
Repaso sobre derivadas parciales

Consideremos el caso de una función $f(x, y)$ que depende de dos variables independientes: x e y .

La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x es

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}. \quad (1)$$

Esto significa que derivamos una vez la función f con respecto a la variable x (considerando y como una constante).

Por otro lado, la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y es

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \quad (2)$$

De manera análoga al caso anterior, esto significa derivar una vez la función f respecto de la variable y (ahora consideramos x como una constante).

Ejemplo 1

$$f(x, y) = 15y^3x + 4x - 2y + 3 \quad (3)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 15y^3 + 4 - 0 + 0 = 15y^3 + 4 \quad (4)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 45y^2x + 0 - 2 + 0 = 45y^2x - 2 \quad (5)$$

Supongamos que conocemos los valores de las variables x e y : $x_0 = 5$, $y_0 = 3$. La derivada parcial de f respecto a x evaluada en (x_0, y_0) es

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = 15 \times 3^3 + 4 = 409 \quad (6)$$

La derivada parcial de f respecto a y evaluada en (x_0, y_0) es

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = 45 \times 3^2 \times 5 - 2 = 2023 \quad (7)$$

Ejemplo 2

$$g(x, y) = \pi x^2 + 4xy \quad (8)$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 2\pi x + 4y \quad (9)$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 + 4x = 4x \quad (10)$$

Si ahora $(x_0, y_0) = (2, 3)$, la derivada parcial de g respecto a x evaluada en (x_0, y_0) es

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = 2\pi \times 2 + 4 \times 3 = 4\pi + 12 \quad (11)$$

Y la derivada parcial de g respecto a y evaluada en (x_0, y_0) es

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = 4 \times 2 = 8 \quad (12)$$

Ejemplo 3

$$h(x, y) = \frac{y}{x} = yx^{-1} \quad (13)$$

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = -yx^{-2} = -\frac{y}{x^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x} \quad (15)$$

Ejemplo 4

$$W(x, y) = \frac{x^2 - y}{3x + y} = (x^2 - y)(3x + y)^{-1} \quad (16)$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = (2x)(3x + y)^{-1} + (x^2 - y)(-1)(3x + y)^{-2}(3) \quad (17)$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{3x + y} - \frac{3(x^2 - y)}{(3x + y)^2}$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = (-1)(3x + y)^{-1} + (x^2 - y)(-1)(3x + y)^{-2}(1) \quad (18)$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \frac{-1}{3x + y} - \frac{x^2 - y}{(3x + y)^2}$$