
Guía 1: **Dinámica No Lineal**

P1 Flujos unidimensionales. Analice las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden gráficamente. Primero grafique el campo vector. Luego encuentre todos los puntos fijos, clasifique su estabilidad, y realice gráficos de la trayectoria $x(t)$ para distintas condiciones iniciales. Grafique alguna de estas trayectorias en el espacio de fases (i.e. el retrato de fases). Luego intente algunos minutos obtener la solución analítica para $x(t)$; si no resulta, no se amargue porque en varios casos es imposible resolver la ecuación en forma cerrada. Compruebe que las soluciones posibles para estos sistemas son de forma similar: o se aproximan a un valor o se alejan del mismo.

(a) $\dot{x} = ax$ (sistema lineal en 1D)

(b) $\dot{x} = 4x^2 - 16$

(c) $\dot{x} = x - x^3$

(d) $\dot{x} = 1 + 0.5 \cos(x)$

(e) $\dot{x} = e^x - \cos(x)$

(f) $\dot{x} = 1 - 2 \cos(x)$

P2 El crecimiento de los tumores cancerígenos puede ser modelado mediante la ley de Gompertz:

$$\dot{N} = -aN \ln(bN),$$

donde $N(t)$ es proporcional al número de células del tumor y $a, b > 0$ son parámetros.

(a) Interprete a y b biológicamente.

(b) Dibuje el campo vector y grafique $N(t)$ para distintas condiciones iniciales.

P3 Analizar la estabilidad lineal de los puntos fijos para:

(a) $\dot{x} = x(1 - x)$

(b) $\dot{x} = x(1 - x)(2 - x)$

(c) $\dot{x} = \tan(x)$

(d) $\dot{x} = 1 - e^{x^2}$

(e) $\dot{x} = ax - x^3$, con $a < 0$; $a = 0$; ó $a > 0$

(f) $\dot{x} = x^2(6 - x)$

P4 Puntos Fijos. Las luciérnagas proporcionan uno de los ejemplos más espectaculares de sincronización en la naturaleza. Considere para este fenómeno el modelo

$$\dot{\Theta} = \Omega, \quad \dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta),$$

donde Θ es la fase del estímulo externo, θ la fase del destello de una luciérnaga individual, y $f(\phi)$ está dada por

$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, \\ \pi - \phi, & \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2, \end{cases}$$

en el intervalo $-\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$, y se extiende periódicamente fuera de este intervalo.

- Grafique $f(\phi)$.
- Encuentre el rango de parámetros de dinámica acotada, es decir, el rango de parámetros para el cual la diferencia de fase entre el estímulo y el destello no crece indefinidamente.
- En el caso en que la dinámica no esté acotada, calcule el tiempo que tarda la diferencia de fases en incrementarse en 2π :

$$T_{\text{drift}} = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}}.$$

P5 Bifurcaciones en 1D. Esquematizar el diagrama de bifurcaciones de:

- $\dot{x} = 1 + rx + x^2$
- $\dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$
- $\dot{x} = r + x/2 - \frac{x}{1+x}$
- $\dot{x} = rx + x^2$
- $\dot{x} = rx + 4x^3$

P6 Determine el parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga qué tipo es y esquematice el diagrama de bifurcaciones para

$$\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}.$$

P7 Pitchfork imperfecta. Considere el sistema

$$\dot{x} = rx + ax^2 - x^3, \quad -\infty < a < \infty.$$

Para $a = 0$ tenemos la forma normal de la pitchfork supercrítica. Ahora queremos ver el efecto de perturbar el sistema con un término cuadrático.

- ¿Qué simetría se rompe para $a \neq 0$?
- Para cada a realice un diagrama de bifurcaciones x^* vs. r . A medida que a varía ocurren cambios cualitativos. Encuentre todos los cambios cualitativos que se pueden obtener cambiando a .

P8 Switch bioquímico. Sea $g(t)$ la concentración del producto del gen, y asuma la concentración s_0 de S como constante. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4 + g^2}, \quad k_j > 0.$$

(a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2},$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

- (b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.
- (c) Asuma que inicialmente no hay ningún producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activadora se “prende”): ¿qué pasa con $g(t)$? ¿Qué pasa si s vuelve a caer a cero? ¿El producto se apaga nuevamente?

P9 Flujos bidimensionales (2D). Sea el siguiente sistema:

$$\dot{x} = 4x - y, \quad \dot{y} = 2x + y.$$

- (a) Escribir en forma matricial.
- (b) Escribir la solución general del sistema.
- (c) Resuelva el sistema usando la condición inicial

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

P10 Sea el sistema:

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y.$$

- (a) Escribirlo matricialmente. Buscar autovalores y autovectores.
- (b) Escribir la solución general.

P11 Plano traza-determinante. Sea el sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = A(\mu)\mathbf{x}$ con

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu - 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcule la traza $\tau(\mu)$ y el determinante $\Delta(\mu)$ de A , y grafique la curva $(\tau(\mu), \Delta(\mu))$ en el plano τ - Δ a medida que μ varía en $\mathbb{R}$.
- (b) Ubique en el plano τ - Δ las regiones correspondientes a nodo estable/inestable, foco estable/inestable, silla y centro, junto con las curvas límite $\Delta = 0$ y $\tau^2 = 4\Delta$. Indique para qué valores de μ el sistema atraviesa cada frontera.
- (c) Clasifique el punto fijo del sistema para $\mu = -1, 0, 1, 3$ usando únicamente τ y Δ (sin diagonalizar A).
- (d) ¿En qué valor de μ ocurre un cambio cualitativo de estabilidad? Verifique que es consistente con los autovalores calculados directamente.

P12 Esquematizar el flujo para el siguiente sistema no lineal:

- (a) $\dot{x} = x - y; \quad \dot{y} = 1 - e^x$
- (b) $\dot{x} = x - x^3; \quad \dot{y} = -y$
- (c) $\dot{x} = x(x - y); \quad \dot{y} = y(2x - y)$
- (d) $\dot{x} = x(2 - x - y); \quad \dot{y} = x - y$
- (e) $\dot{x} = \sin(y); \quad \dot{y} = x - x^3$

P13 Ciclos límite: existencia y unicidad.

- (a) Considere el sistema en coordenadas polares

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Muestre que existe un ciclo límite, determine su radio y su estabilidad, y grafique el retrato de fases.

- (b) Use el teorema de Poincaré–Bendixson para mostrar que el sistema

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2)$$

tiene al menos un ciclo límite, construyendo una región trampa (anillo) apropiada sin resolver el sistema explícitamente.

- (c) Enuncie el criterio de Bendixson–Dulac y utilícelo para descartar la existencia de ciclos límite en el sistema

$$\dot{x} = -x + 4y, \quad \dot{y} = -x - y^3$$

en todo $\mathbb{R}^2$.

P14 Oscilador de relajación (van der Pol fuertemente no lineal). Considere la ecuación de van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

en el límite $\mu \gg 1$ (fuertemente no lineal), escrita en variables de Liénard:

$$\dot{x} = \mu \left(y - \frac{x^3}{3} + x \right), \quad \dot{y} = -\frac{x}{\mu}.$$

- (a) Reescriba el sistema usando el tiempo lento $\tau = t/\mu$ y muestre que, a orden dominante, la dinámica sigue la nulclina $y = x^3/3 - x$ excepto en tramos rápidos donde la trayectoria salta entre las dos ramas estables de la nulclina.
- (b) Dibuje esquemáticamente el ciclo límite resultante en el plano (x, y) , distinguiendo los tramos lentos (sobre la nulclina) de los saltos rápidos.
- (c) Muestre que, a orden dominante en μ , el período del oscilador de relajación es

$$T \approx (3 - 2 \ln 2) \mu.$$

- (d) Compare numéricamente este resultado con la integración directa del sistema para $\mu = 10$ y $\mu = 50$.

P15 Bifurcaciones en 2D. Gusanos vs. Bosque. En presencia de una población constante de gusanos B , la dinámica del bosque está dada por:

$$\dot{S} = r_S S \left(1 - \frac{S}{K_S} \frac{K_E}{E} \right), \quad \dot{E} = r_E E \left(1 - \frac{E}{K_E} \right) - \frac{PB}{S}.$$

- (a) Interprete las ecuaciones.
- (b) Adimensionalice.
- (c) Dibuje las nulclinas, y analice las bifurcaciones.
- (d) Dibuje el retrato de fases para B grande y para B chico.

P16 Bifurcación de Hopf. Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen tiene una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$ y, mediante simulaciones numéricas, verifique si es subcrítica o supercrítica.

- (a) $\dot{x} = \mu x + y; \quad \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$
- (b) $\dot{x} = \mu x + y - x^3; \quad \dot{y} = -x + \mu y + 2y^3$

P17 Este sistema se conoce como el del “predador-presa”:

$$\dot{x} = x \left(b - x - \frac{y}{1+x} \right), \quad \dot{y} = y \left(\frac{x}{1+x} - ay \right).$$

- (a) Dibuje las nulclinas.
- (b) Analice las bifurcaciones, y muestre que hay una bifurcación de Hopf.

P18 Bifurcación silla-nodo de período infinito: SNIPER (Saddle-Node Infinite PERiod).

Considere el oscilador no uniforme en el círculo

$$\dot{\theta} = \mu - \sin \theta.$$

- (a) Encuentre los puntos fijos para $\mu < 1$ y muestre que desaparecen en $\mu = 1$ mediante una bifurcación silla-nodo.
- (b) Para $\mu > 1$ no hay puntos fijos: muestre que $\theta(t)$ recorre el círculo periódicamente, y que el período diverge al acercarse a $\mu = 1^+$ según

$$T \sim (\mu - 1)^{-1/2}.$$

P19 Caos. Sistema de Lorenz. Sea el conjunto de ecuaciones:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X), \quad \frac{dY}{dt} = rX - Y - XZ, \quad \frac{dZ}{dt} = XY - bZ.$$

- (a) Mostrar que el sistema es invariante ante la simetría $X \rightarrow -X, Y \rightarrow -Y, Z \rightarrow Z$.
- (b) Calcular los puntos fijos del sistema y su estabilidad.
- (c) Simular para $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$.

P20 Contracción de volumen en el sistema de Lorenz. Considere el sistema de Lorenz con $\sigma, r, b > 0$.

- (a) Calcule la divergencia del campo vectorial $\mathbf{f} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$. Muestre que

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + 1 + b).$$

¿Qué implica esto para el volumen de cualquier región del espacio de fases que evoluciona bajo el flujo?

- (b) Sea $V(t)$ el volumen de un dominio arbitrario $\mathcal{D}(t)$ transportado por el flujo. A partir del Teorema de Liouville generalizado,

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_{\mathcal{D}(t)} (\nabla \cdot \mathbf{f}) dX dY dZ,$$

obtenga una expresión cerrada para $V(t)$ en términos de $V(0)$, σ , b y t . Verifique que el sistema es *dissipativo* (i.e., el volumen se contrae exponencialmente).

- (c) Con $\sigma = 10$, $b = 8/3$, calcule la tasa de contracción volumétrica y el tiempo característico $\tau = 1/|\nabla \cdot \mathbf{f}|$ en que el volumen se reduce en un factor e^{-1} .
- (d) Encuentre todos los puntos fijos del sistema de Lorenz para $r > 0$ arbitrario. Muestre que para $r < 1$ el origen es el único punto fijo, y que para $r > 1$ aparecen dos puntos fijos adicionales $C^\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.
- (e) Linealice el sistema en el origen y obtenga los autovalores de la matriz jacobiana. Muestre que el origen pierde estabilidad en $r = 1$ a través de una bifurcación de horquilla (*pitchfork*).

P21 Horizonte de predicción y exponentes de Lyapunov. Considere dos trayectorias del sistema de Lorenz con condiciones iniciales $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_0 + \delta_0$, con $\|\delta_0\| = \delta_0 \ll 1$.

- (a) En la región caótica, la separación entre trayectorias crece aproximadamente como

$$\delta(t) \approx \delta_0 e^{\lambda_1 t},$$

donde $\lambda_1 > 0$ es el exponente de Lyapunov maximal. Defina con precisión el exponente de Lyapunov λ_1 como un límite en el tiempo y como un límite en el tamaño de la perturbación inicial.

- (b) Suponga que la perturbación inicial es de tamaño δ_0 y que la predicción se considera inútil cuando $\delta(t)$ alcanza una escala macroscópica Δ . Muestre que el horizonte de predicción es

$$t_{\text{horiz}} = \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{\Delta}{\delta_0}\right).$$

- (c) Para el sistema de Lorenz con parámetros estándar ($r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$) el exponente de Lyapunov maximal es $\lambda_1 \approx 0,9 \text{ s}^{-1}$.

- (i) Estime t_{horiz} si la incertidumbre inicial es $\delta_0 = 10^{-6}$ (precisión de un buen instrumento) y la escala macroscópica es $\Delta = 1$.

(II) ¿Cuánto mejora el horizonte de predicción si se reduce δ_0 por un factor de 10^3 ? Interprete el resultado: ¿tiene sentido invertir en instrumentos de medición arbitrariamente precisos?

- (d) Para un flujo continuo en $\mathbb{R}^3$, el espectro de Lyapunov tiene tres exponentes $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Use el resultado del problema anterior para mostrar que, en el atractor de Lorenz,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma + 1 + b).$$

Sabiendo que $\lambda_1 \approx 0,9$ y $\lambda_2 = 0$ (dirección tangente a la trayectoria), calcule λ_3 para los valores estándar. Verifique que $|\lambda_3| \gg \lambda_1$: la contracción fuerte domina la expansión débil.

P22 Caos en el oscilador de Duffing forzado. Considere el oscilador de Duffing amortiguado y forzado periódicamente:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t),$$

con $\delta = 0,3$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\omega = 1,2$.

- Escriba el sistema autónomo equivalente en $\mathbb{R}^3$ agregando la fase del forzado $\phi = \omega t$ como tercera variable.
- Integre numéricamente para $\gamma = 0,20$ y $\gamma = 0,65$, y grafique las series temporales $x(t)$ y las trayectorias en el espacio $(x, \dot{x})$.
- Construya la sección de Poincaré estroboscópica (muestreando cada período $T = 2\pi/\omega$ del forzado) para ambos valores de γ . Identifique cuál corresponde a un régimen periódico y cuál a un régimen caótico.
- Variando γ en el rango $[0,2, 0,65]$, construya un diagrama de bifurcación graficando x en la sección de Poincaré vs. γ . Identifique al menos una cascada de duplicación de período que precede a la aparición de caos.