

Guía 2: Series y Transformadas de Fourier

P1 Series de Fourier. Para las siguientes funciones periódicas, calcular la serie de Fourier.

(a) Sea $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica, definida en $(-\pi, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & -\pi < x < -\pi/2 \text{ o } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

(a) Dibujar $f(x)$ en $(-\pi, 3\pi]$.

(b) Escribir la serie de Fourier.

(c) Determinar para qué valores del dominio la serie coincide con la función.

(b) Sea $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica, definida en $(-\pi, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ -1, & -\pi/2 \leq x < 0, \\ 0, & -\pi < x < -\pi/2 \text{ o } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Dibujar $f(x)$.

(b) Escribir la serie de Fourier.

(c) Sea $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica, definida en $(-\pi, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x \leq -\pi/2, \\ 0, & -\pi/2 \leq x < \pi/2, \\ 1, & \pi/2 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

y sea

$$f_2(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x f(t) dt.$$

(a) Calcular los coeficientes de Fourier de $f(x)$.

(b) Escribir explícitamente $f_2(x)$ y graficarla.

(c) Obtener los coeficientes de Fourier de $f_2(x)$.

(d) Analizar en qué puntos $f(x)$ y $f_2(x)$ difieren de sus respectivas series.

P2 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2, & -\pi/2 \leq x < 0, \\ 2x^2, & 0 \leq x < \pi/2, \end{cases} \quad f(x + \pi) = f(x).$$

(a) Dibujar la función.

(b) Calcular los coeficientes de Fourier en $[-\pi/2, \pi/2]$.

P3 Sean $f_1(x) = |x|$ y $f_2(x) = 3x^2$.

(a) Mostrar que para $|x| \leq \pi$:

$$f_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2},$$

$$f_2(x) = \frac{\pi^2}{2} + 12\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

(b) Usar estas expresiones para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Integrando, mostrar que para $0 \leq x < \pi$:

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3},$$

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

P4 Mostrar que en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 - 1}.$$

P5 Oscilador forzado. Considere

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t),$$

con forzante cuadrado periódico

$$f(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq t < T/2, \\ -F_0, & T/2 \leq t < T, \end{cases} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

(a) Mostrar que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4F_0}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\Omega t).$$

(b) Recordar la solución estacionaria para un forzante armónico.

(c) Usar superposición para escribir la solución estacionaria completa.

P6 Forma compleja de la serie de Fourier. Sea f una función 2π -periódica con serie de Fourier

real

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

(a) Usando $\cos(nx) = (e^{inx} + e^{-inx})/2$ y $\sin(nx) = (e^{inx} - e^{-inx})/(2i)$, muestre que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

y encuentre la relación entre c_n y (a_n, b_n) .

(b) Para f real, muestre que $c_{-n} = \overline{c_n}$.

(c) Calcule la forma compleja de la serie de Fourier del ejercicio 1(a) (el pulso rectangular) directamente en la representación exponencial, sin pasar por a_n, b_n , y verifique que coincide con el resultado ya obtenido.

(d) Interprete $|c_n|^2$ como la densidad espectral de potencia discreta, y relacione la identidad de Parseval en forma compleja

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

con la del Ejercicio 17. Esta forma es el puente natural hacia la transformada de Fourier de señales no periódicas.

P7 Transformada de Fourier. Calcular la transformada de Fourier de:

(a) $f(t) = e^{-\alpha|t|}$.

(b) Un pulso finito oscilante:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t), & |t| \leq N\pi/\omega_0, \\ 0, & |t| > N\pi/\omega_0. \end{cases}$$

(c) Un pulso triangular.

(d) Una gaussiana $f(t) = e^{-t^2/2\sigma^2}$.

P8 Delta de Dirac.

(a) Analizar distintas representaciones de $\delta(x)$.

(b) Mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(0).$$

(c) Calcular la transformada de Fourier de $\delta(t)$.

P9 Transformada de Fourier en 3D. Demostrar las propiedades de traslación, escala, gradiente y laplaciano.

P10 Convolución y Parseval.

- (a) Demostrar el teorema de la convolución.
- (b) Demostrar la relación de Parseval.
- (c) Usar Parseval para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^4 dt.$$

P11 Muestreo, aliasing y transformada de Fourier discreta. Sea $f(t)$ una señal continua con transformada de Fourier $F(\omega)$ de soporte acotado (banda limitada: $F(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_{\text{máx}}$). Se la muestrea a intervalos Δt , generando la sucesión $f_k = f(k\Delta t)$.

- (a) Muestre que muestrear $f(t)$ equivale a multiplicarla por un peine de deltas $\sum_k \delta(t - k\Delta t)$, y que la transformada de la señal muestreada es la periodización de $F(\omega)$ con período $\omega_s = 2\pi/\Delta t$.
- (b) Deduzca el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon: para reconstruir $f(t)$ sin ambigüedad a partir de sus muestras, se requiere $\omega_s > 2\omega_{\text{máx}}$.
- (c) Muestre gráficamente qué ocurre si Δt es demasiado grande (submuestreo): las réplicas de $F(\omega)$ se superponen (*aliasing*). Ilustre con una señal $f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ muestreada a $f_s < 2f_0$, y determine la frecuencia aparente (fantasma) que se observaría.
- (d) Para N muestras $\{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ de una señal periódica, se define la transformada de Fourier discreta (DFT)

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n k / N}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Muestre que la DFT es la evaluación discreta de la serie de Fourier compleja (Ejercicio 6) sobre N puntos equiespaciados, y que F_n es periódica en n con período N .

P12 FFT y filtrado de señales.

- (a) La DFT definida en el ejercicio anterior requiere, en principio, $O(N^2)$ operaciones. El algoritmo de Cooley-Tukey (FFT) explota la periodicidad de $e^{-2\pi i n k / N}$ separando la suma en índices pares e impares. Para $N = 2^m$, escriba la relación de recurrencia

$$F_n = E_n + e^{-2\pi i n / N} O_n,$$

donde E_n, O_n son las DFT de tamaño $N/2$ de las submuestras pares e impares, y muestre que el costo total satisface $T(N) = 2T(N/2) + O(N)$, de donde $T(N) = O(N \log N)$.

- (b) Un filtro lineal e invariante en el tiempo actúa multiplicando en frecuencia: $\hat{y}(\omega) = H(\omega)\hat{f}(\omega)$. Considere un filtro pasabajos ideal

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

Calcule su respuesta al impulso $h(t)$ (antitransformada de H) y muestre que decae como $\text{sinc}(\omega_c t)$: el filtro ideal no tiene soporte compacto en el tiempo.

- (c) Considere ahora el filtro pasabajos real de primer orden (RC) con $H(\omega) = 1/(1 + i\omega/\omega_c)$. Encuentre $|H(\omega)|^2$ y compare la atenuación con el filtro ideal de (b).
- (d) Dada la señal $f(t) = \sin(2\pi \cdot 5t) + \sin(2\pi \cdot 60t) + \eta(t)$ (dos tonos más ruido blanco), describa el procedimiento completo para limpiarla usando FFT: (i) calcular la FFT de f muestreada, (ii) identificar los picos espectrales, (iii) aplicar una máscara/filtro en frecuencia, (iv) antitransformar. Discuta qué artefactos introduce un filtro con transición abrupta en frecuencia (relacionar con el fenómeno de Gibbs, Ejercicio 16).

P13 Transformada de Fourier 2D y análisis de imágenes. Una imagen en escala de grises se modela como una función $u(x, y)$ (o su versión discreta u_{jk}), con transformada de Fourier 2D

$$\hat{u}(\omega_x, \omega_y) = \iint u(x, y) e^{-i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy.$$

- (a) Calcule $\hat{u}(\omega_x, \omega_y)$ para $u(x, y)$ la función indicatriz de un rectángulo de lados $2a \times 2b$ centrado en el origen, y muestre que se factoriza como producto de dos funciones sinc, una en ω_x y otra en ω_y .
- (b) Para una imagen con un patrón periódico (rayas verticales de período p), describa dónde aparecen los picos en $|\hat{u}(\omega_x, \omega_y)|^2$ (espectro de potencia 2D) y qué información sobre el patrón se puede leer directamente del espectro.
- (c) Filtrado en frecuencia: un filtro pasabajos 2D (máscara circular de radio ρ_c en el plano (ω_x, ω_y)) produce desenfoque (*blur*); un filtro pasaaltos realza bordes. Explique cualitativamente por qué, relacionando bordes/detalles finos con altas frecuencias espaciales y regiones suaves con bajas frecuencias.
- (d) Compresión tipo JPEG (idea simplificada): si se retienen solo los M coeficientes de mayor energía $|\hat{u}_{mn}|^2$ de un total de N , use la identidad de Parseval 2D para estimar el error cuadrático relativo de la reconstrucción,

$$\frac{\|u - u_M\|^2}{\|u\|^2} = \frac{\sum_{\text{descartados}} |\hat{u}_{mn}|^2}{\sum_{\text{todos}} |\hat{u}_{mn}|^2}.$$

Discuta por qué imágenes con bordes muy nítidos (alto contenido de alta frecuencia) comprimen peor que imágenes suaves.

P14 Aplicaciones a EDPs. Resolver mediante transformadas de Fourier:

- (a) Ecuación de ondas.
- (b) Ecuación del calor.
- (c) Ecuación de difusión 1D.
- (d) Ecuación de Poisson en $\mathbb{R}^3$.

P15 Extensiones par e impar. Series de medio rango. Sea $g(x) = x(\pi - x)$ definida en $[0, \pi]$.

- (a) Construir la extensión par $g_c(x)$ y la extensión impar $g_s(x)$ a $[-\pi, \pi]$. Dibujar ambas extensiones en $[-\pi, 2\pi]$.

(b) Calcular la serie de cosenos de g en $[0, \pi]$ a partir de g_c :

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad x \in [0, \pi].$$

(c) Calcular la serie de senos de g en $[0, \pi]$ a partir de g_s :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad x \in [0, \pi].$$

(d) Usando la serie de cosenos, deducir el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. Usando la serie de senos, deducir el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$ (con ayuda del resultado del Ejercicio 3).

(e) ¿En qué puntos de $[0, \pi]$ difieren entre sí la serie de cosenos, la de senos, y la función g ? Justificar usando el Teorema de Dirichlet.

P16 Fenómeno de Gibbs. Considere la función 2π -periódica definida por

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & 0 < x < \pi, \\ -1 & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

cuya serie de Fourier es

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

(a) Verificar los coeficientes calculando directamente las integrales.

(b) Llamar $S_N(x)$ a la suma parcial de los primeros N términos (hasta $n = N-1$). Mostrar que el máximo de $S_N(x)$ en $(0, \pi)$ se alcanza en $x_N = \pi/(2N)$ y vale aproximadamente

$$S_N(x_N) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du \approx 1.179.$$

Indicación: escribir $S'_N(x) = 0$ y aproximar la suma resultante por una integral de Riemann.

(c) Concluir que el sobredisparo no desaparece al aumentar N : converge al $\approx 8.9\%$ del salto. ¿Contradice esto la convergencia en L^2 ? Justificar usando la norma $\|f - S_N\|_{L^2}$.

P17 Teorema de Parseval para series de Fourier. Sea $f \in L^2(-\pi, \pi)$ con coeficientes de Fourier reales a_n , b_n , y sea c_n el coeficiente complejo con la normalización del Ejercicio 6, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$. La identidad de Parseval establece que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

(Equivalentemente, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$, que es la forma compleja usada en el

Ejercicio 6(d); el factor 2 aparece porque $|c_n|^2$ agrupa la mitad de la energía de cada modo real (a_n, b_n) entre las frecuencias $+n$ y $-n$.)

- (a) Demostrar la identidad desarrollando $\|f - S_N\|_{L^2}^2 \geq 0$ y tomando $N \rightarrow \infty$ (desigualdad de Bessel y su saturación).
- (b) Aplicar a $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$ para obtener $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Comparar con el resultado del Ejercicio 3 obtenido por otro método.)
- (c) Aplicar a $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$ para obtener $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
- (d) Mostrar que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx = \sum_{|n| > N} |c_n|^2$ (con la misma normalización de c_n usada arriba), y que esta cantidad decrece tanto más rápido cuanto más regular es f . Comparar cualitativamente la velocidad de decaimiento de $\|c_n\|$ para $f(x) = \text{sgn}(x)$ (Ejercicio P16) y $f(x) = x^2$.

P18 Principio de incertidumbre de Heisenberg. Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ normalizada ($\|f\|_{L^2} = 1$) con transformada $F(\omega)$, el principio de incertidumbre afirma que

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2},$$

donde $\Delta t^2 = \int t^2 |f(t)|^2 dt$ y $\Delta \omega^2 = \int \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega$ (dispersiones centradas en cero por simplicidad).

- (a) Verificar el principio para la gaussiana $f(t) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-t^2/4\sigma^2}$, usando la transformada calculada en el Ejercicio 7(d). Mostrar que la gaussiana *satura* la desigualdad ($\Delta t \cdot \Delta \omega = 1/2$).
- (b) Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz sobre $\langle tf, \mathcal{F}^{-1}[\omega F] \rangle$ y la relación $\mathcal{F}[f'](\omega) = -i\omega F(\omega)$, esbozar la demostración del principio de incertidumbre en el caso general.
- (c) Interpretación física: si $f(t)$ es la amplitud de una señal de radar, ¿qué implica el principio para la resolución simultánea en tiempo y frecuencia? ¿Qué ocurre cuando se acorta el pulso para mejorar la resolución temporal?

P19 Ecuación del calor en un segmento con condiciones de Dirichlet. Sea $\psi(x, t)$ la temperatura de una barra de longitud L con extremos fijos a temperatura cero:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x).$$

- (a) Proponer una solución separable $\psi(x, t) = X(x)T(t)$ y obtener los problemas de valor de contorno para X y la EDO para T . Mostrar que los valores propios son $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$

(b) Escribir la solución general como

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha^2(n\pi/L)^2 t}.$$

Determinar B_n en función de $\psi_0(x)$ usando ortogonalidad de los senos.

(c) Resolver explícitamente para:

I) $\psi_0(x) = \sin(3\pi x/L)$.

II) $\psi_0(x) = \psi_{\text{máx}} x(L-x)/L^2$ (perfil parabólico).

(d) Estimar el tiempo de relajación t^* al que la temperatura ha decaído a $1/e$ de su valor inicial. ¿Cuál es el modo dominante a tiempos largos?

(e) Comparar con la solución en dominio infinito obtenida en el Ejercicio 14 (ecuación del calor con condición inicial $\delta(x-x_0)$). ¿En qué régimen ($t \ll t^*$ ó $t \gg t^*$) esperaríamos que ambas soluciones coincidan cualitativamente?