \frac{z}{t}\right). \quad (17)$$

En efecto,

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial \beta}. \quad (18)$$

Formalmente, al calcular esta derivada, β se considera independiente de T . A partir de las Ecs. (17) y (12), es fácil ver que, para cancelar el factor $(kT)^{-3/2}$ en la definición original de $n(\mathbf{r}, t)$, la variable β debe aparecer en la siguiente forma:

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{(kT)^{-3/2} n_0}{\beta^{3/2}} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\chi), \quad (19)$$

donde $\chi = z/ct = (z/t)\sqrt{\beta m/2}$. Entonces, a partir de la relación (18), obtenemos

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = (kT)^{-3/2} \frac{n_0}{2} \left[\frac{3}{2\beta^{5/2}} \operatorname{erfc}(\chi) - \frac{1}{\beta^{3/2}} \operatorname{erfc}'(\chi) \frac{\chi}{2\beta} \right]. \quad (20)$$

Según la definición (11), $\operatorname{erfc}'(\chi) = -(2/\sqrt{\pi})e^{-\chi^2}$. Así, volvemos a obtener el resultado (16), pero de una forma más económica.

A manera de verificación, cuando $t \rightarrow 0^+$,

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{3}{2}n_0kT \begin{cases} 0, & \text{si } z > 0; \\ 1, & \text{si } z < 0. \end{cases} \quad (21)$$

En cambio, cuando $t \rightarrow \infty$,

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{3}{4}n_0kT. \quad (22)$$

El primer resultado es el esperado, y el segundo no carece de sentido.

La energía media por partícula es

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon(\mathbf{r}, t)}{n(\mathbf{r}, t)} = \frac{3kT}{2} \left[1 + \frac{2\chi}{3\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\chi^2}}{\text{erfc}(\chi)} \right]. \quad (23)$$

El problema pide encontrar expresiones aproximadas para n y $\bar{\epsilon}$ para tiempos largos, es decir, cuando $|z|/ct = |\chi| \ll 1$. El comportamiento de la función $\text{erfc}(\chi)$ cuando el valor absoluto de su argumento es mucho menor que uno se puede obtener directamente mediante un desarrollo de Taylor:

$$\text{erfc}(\chi) = 1 - \frac{2\chi}{\sqrt{\pi}} + \dots \quad (24)$$

Entonces, recordando que $\chi = z/ct$,

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{ct} + \dots \right) n_0, \\ \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t) &= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{z}{ct} + \dots \right) kT. \end{aligned} \quad (25)$$

Es fácil entender el comportamiento de la densidad: la región $z > 0$ estaba inicialmente vacía, de forma que su densidad es siempre menor que la densidad que se alcanza en el límite $t \rightarrow \infty$; ocurre lo contrario para la región $z < 0$. Podría parecer extraño que la energía por partícula sea mayor en la región que inicialmente estaba vacía, pero la explicación es sencilla. Las primeras partículas en llegar a la región $z > 0$ son las que tienen mayor velocidad, por lo tanto, en promedio, las partículas en la región $z > 0$ tienen mayor energía que las partículas del otro lado del plano.