PRÁCTICA 3: DETERMINACIÓN DE G.

Verano 2025
07/02

Adaptada de presentaciones de Mónica Agüero, Maia Brodiano, Verónica Pérez Schuster, Federico Trupp, Nico Torasso, Santiago Boari y otros/as docentes del DF-Exactas UBA

¿Qué es lo que vamos a hacer hoy?

¿Qué es lo que vamos a hacer hoy?

- Calcular la aceleración de la gravedad local.

¿Qué es lo que vamos a hacer hoy?

- Calcular la aceleración de la gravedad local.
  - Parte 1: A partir del movimiento de un péndulo simple.

¿Qué es lo que vamos a hacer hoy?

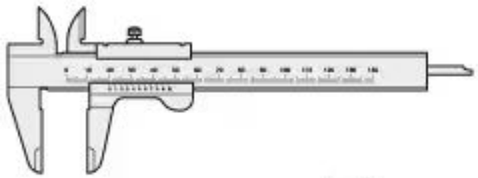
- Calcular la aceleración de la gravedad local.

    - Parte 1: A partir del movimiento de un péndulo simple.

    - Objetivo pedagógico:
        - Proceso de medición digital
        - Ajuste lineal por cuadrados mínimos.

Instrumentos de medición

Analógico



Brinda una señal continua de la magnitud tal cual llega, mediante agujas o numeración mecánica.

Instrumentos de medición

Digital

Brinda una señal discreta de la magnitud física, requiriendo un proceso de conversión previo.

Sensor de posición

Sensor de fuerza

Multímetro

Balanza

Sistemas de adquisición de datos

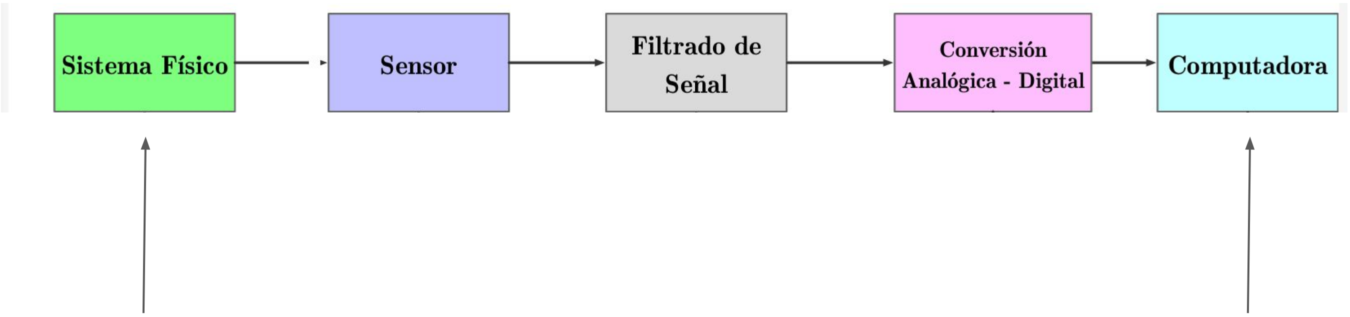
- **Obtener mediciones de variables o fenómenos físicos de interés.**

Los sistemas de adquisición de datos típicamente convierten la medición de una señal analógica a un lenguaje digital para su almacenamiento y procesamiento con la computadora.

Sistemas de adquisición de datos

- **Obtener mediciones de variables o fenómenos físicos de interés.**

Los sistemas de adquisición de datos típicamente convierten la medición de una señal analógica a un lenguaje digital para su almacenamiento y procesamiento con la computadora.



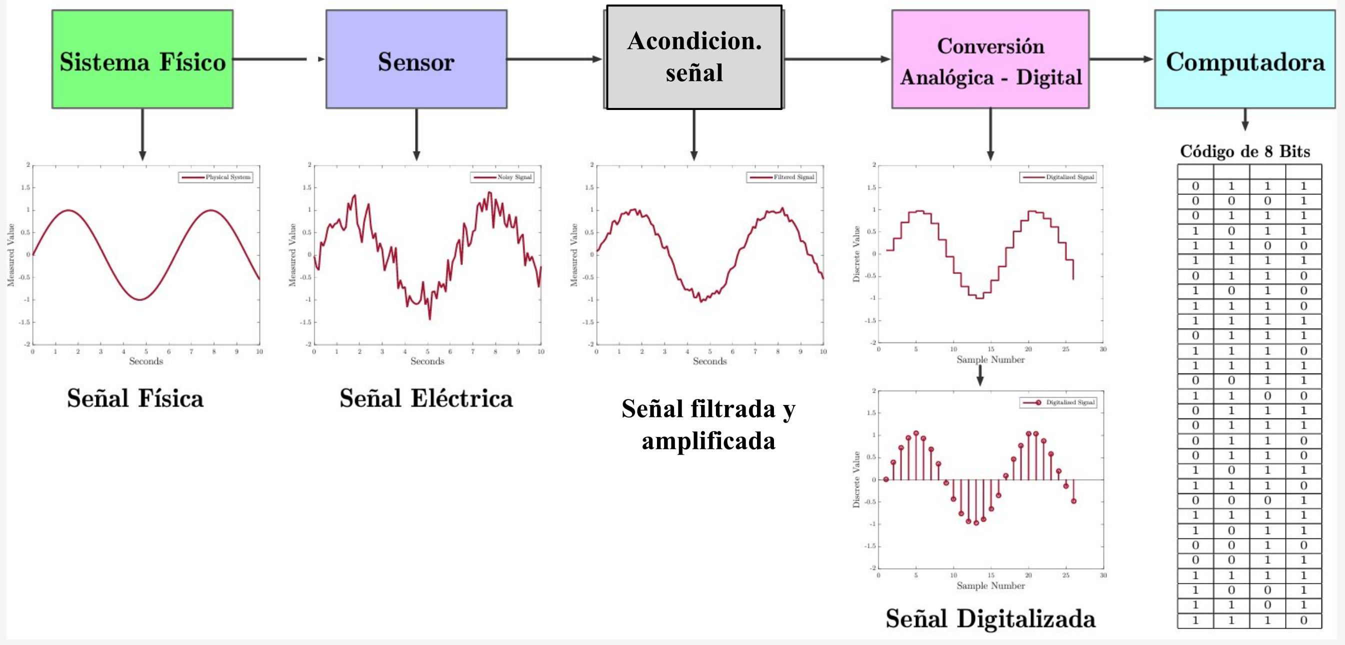
Sistemas de adquisición de datos

- **Obtener mediciones de variables o fenómenos físicos de interés.**

Los sistemas de adquisición de datos típicamente convierten la medición de una señal analógica a un lenguaje digital para su almacenamiento y procesamiento con la computadora.

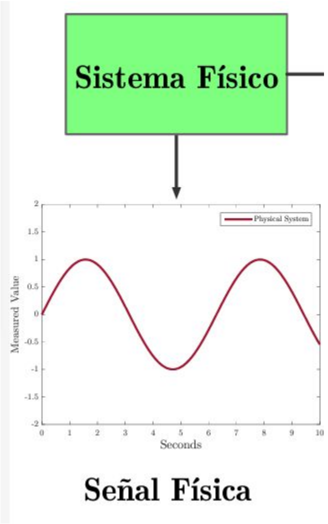
De esta forma podemos automatizar parte del proceso de medición y realizar los análisis correspondientes

Sistema digital de adquisición de datos ¿Qué es?



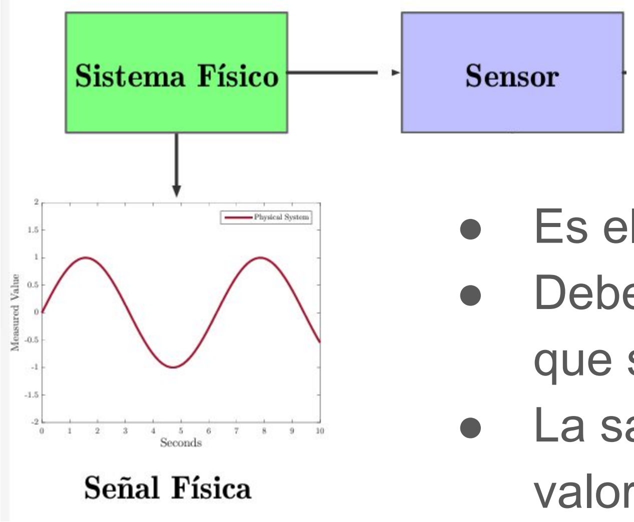
fuente: Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Adquisici%C3%B3n_de_datos)

DAQ paso a paso: variable



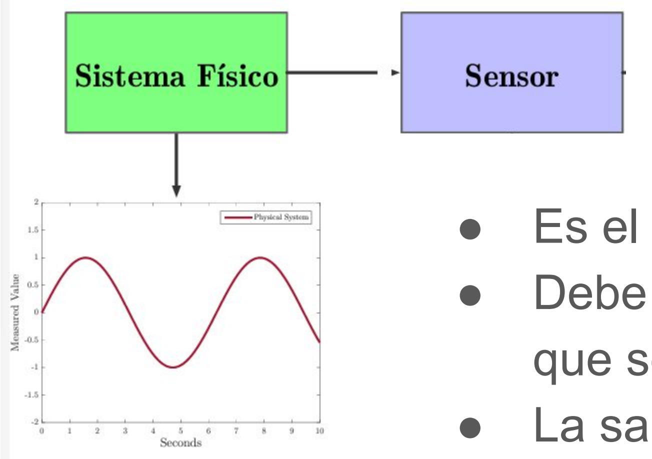
- Objetivo: obtener mediciones de variables o fenómenos físicos de interés
- Es la variable que queremos medir

DAQ paso a paso: sensor



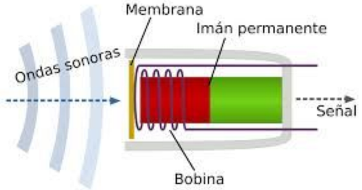
- Es el instrumento de medición
- Debe tener alguna propiedad sensible a la magnitud que se desea medir (entrada)
- La salida del sensor es una señal eléctrica cuyos valores están relacionados con la magnitud física que se quiere medir.

DAQ paso a paso: sensor

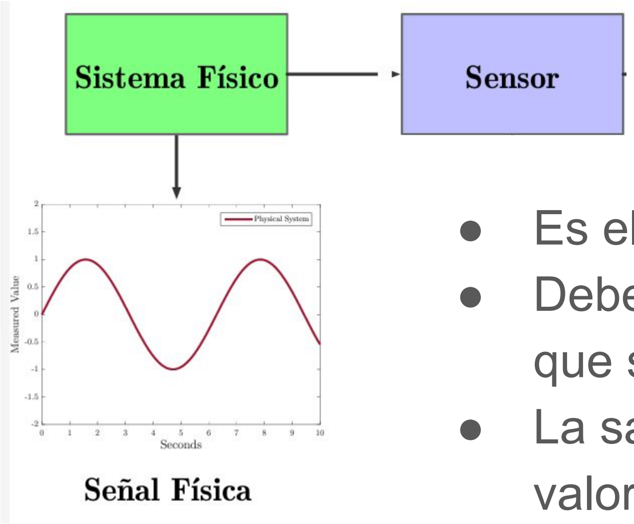


Señal Física

- Es el instrumento de medición
- Debe tener alguna propiedad sensible a la magnitud que se desea medir (entrada)
- La salida del sensor es una señal eléctrica cuyos valores están relacionados con la magnitud física que se quiere medir.

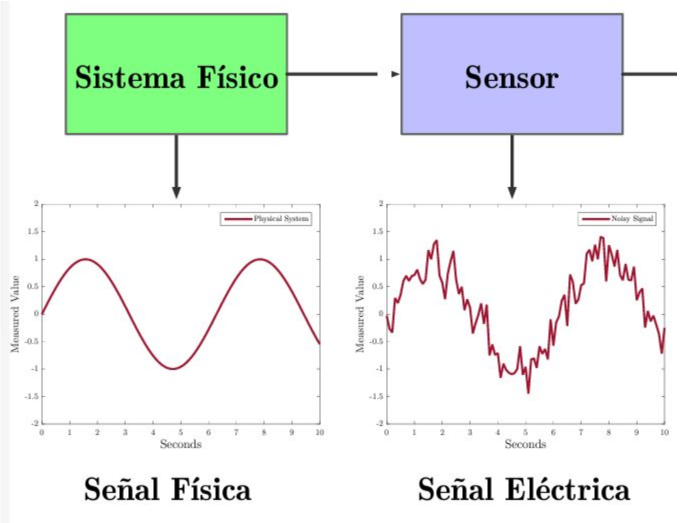


DAQ paso a paso: sensor

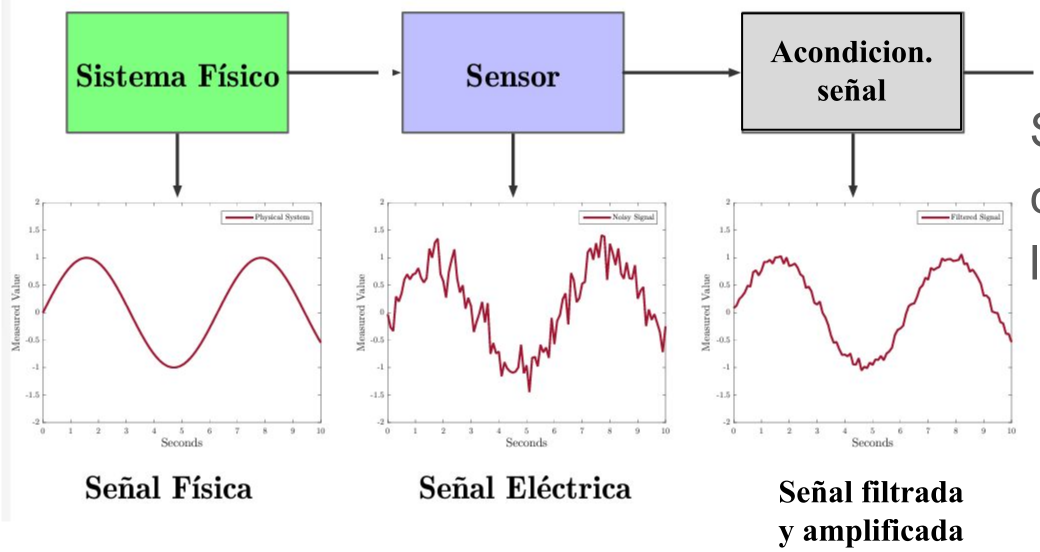


- Es el instrumento de medición
- Debe tener alguna propiedad sensible a la magnitud que se desea medir (entrada)
- La salida del sensor es una señal eléctrica cuyos valores están relacionados con la magnitud física que se quiere medir.

DAQ paso a paso: sensor



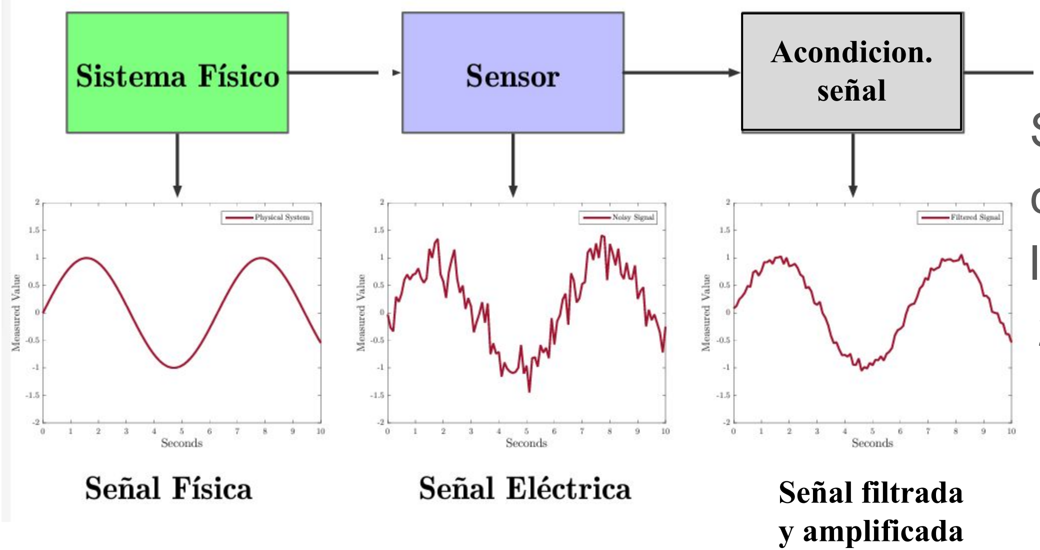
DAQ paso a paso: Acondicionamiento de señal



Se manipula la señal del sensor para convertirla en una más adecuada para la adquisición de datos.

1. <u>Amplificación</u> Se amplifican señales de baja amplitud para mejorar su resolución y disminuir el ruido. El máximo de la señal de entrada debe coincidir con la máxima tensión que el convertidor pueda leer.

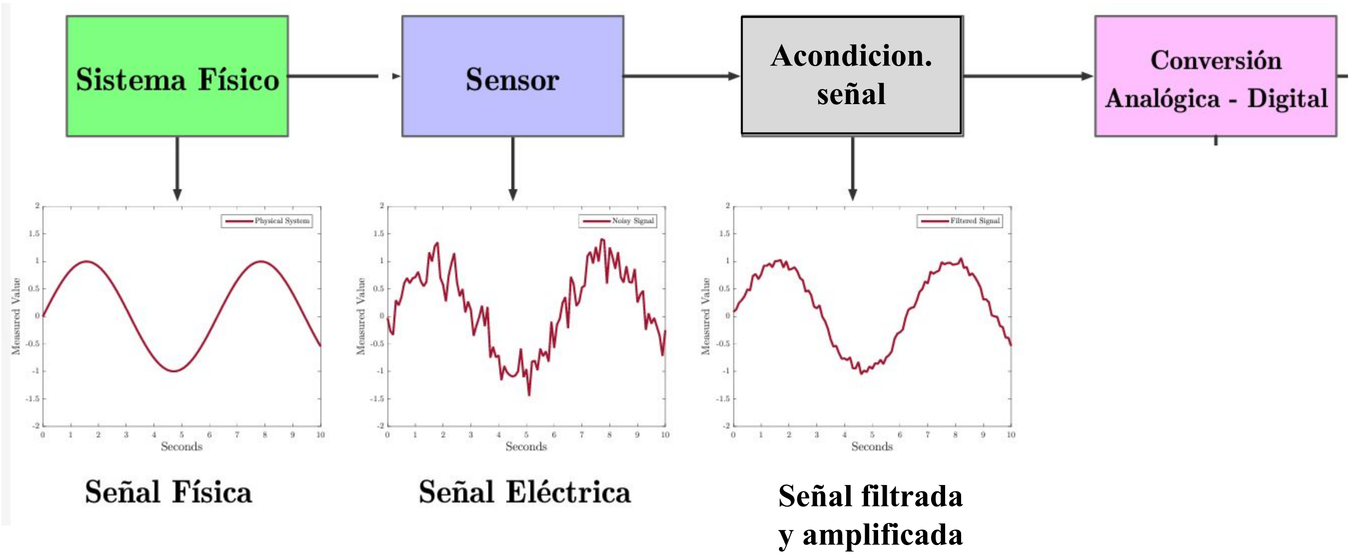
DAQ paso a paso: Acondicionamiento de señal



Se manipula la señal del sensor para convertirla en una más adecuada para la adquisición de datos.

2. Filtrado Elimina las señales no deseadas (ruido) de la señal que estamos observando. Para eso se elimina la banda de frecuencia en las que se encuentran esas interferencias o ruidos.

DAQ paso a paso: Conversión A/D



Mundo digital

La información se guarda en bits (Estado binario 1 o 0).

La cantidad de bits determina la cantidad de valores discretos que puedo representar

Bit	Valores
1 bit	2 valores
2 bits	4 valores
3 bits	8 valores
4 bits	16 valores
5 bits	32 valores
6 bits	64 valores
8 bits	256 valores
10 bits	1.024 valores
12 bits	4.096 valores
16 bits	65.536 valores
24 bits	16,7 millones de valores
32 bits	4.294 millones de valores
64 bits	18 trillones de valores

n bits $\Longrightarrow$ 2^n números

Señal digitalizada

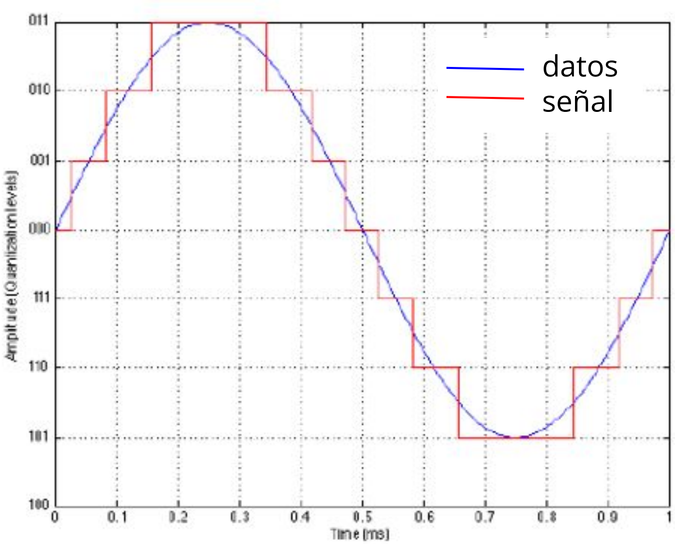
La señal analógica se la discretiza tanto en la magnitud de medición como en el tiempo, y se la pasa a formato digital.

Los datos se transfieren a una computadora p
Para eso se usa un dispositivo que cumpla el r

Señal digitalizada

La cantidad de bits del conversor, determina la resolución de la señal.

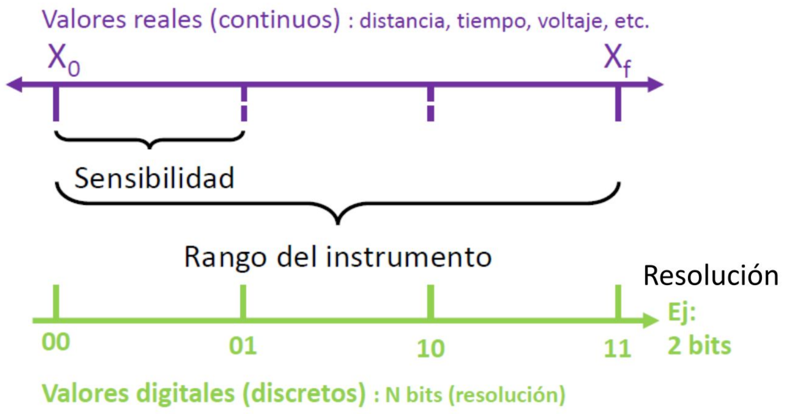
La frecuencia de muestreo determina la resolución temporal de la digitalización.



Señal digitalizada

La cantidad de bits del conversor, determina la resolución de la señal.

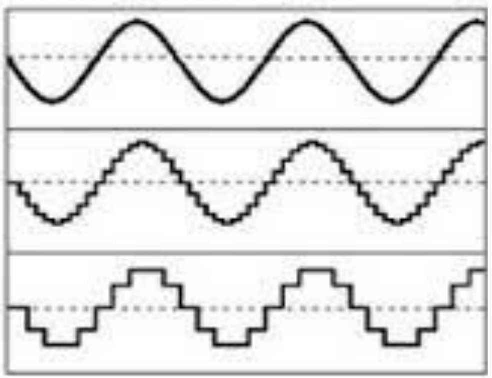
$$\text{Sensibilidad} = \frac{\text{Rango}}{2^{n}} = \frac{\text{Rango}}{2^{\#bits}}$$



$$\text{Sensibilidad} = \frac{\text{Rango}}{2^n}$$

Señal digitalizada

La cantidad de bits del conversor, determina la resolución de la señal.

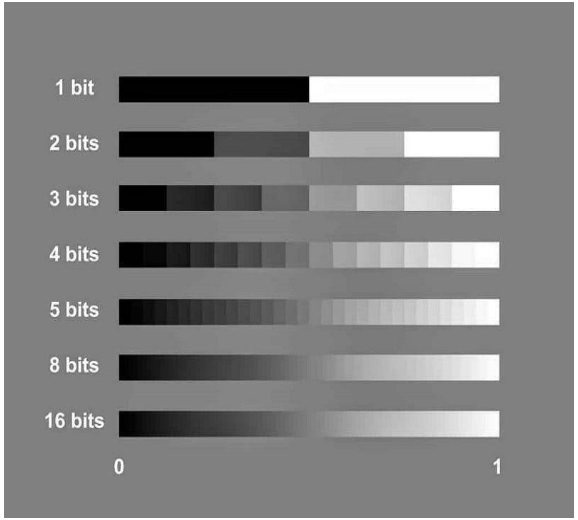


señal de sonido

medida con 16 bits

medida con 8 bits

https://magroove.com/blog/es-mx/profundidad-de-bits/



https://www.crehana.com/blog/estilo-vida/que-es-mapa-bits/

Señal digitalizada

La frecuencia de muestreo determina la resolución temporal de la digitalización.

Existe una discretización horizontal de la señal, es decir en el tiempo.

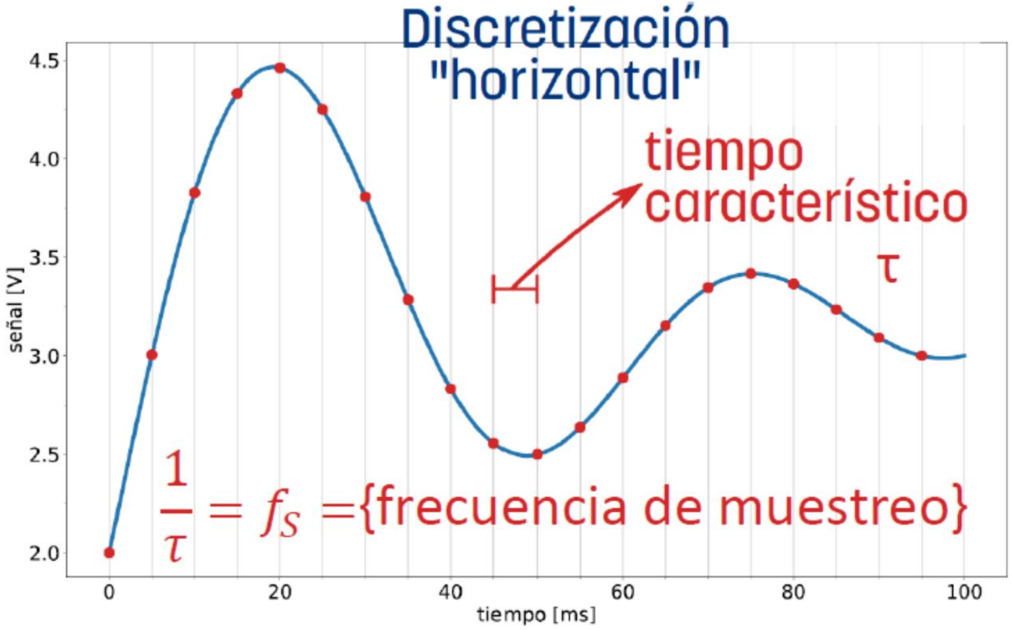
El parámetro que determina la discretización se denomina frecuencia de muestreo (f_s): "Cuántos datos adquiero en 1 segundo".

Cuanto más alta la frecuencia de muestreo, mayor resolución temporal, pero a la vez más datos que adquirir y almacenar. El tiempo entre dos datos consecutivos se denomina tiempo o período de muestreo (τ), y también es una medida de la resolución temporal.

$$\tau_s = \frac{1}{f_s}$$

Señal digitalizada

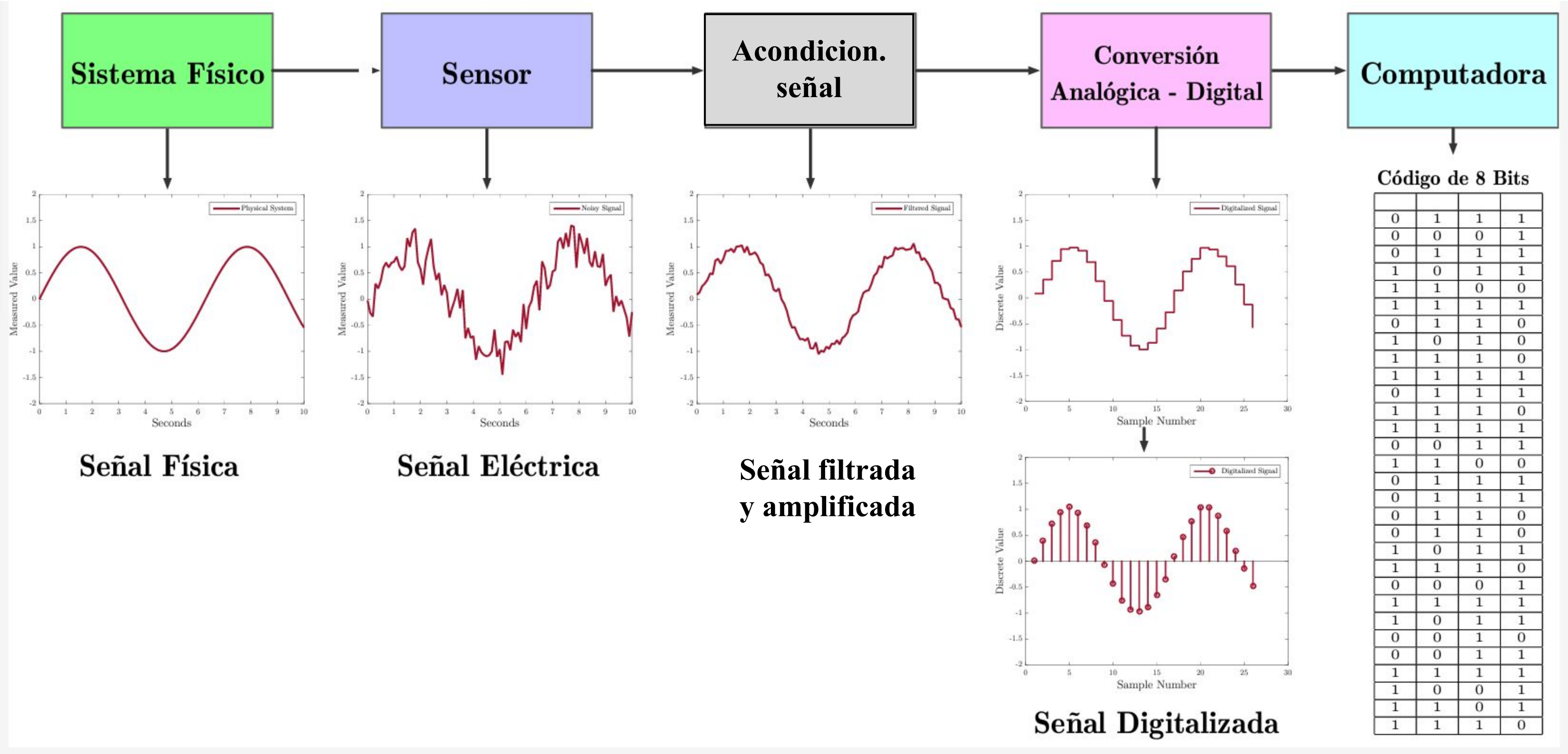
La frecuencia de muestreo determina la resolución temporal de la digitalización.



Señal digitalizada

La frecuencia de muestreo determina la resolución temporal de la digitalización.

DAQ paso a paso: Conversión A/D



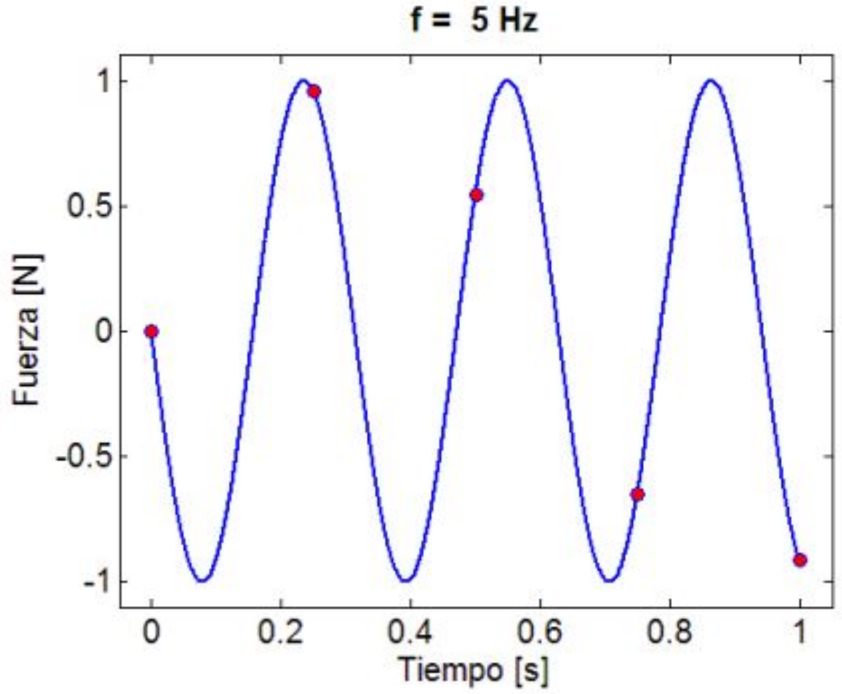
0	1	1	1
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	1	1
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	0
0	0	0	1
1	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Conversor A/D en el laboratorio

- Resolución: 13 bits
- Frecuencia de muestreo máxima 48000Hz
- 3 canales analógicos, 1 digital

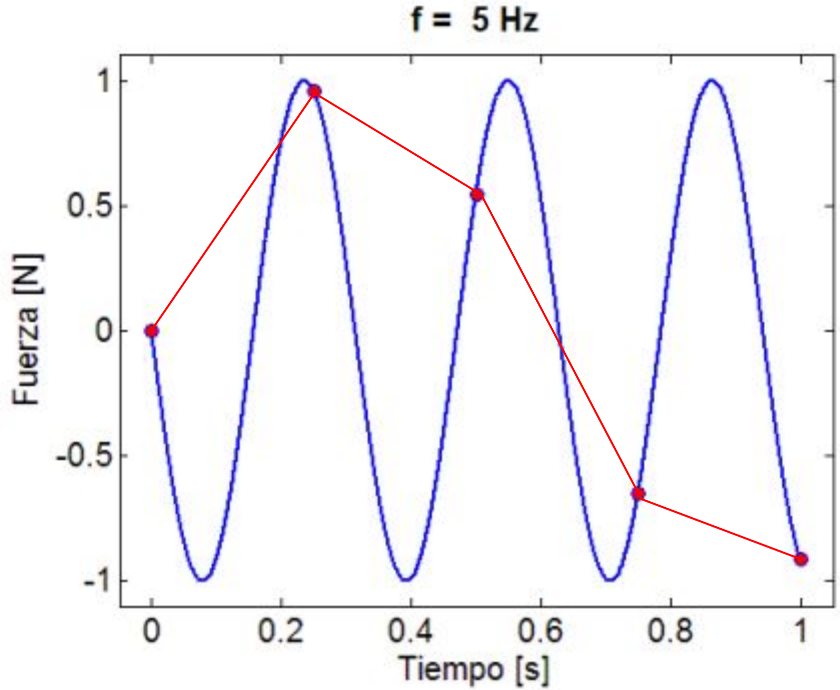
¿A qué le tenemos que prestar atención?

Frecuencia de muestreo y resolución temporal



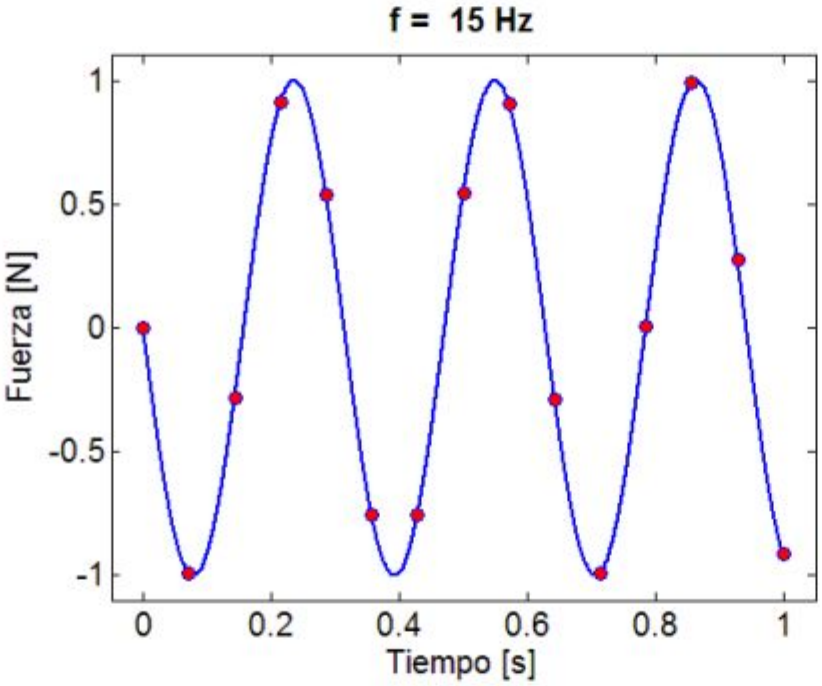
http://materias.df.uba.ar/labo1Aa2015c2/files/2015/09/Digitalizacion.pdf

Frecuencia de muestreo y resolución temporal

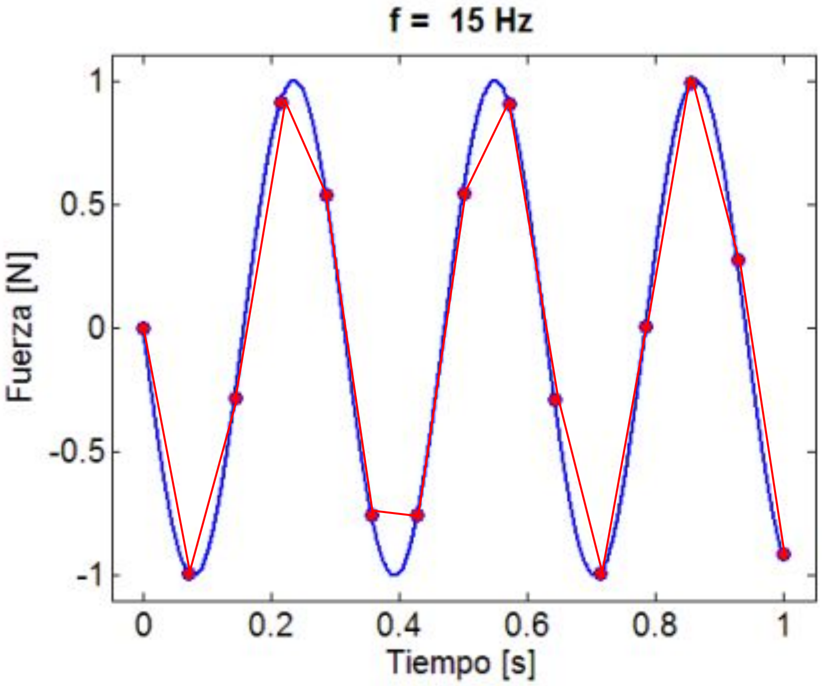


http://materias.df.uba.ar/labo1Aa2015c2/files/2015/09/Digitalizacion.pdf

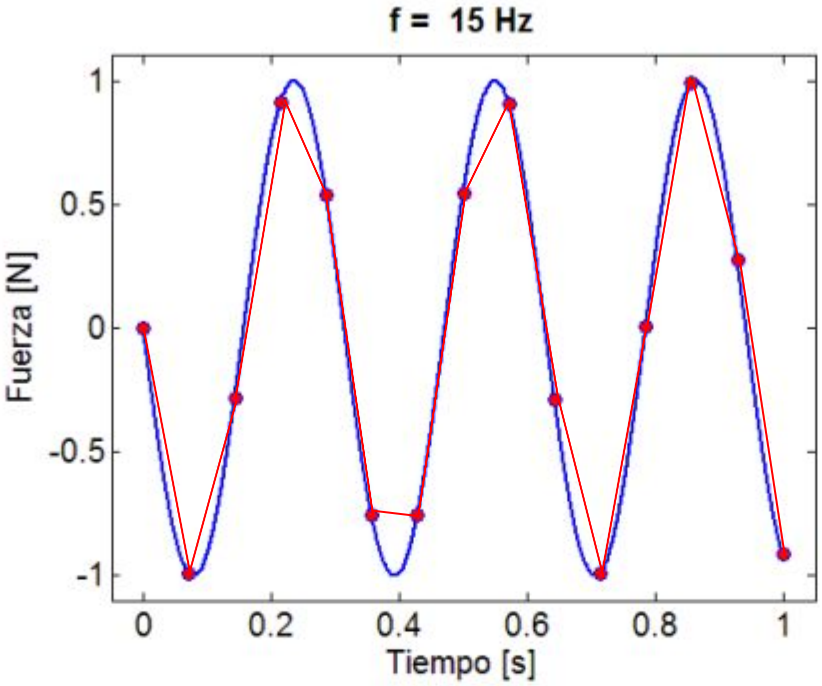
Frecuencia de muestreo y resolución temporal

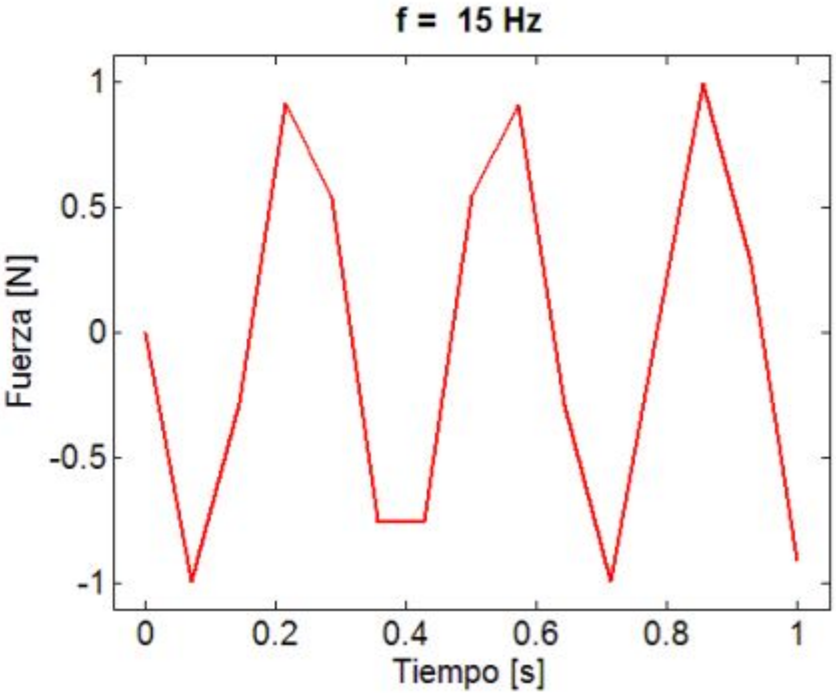


Frecuencia de muestreo y resolución temporal

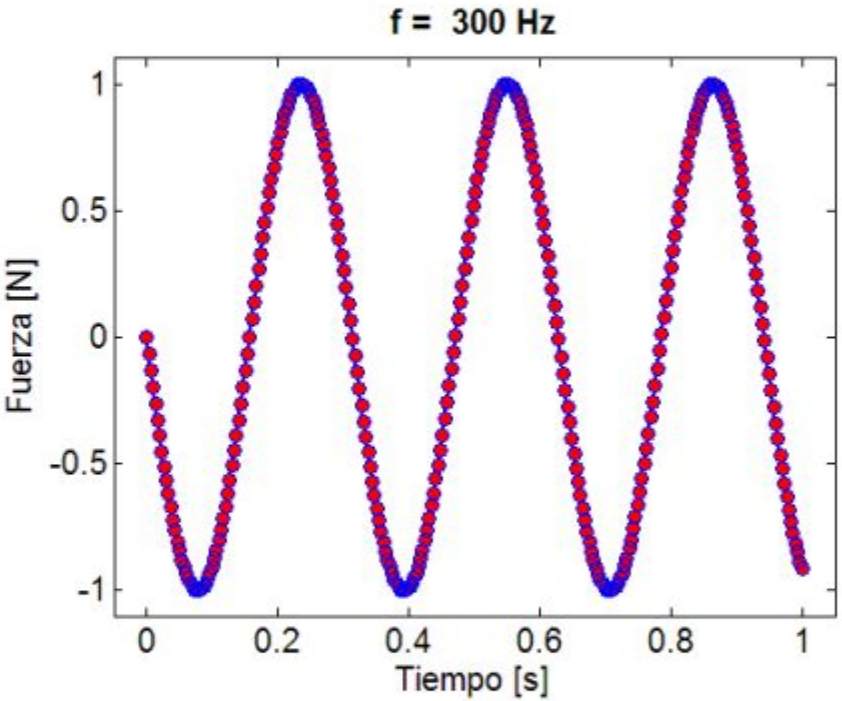


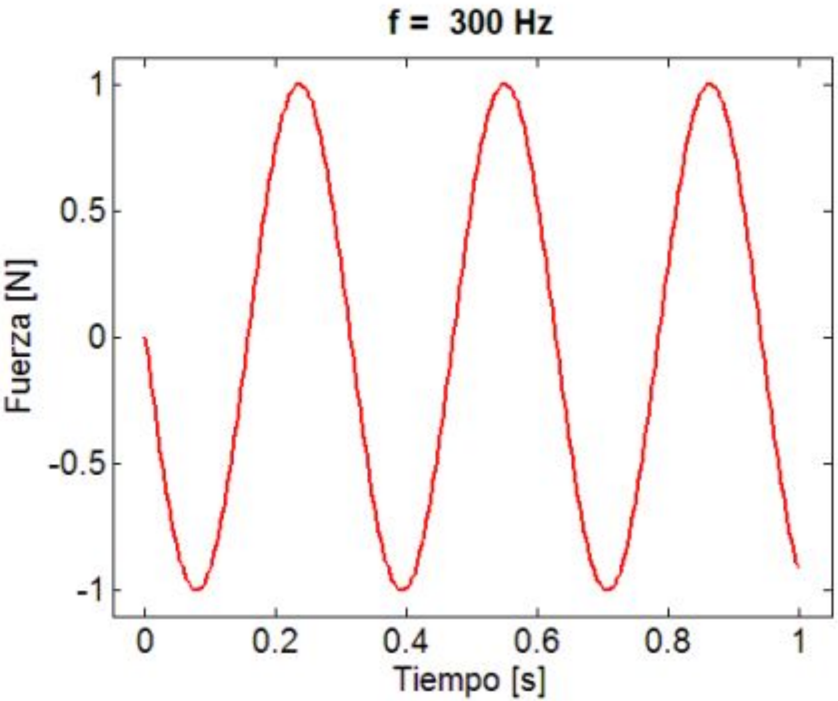
Frecuencia de muestreo y resolución temporal



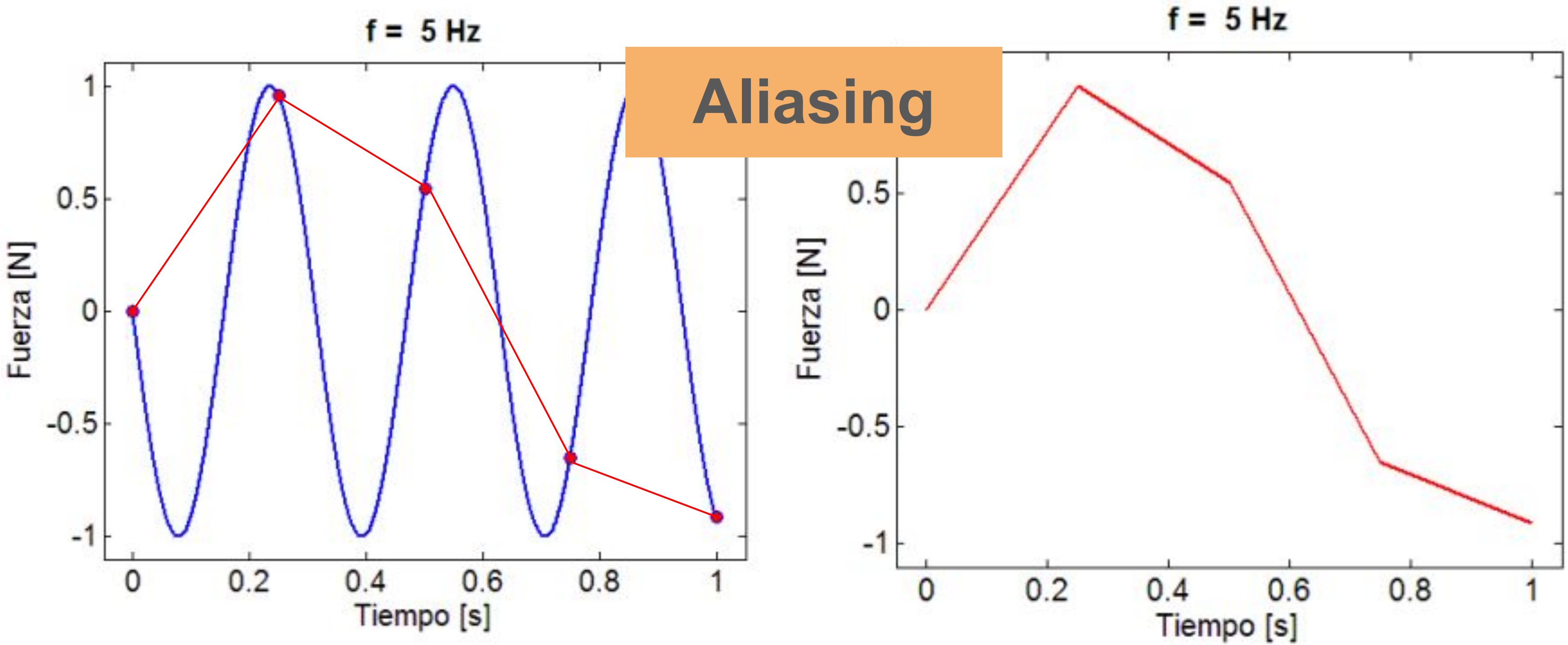


Frecuencia de muestreo y resolución temporal





Frecuencia de muestreo y resolución temporal



http://materias.df.uba.ar/labo1Aa2015c2/files/2015/09/Digitalizacion.pdf

Frecuencia de muestreo y resolución temporal

Teorema de Nyquist

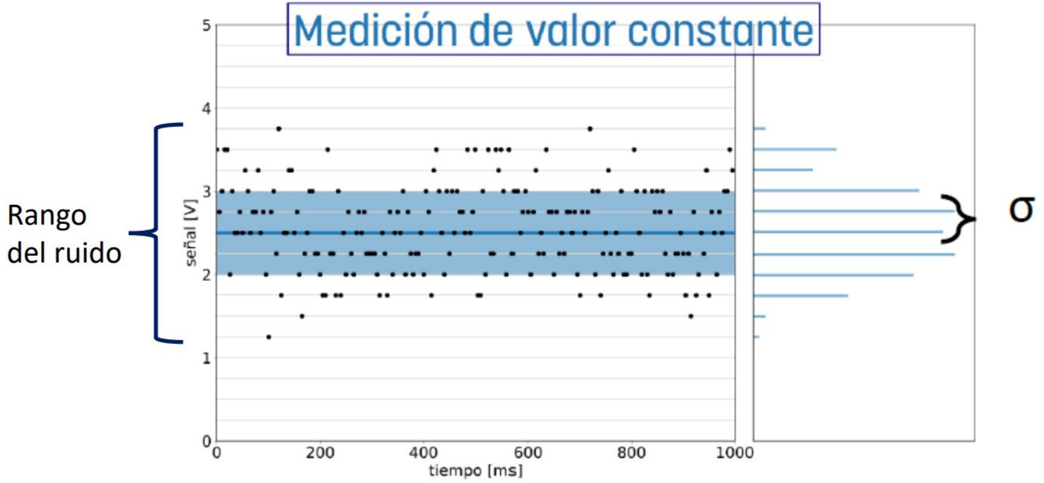
Para digitalizar una señal analógica la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia más alta de la señal.

$$f_s \geq 2f_{max}$$

Incertezas

Ruido

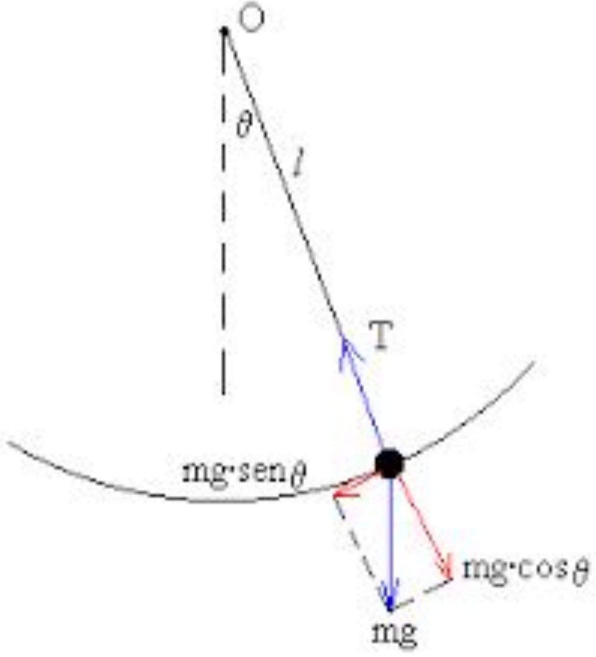
La incerteza no siempre está determinada por la sensibilidad unívocamente



¿Qué es lo que vamos a hacer hoy?

- Calcular la aceleración de la gravedad local.
    - Parte 1: A partir del movimiento de un péndulo simple.
    - Objetivo pedagógico:
        - Proceso de medición digital
        - Ajuste lineal por cuadrados mínimos.

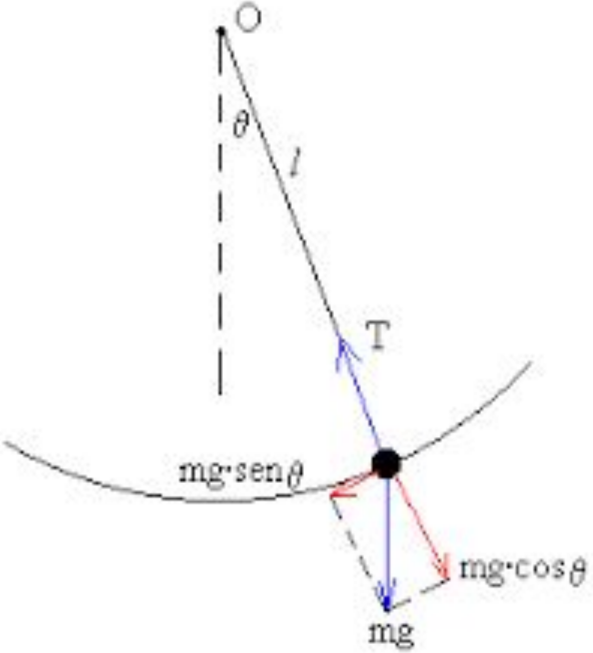
El péndulo



Movimiento de péndulo bajo hipótesis:

- Pequeñas oscilaciones
- hilo inextensible y de masa despreciable
- movimiento en el plano

Un poco de física

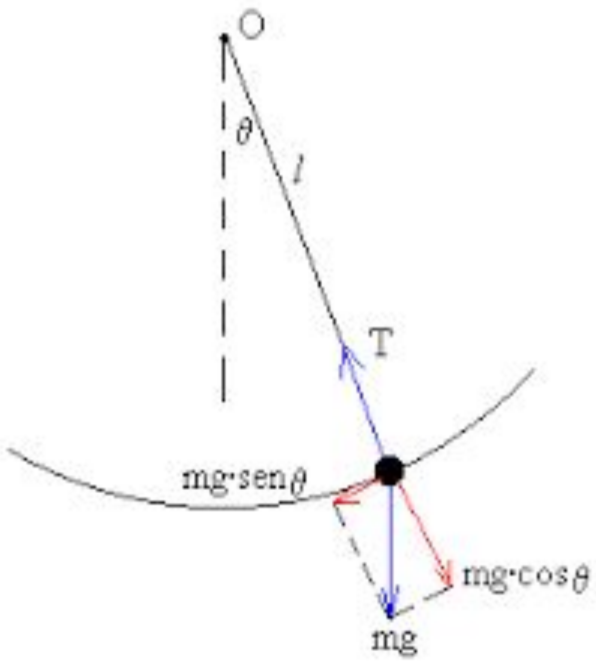


Movimiento de péndulo bajo hipótesis:

- Pequeñas oscilaciones
- hilo inextensible y de masa despreciable
- movimiento en el plano

$$\boxed{\tau = 2\pi \sqrt[2]{\frac{L}{g}}}$$

Un poco de física



Variando el largo, obtenemos distintos periodos y podemos obtener g

$$\boxed{\tau = 2\pi\sqrt[2]{\frac{L}{g}}}$$

Trabajo en clase

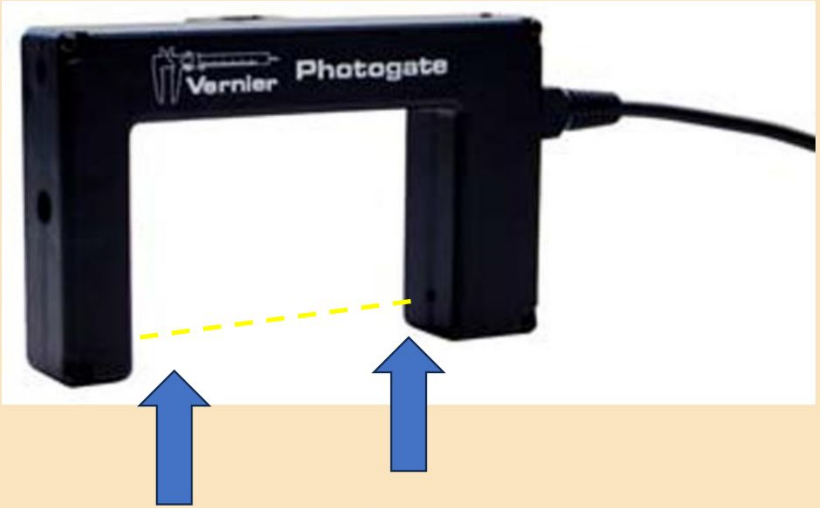
Sensores utilizados en Labo 1

Photogate

- Determina si algo está obstruyendo o no el camino del sensor.

- **Cómo funciona**: emite un pulso infrarrojo y del otro lado tiene un detector de IR. Si lo detecta emite una señal continua cercana a los 5V, si no lo detecta porque se obstruye el paso del haz, la tensión baja a un valor cercano a cero.

- Su señal de salida es **analógica.**

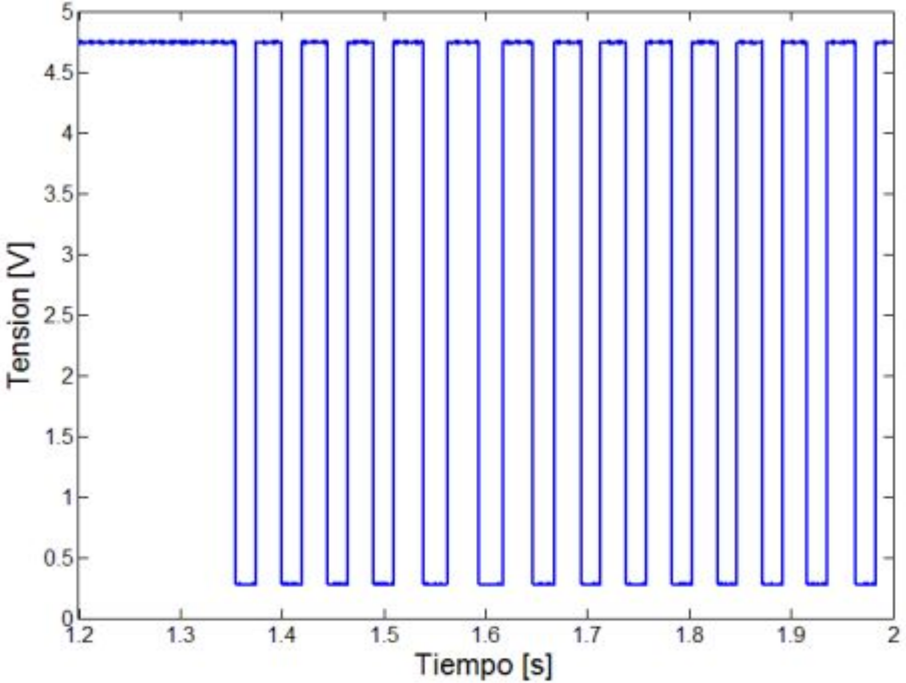


Salida del haz y detector IR

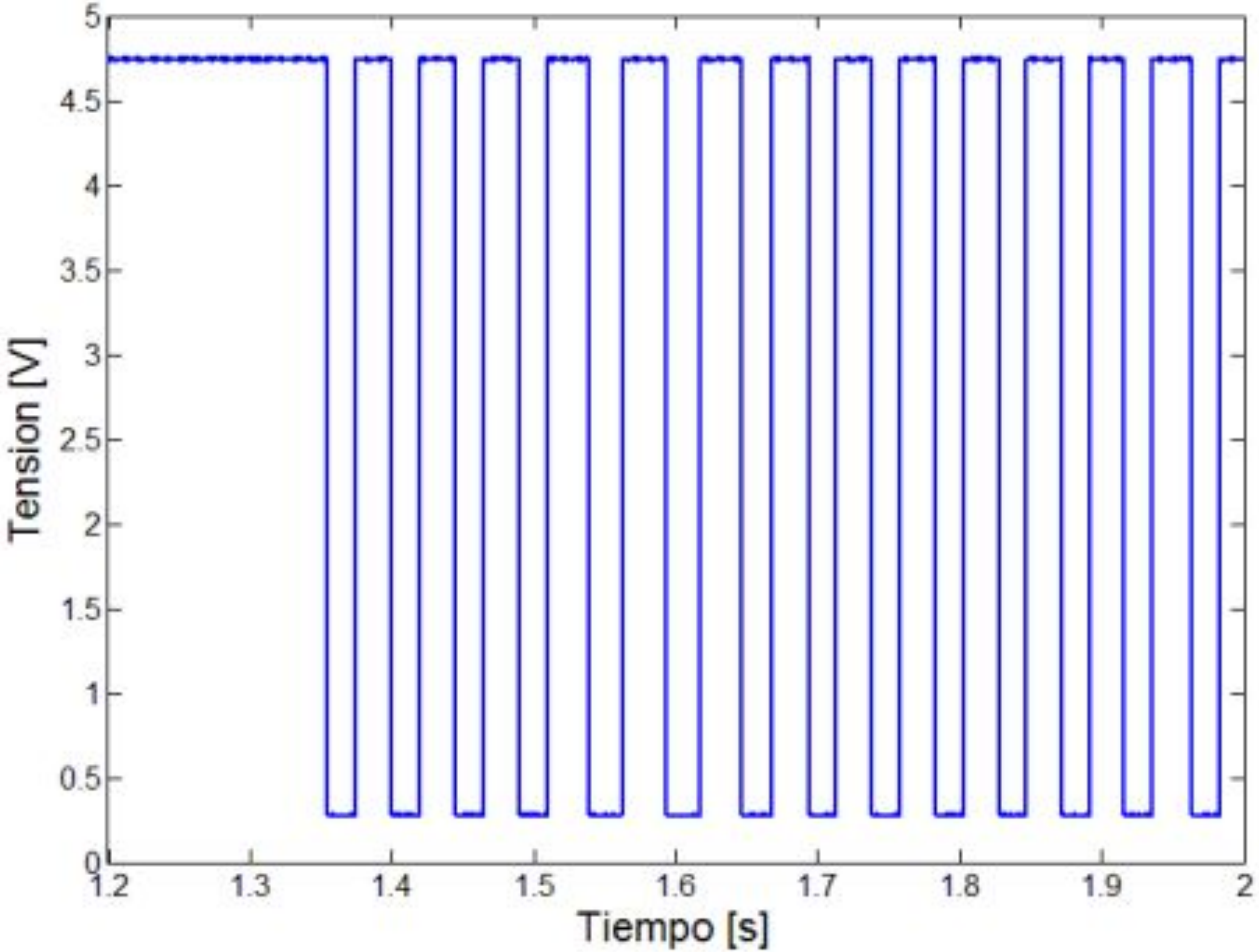
- Obtenemos entonces señales en forma de escalón, según si está obturado o no. La idea es no obtener puntos intermedios, y para eso hay que asegurarse de que la frecuencia de muestreo sea tal que nunca vemos lo momentos de semi-obturación del haz

Adquisición de datos de la clase

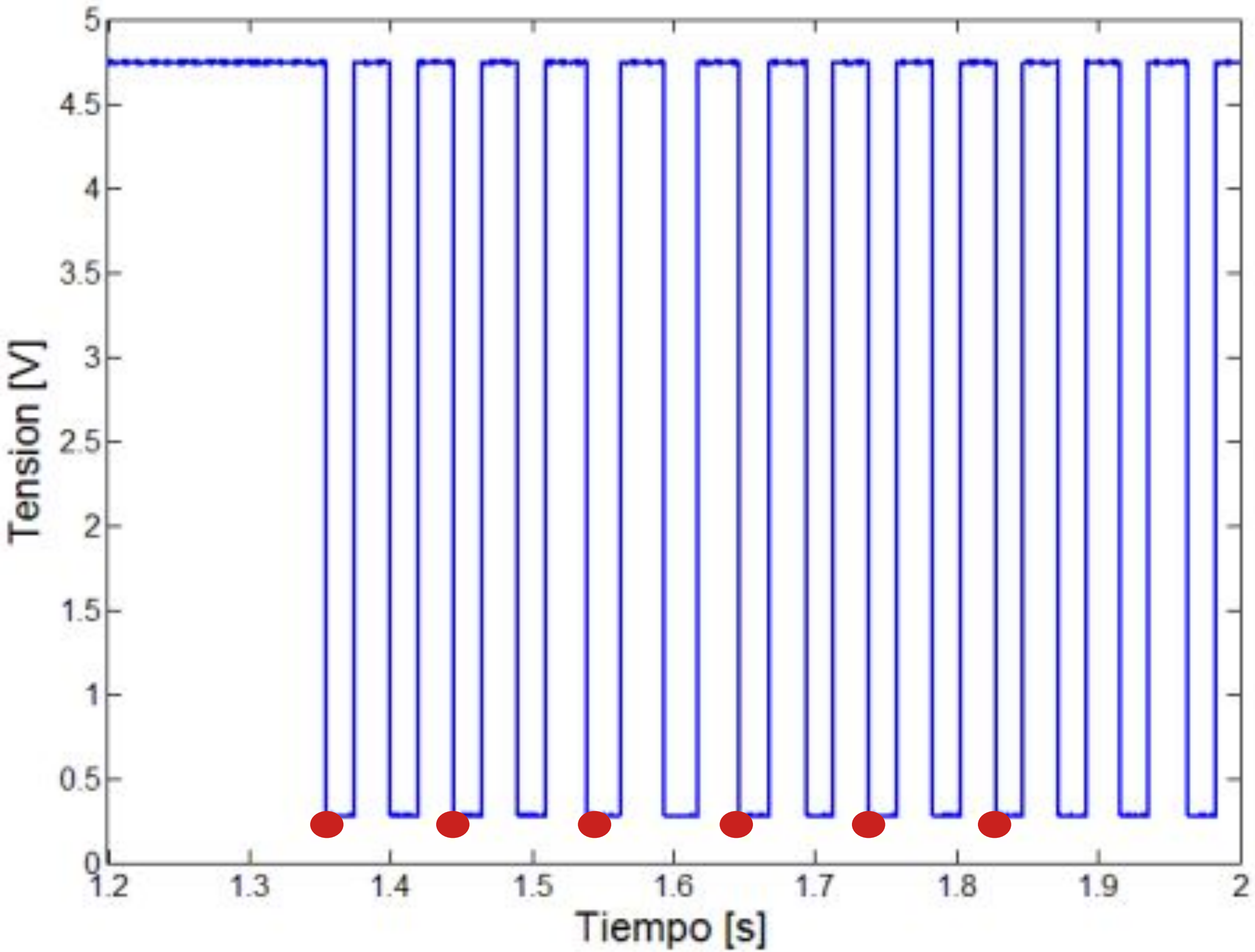
Adquisición de datos de la clase



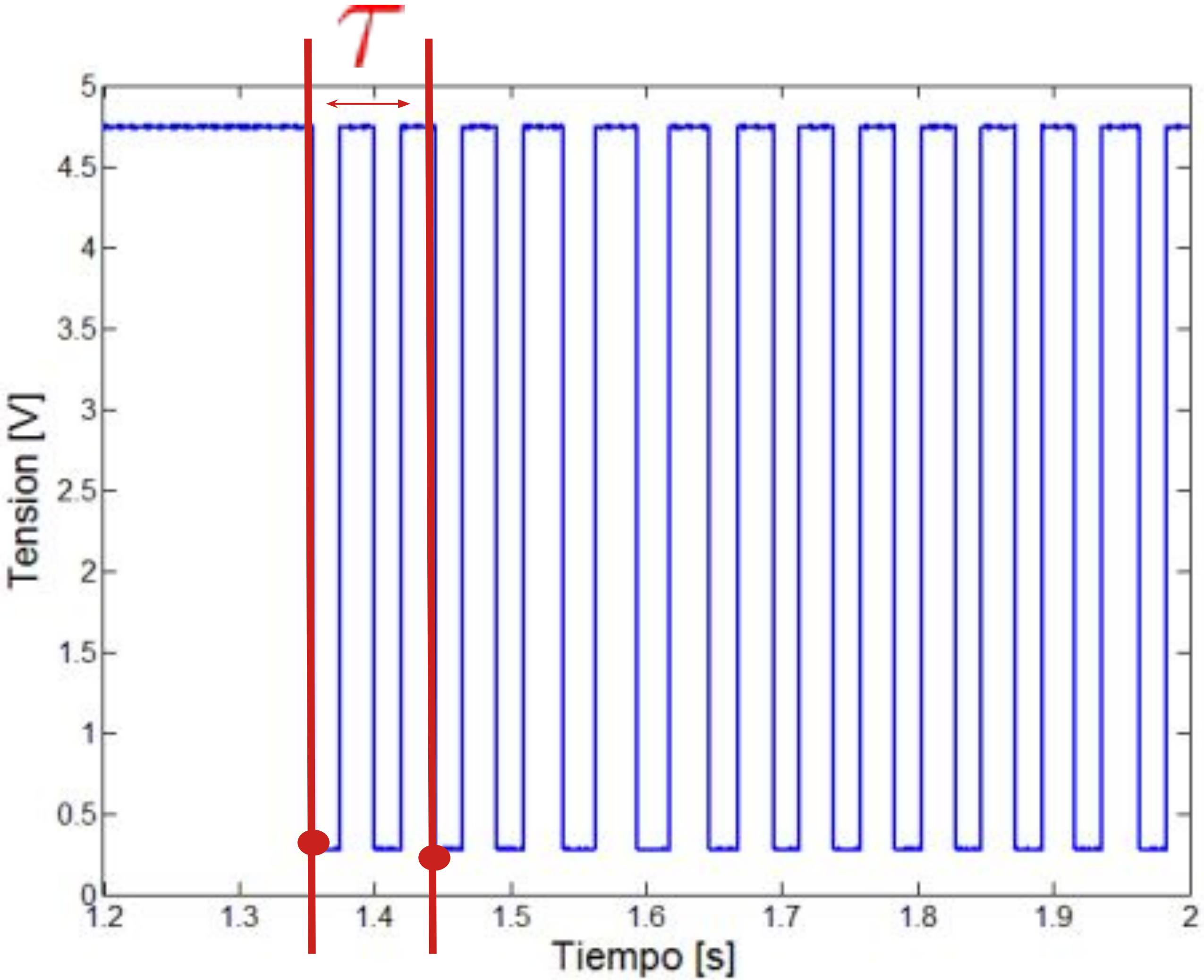
Período



Período



Período



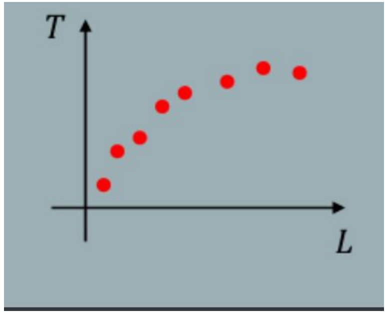
Tabla

Medición	Longitud (m)	Período (s)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Cálculo de la gravedad

¿Cómo obtengo la gravedad?

$$\boxed{\tau = 2\pi\sqrt[2]{\frac{L}{g}}}$$

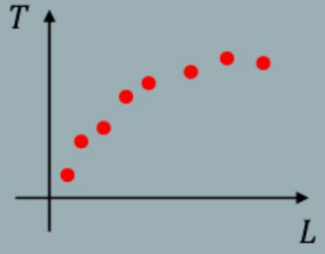


Medición	Longitud (m)	Período (s)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

PÉNDULO: ¿Cómo varía T a medida que varía L?

Modelos lineales: $y = mx + b$

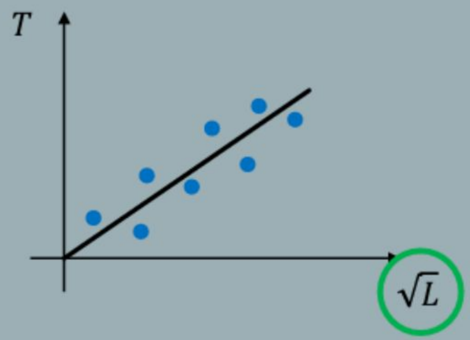
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L}$$

$$T = A\sqrt{L}$$

siendo $A = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$

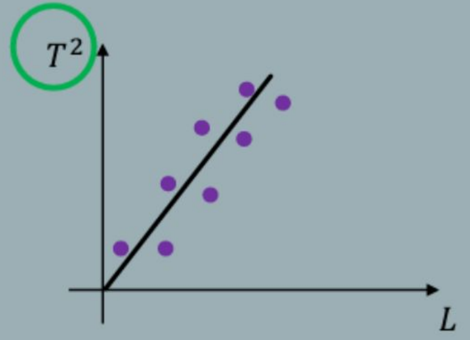


$u = \sqrt{L}$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$$

$$T^2 = B\,L$$

siendo $B = \frac{4\pi^2}{g}$



$v = T^2$

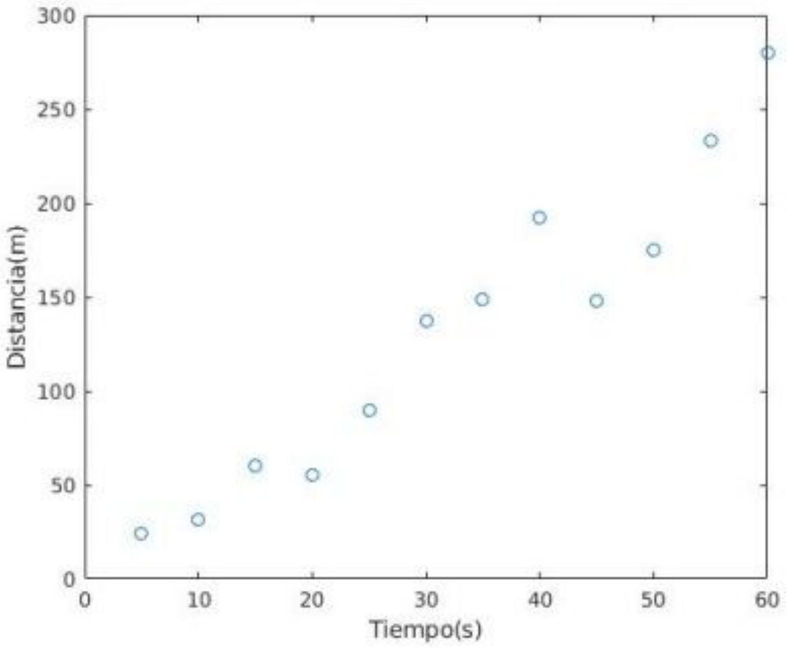
Regresiones lineales

Regresión Lineal

Buscamos encontrar modelos que ajusten y puedan predecir datos medibles del universo

- Datos → • N pares de (xi;yi)

- Modelo → $y = f(x) = b + m \cdot x$



Buscamos los parámetros m y b que minimicen la distancia entre datos y modelo

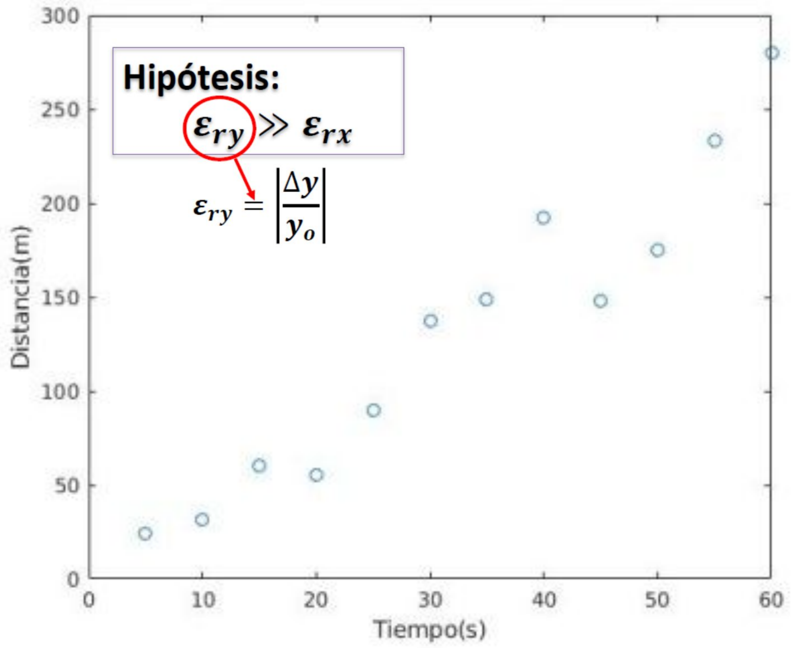
Regresión Lineal

Buscamos encontrar modelos que ajusten y puedan predecir datos medibles del universo

- Datos → N pares de (xi;yi)

- Modelo → $$y = f(x) = b + m \cdot x$$

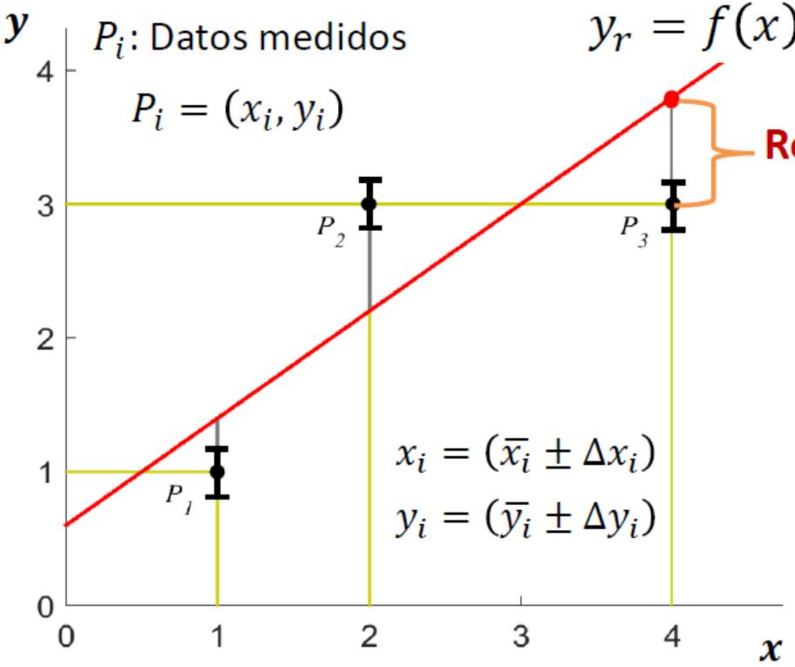
Buscamos los parámetros m y b que minimicen la distancia entre datos y modelo



Regresión Lineal

Buscamos los parámetros m y b que minimicen la distancia entre datos y modelo

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Residuos (δ_i) ➡ $\delta_i = y_i - y_r$

Experimental **Recta**

Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{y_o}\right|$$

D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

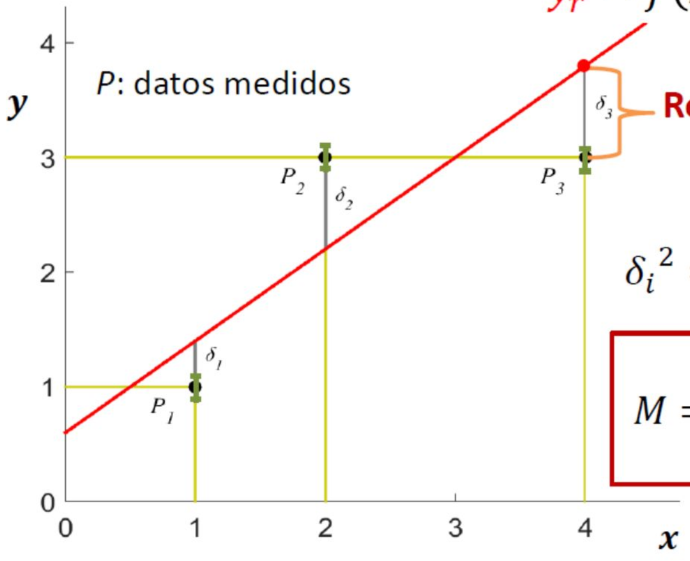
Regresión Lineal

Opción 1

Buscamos los parámetros m y b que minimicen la distancia entre datos y modelo

Cuando todos los datos en "*y*" tienen igual incerteza

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Residuos (δ_i) ➡ $\delta_i = y_i - y_r$

Experimental **Recta**

$$\delta_i{}^2 = [y_i - y_r]^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i{}^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2}$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

La cuenta en si...

Opción 1

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(m,b) = \sum_i y_i^2 + m^2 \sum_i x_i^2 + Nb^2 + 2mb \sum_i x_i - 2m \sum_i x_i y_i - 2b \sum_i y_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial m} = 0 \longrightarrow 2m \sum_i x_i^2 + 2b \sum_i x_i - 2 \sum_i x_i y_i = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = 0 \longrightarrow 2Nb + 2m \sum_i x_i - 2 \sum_i y_i = 0 \end{cases}$$

2 ecuaciones y
2 incógnitas

$$\boxed{m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

Para más detalles de las cuentas ---> Ver D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

La cuenta en si...

Opción 1

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

7

Los errores sales por propagación

$$S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

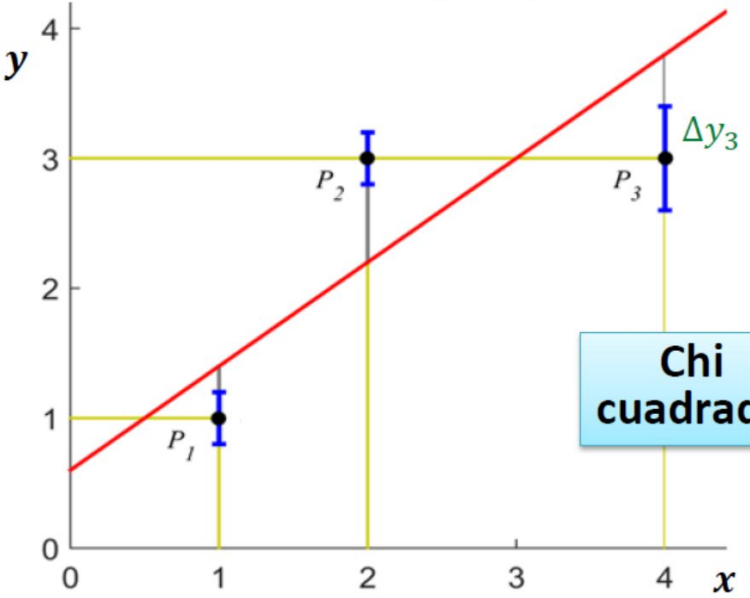
Para más detalles de las cuentas ---> Ver D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Regresión Lineal

Opción 2

Cuando todos los datos en "*y*" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$



Hipótesis: Considera a las medidas más precisas como las más relevantes

Chi cuadrado

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N}\left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos
Normalizados al error de cada medida

La cuenta en si….

Opción 2

Obtengo m y b despejando (2 ecuaciones y 2 incógnitas):

$$b = \frac{\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}y_i\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}x_i{}^2 - \sum\frac{1}{(S_{yi})^2}x_i\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}x_iy_i}{\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}x_i{}^2 - \left(\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}x_i\right)^2}$$

$$m = \frac{\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}(x_iy_i) - \sum\frac{1}{(S_{yi})^2}x_i\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}y_i}{\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}x_i{}^2 - \left(\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}x_i\right)^2}$$

$$S_m{}^2 = \frac{\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}}{\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}\sum\frac{x_i{}^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum\frac{x_i}{(S_{yi})^2}\right)^2}$$

$$S_b{}^2 = \frac{\sum\frac{x_iy_i}{(S_{yi})^2}}{\sum\frac{1}{(S_{yi})^2}\sum\frac{x_i{}^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum\frac{x_i}{(S_{yi})^2}\right)^2}$$

Teniendo en cuenta los errores

- Errores y iguales

Residuos (δ_i) ➡ $\delta_i = y_i - y_r$

SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

VS

- Considero errores en y distintos

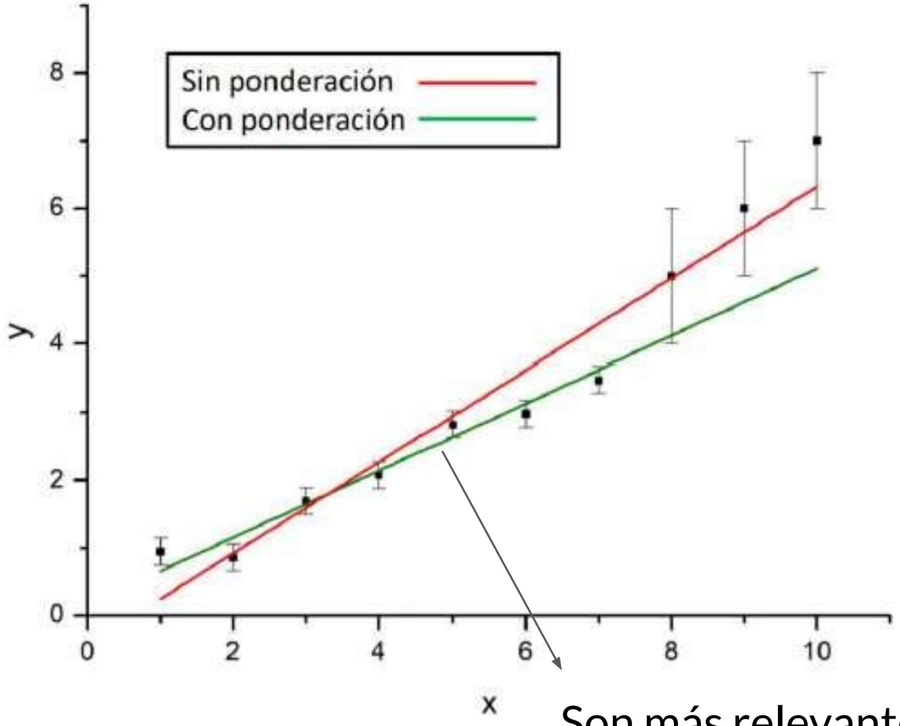
cuadrados mínimos ponderados

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

Resumiendo



Ponderados

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(y_i - (mx_i + b))}{S_i} \right]^2$$

No Ponderados

$$M = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

Son más relevantes las medidas con menor incerteza!

¿Cómo sabemos si el ajuste es bueno?

Coeficiente de Pearson	r	→	Medida de la dependencia lineal entre dos variables
Chi-cuadrado	χ^2	→	Medida de la verosimilitud de un modelo o ajuste
Residuos		→	Distribución de los datos respecto de la recta

Coeficiente de Pearson

Sean dos variables **x** e **y** de las cuales queremos ver la existencia de una correlación,

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y};$$

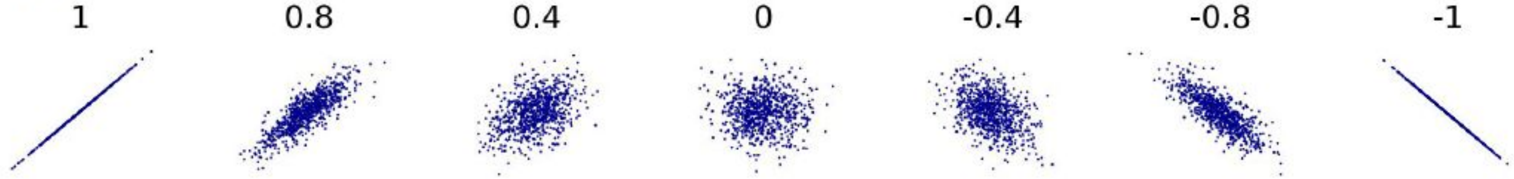
$$\begin{cases} Cov(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \\ \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})}{N}} \\ \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})}{N}} \end{cases}$$

Si **x** e **y** están correlacionados linealmente:

$$|r| = 1$$

Su signo va a depender de la pendiente de la recta

En origin tenemos el R^2(adj Rsquare).



R^2 está entre 0 y 1
Cuanto más cerca de 1, mayor es la correlación

Chi-cuadrado

Dimensiona cuánto difieren los datos experimentales de los del modelo. Pesa fuertemente la incerteza Δy

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{1}^{N}\left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2}$$

Caso lineal:

N = número de datos

2: los grado de libertad

Chi cuadrado reducido ➡ $\chi_v^2 = \dfrac{\chi^2}{N-2}$

Se espera que χ_v^2

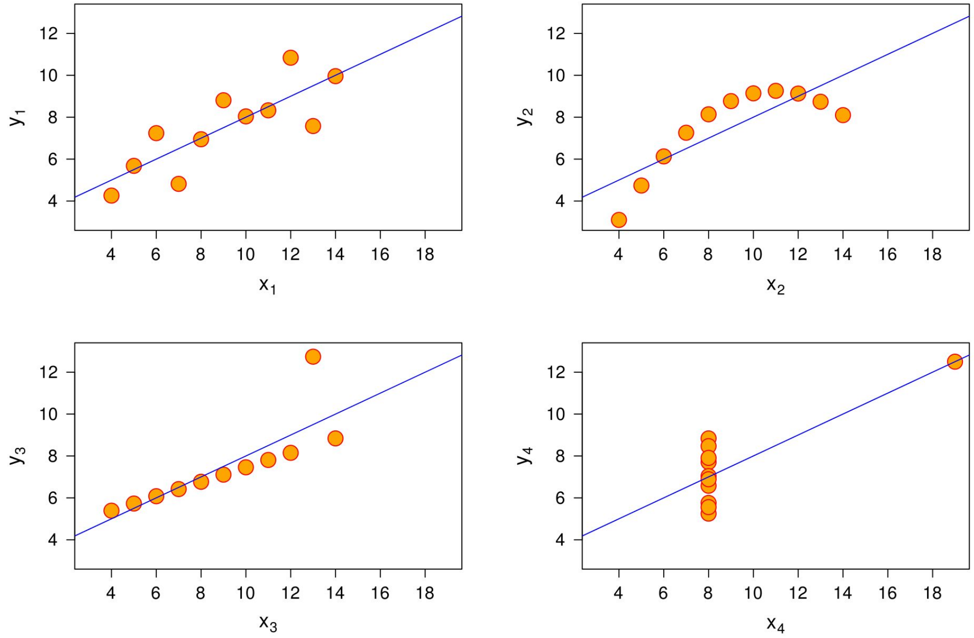
$\chi_v^2 \sim 1$ ✓

$\chi_v^2 \ll 1$ ✗

$\chi_v^2 \gg 1$ ✗

Bondad del ajuste

Cuarteto de Anscombe



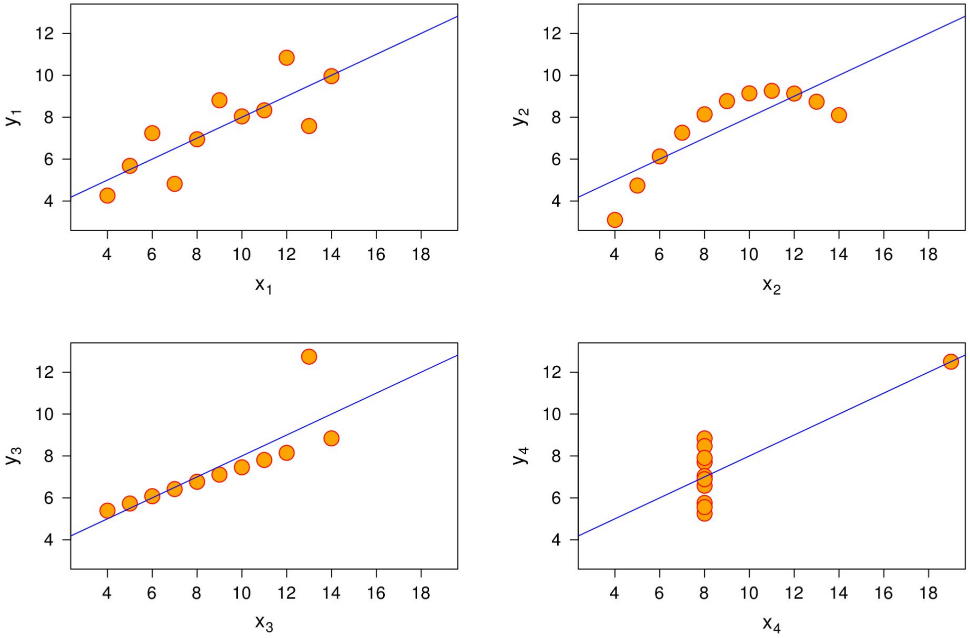
Adaptado de F.J. Anscombe, "Graphs in Statistical Analysis," American Statistician, 27 (1973), 17-21

Estos cuatro gráficos poseen las mismas propiedades estadísticas,

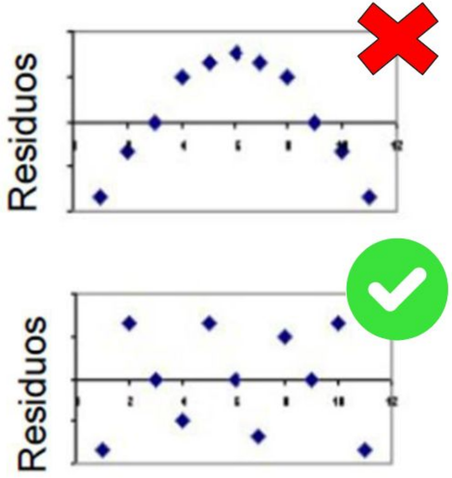
Propiedad	Valor
Media de cada una de las variables *x*	9.0
Varianza de cada una de las variables *x*	11.0
Media de cada una de las variables *y*	7.5
Varianza de cada una de las variables *y*	4.12
Correlación entre cada una de las variables *x* e *y*	0.816
Recta de regresión	$y = 3 + 0.5x$

Bondad del ajuste

Cuarteto de Anscombe

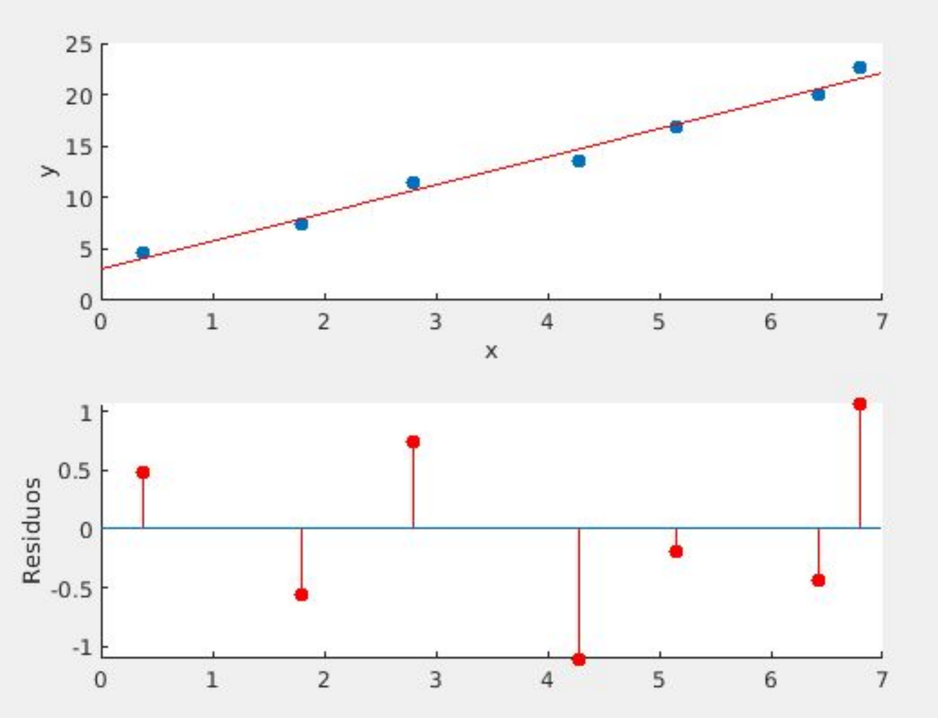


En los casos 2,3 y 4, la distribución de los datos alrededor de la recta no es normal (gaussiana). Tienen estructura (no son aleatorios los puntos).



Adaptado de F.J. Anscombe, "Graphs in Statistical Analysis," American Statistician, 27 (1973), 17-21

Bondad del ajuste: Residuos.



¡No tienen que tener estructura!

¿Qué usamos?

$|r| \approx 1$

$\chi^2_\nu \approx 1$