Laboratorio 1 – Clase 3

TP 2: Mediciones Indirectas

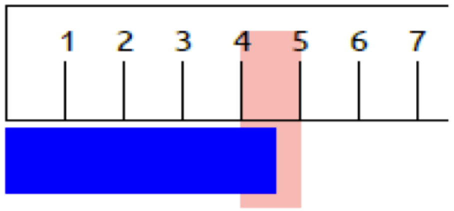
Profesora Ana Amador

2do cuatrimestre 2025

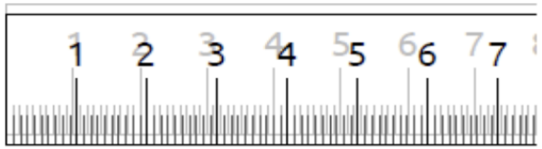
Repaso - Clasificación de los errores

<u>Errores introducidos por el instrumento</u>

Error de apreciación: Mínima división puede resolver el observador.



Error de exactitud: Error en la calibración del instrumento.



Error de interacción: Incerteza que surge de la interacción del instrumento con el objeto.

<u>Errores según su carácter</u>

Errores sistemáticos: Surgen de imperfecciones en el método de medición, y afectan de igual manera a todas las medidas (desplazamiento de cero, paralaje, etc.).

Errores estadísticos: Ocurren debido a causas múltiples y fortuitas. Sucesivas mediciones en las mismas condiciones arrojan distintos valores.

Repaso - Clasificación de los errores

<u>Error total, error absoluto y error relativo</u>

$$\Delta x \equiv \sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{ap}^2 + \sigma_{exac}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{est}^2 + \cdots}$$

(Fuentes de error independientes entre sí)

$x = \bar{x} \pm \Delta x$ → Error absoluto: Δx

$x = \bar{x} \pm \Delta x$ → Error relativo: $\varepsilon_r = \Delta x / \bar{x}$

Medimos N veces → $\sigma_{est} = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ ($\sigma_{\bar{x}}$: el error estándar del promedio)

Si reportamos un resultado como $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ → el <u>nivel de confianza</u> es del 68%

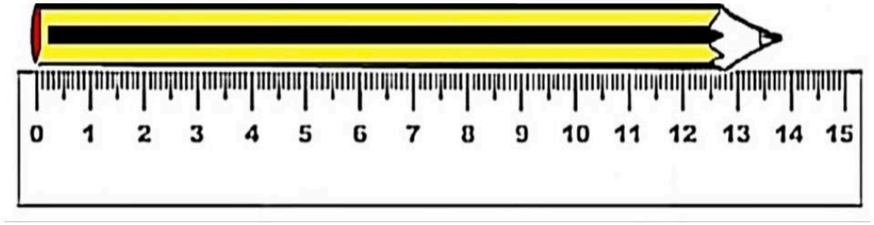
Si a mayor *N*, menor σ_{est} ¿Cuántas veces tiene sentido medir?

Un criterio sería medir tantas veces como para conseguir al menos $\sigma_{est} \approx \sigma_{instrumento}$

Repaso - Clases de mediciones

Medición directa

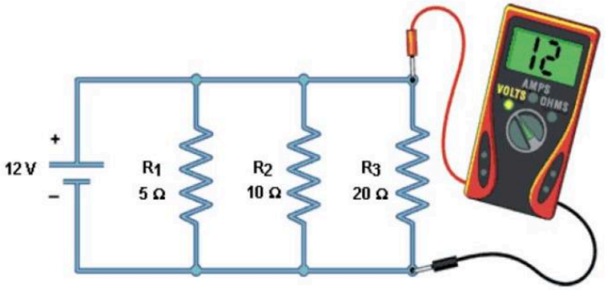
La medida deseada se obtiene de la lectura del instrumento (ej. temperatura, masa y longitud pueden determinarse directamente utilizando un termómetro, una balanza, y una regla, respectivamente).



Medición indirecta

Cuando la magnitud se determina a partir de relaciones matemáticas con otras magnitudes que fueron medidas directamente (ej. superficie de un objeto a partir de la medida de sus lados)

¿Corriente?



¿Aceleración?

¿Área? *h*

MEDICIONES INDIRECTAS – Propagación de errores

Medición indirecta: Cuando la magnitud se determina a partir de relaciones matemáticas con otras magnitudes que fueron medidas directamente.

Mido 1 variable de manera directa:
$x = x_0 \pm \Delta x$

Quiero determinar la incerteza de la magnitud calulada: $f(x)$

$f(x) = f(x_0 + \Delta x)$

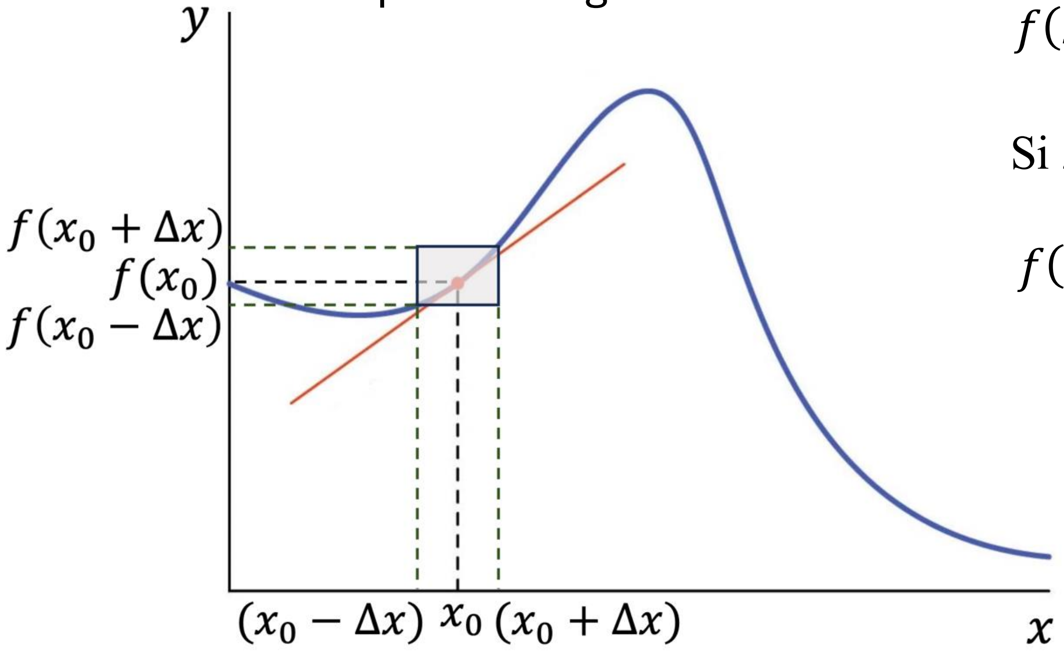
MEDICIONES INDIRECTAS – Propagación de errores

Medición indirecta: Cuando la magnitud se determina a partir de relaciones matemáticas con otras magnitudes que fueron medidas directamente.

Mido 1 variable de manera directa:

$x = x_0 \pm \Delta x$

Interpretación geométrica



Quiero determinar la incerteza de la magnitud calculada: $f(x)$

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x)$$

Polinomio de Taylor:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2!} f''(x_0)\,\Delta x^2 + \cdots$$

Si $\Delta x \ll 1$ (incerteza pequeña) => (Taylor de órden 1 está OK)

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$ (me quedo a órden 1)

$$\overbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}^{\Delta f} = f'(x_0)\Delta x$$ (paso restando $f(x_0)$)

$$\boxed{\Delta f = f'(x_0)\Delta x}$$

Aproximación de la incerteza de una medición indirecta

MEDICIONES INDIRECTAS – Propagación de errores

Medición indirecta: Cuando la magnitud se determina a partir de relaciones matemáticas con otras magnitudes que fueron medidas directamente.

Mido 2 variables de manera directa:
$x = x_0 \pm \Delta x$; $y = y_0 \pm \Delta y$

o sea, $(x, y) = (x_0, y_0) \pm (\Delta x, \Delta y)$

<u>Ejemplo:</u>
Quiero medir la densidad ρ de un objeto cúbico de lado l y masa m

$$m = \rho \cdot volumen = \rho \cdot l^3$$

$$\rho = \frac{m}{l^3}$$

Mido 2 variables de manera directa:
m y l
por lo que tengo 2 incertezas:
Δm y Δl

Quiero determinar la incerteza de la magnitud calculada: $f(x, y)$

$$f(x, y) = f(x_0 \pm \Delta x, y_0 \pm \Delta y)$$

Hagamos las cuentas con " + " : $f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

Polinomio de Taylor de 2 variables con $\Delta x, \Delta y \ll 1$ (incertezas pequeñas)
=> Taylor de órden 1 es una buena aproximación:

$$f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta y$$

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}_{\Delta f} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta y$$

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta y}$$

Aproximación de la incerteza de una medición indirecta

MEDICIONES INDIRECTAS – Propagación de errores

Medición indirecta: Cuando la magnitud se determina a partir de relaciones matemáticas con otras magnitudes que fueron medidas directamente.

Mido 2 variables de manera directa:

$x = x_0 \pm \Delta x$; $y = y_0 \pm \Delta y$

o sea, $(x, y) = (x_0, y_0) \pm (\Delta x, \Delta y)$

Ejemplo:
Quiero medir la densidad ρ de un objeto cúbico de lado l

$$m = \rho \cdot volumen = \rho \cdot l^3$$

$$\rho = \frac{m}{l^3}$$

Mido 2 variables de manera directa:
m y l
por lo que tengo 2 incertezas:
Δm y Δl

Si las incertezas :

✓ emergen de una distribución normal (o no tienen error estadístico)

✓ Son variables independientes (no correlacionadas)

Entonces puedo mejorar la estimación de incertezas a

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\right)^2 \cdot (\Delta y)^2} \quad (1)$$

Fórmula de incertezas de una medición indirecta

Antes teníamos que:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta y \quad (2)$$

Notar que (1) ≤ (2). Cuenta: hacer $(2)^2$, desarollar y comparar con (1)

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial l}\right)^2 \Delta l^2}$$

En esta materia, vamos a usar (1) como fórmula de incertezas de una medición indirecta

MEDICIONES INDIRECTAS – Propagación de errores

Medición indirecta: Cuando la magnitud se determina a partir de relaciones matemáticas con otras magnitudes que fueron medidas directamente.

En general,
si mido N variables de manera directa:

$$x_i = x_{0i} \pm \Delta x_i$$

Para obtener la magnitud calculada de manera indirecta:

$$f = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N)$$

Si las incertezas :

- ✓ emergen de una distribución normal (o no tienen error estadístico)
- ✓ Son variables independientes (no correlacionadas)

Fórmula de incertezas de una medición indirecta

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(x_{0i})} \right)^2 (\Delta x_i)^2}$$

MEDICIONES INDIRECTAS – Propagación de errores

<u>Ejemplo: Densidad de un objeto cúbico de lado *l*</u>

$$\rho = \frac{m}{l^3} \longrightarrow \Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial l}\right)^2 \Delta l^2}$$

Mido 2 variables de manera directa: m y l por lo que tengo 2 incertezas: Δm y Δl

Cuentas auxiliares:

$$\rho = \frac{m}{l^3} = m \cdot l^{-3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{1}{l^3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial l} = -3\frac{m}{l^4}$$

$$\Rightarrow (\Delta\rho)^2 = \left(\frac{1}{l^3}\right)^2 \cdot (\Delta m)^2 + \left(-3\frac{m}{l^4}\right)^2 \cdot (\Delta l)^2$$

MEDICIONES INDIRECTAS – Propagación de errores

Ejemplo: Densidad de un objeto cúbico de lado l

Mido 2 variables de manera directa: m y l
por lo que tengo 2 incertezas: Δm y Δl

$$\rho = \frac{m}{l^3} \longrightarrow \Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial l}\right)^2 \Delta l^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} m = (298 \pm 1)\mathrm{g} \\ l = (3{,}36 \pm 0{,}05)\ \mathrm{cm} \end{array}\right. \longrightarrow \Delta\rho = 0{,}4\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}, \rho = (7{,}9\ \pm 0{,}4)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \longrightarrow \varepsilon_r = 5\%$$

Cuentas auxiliares:

$$\rho = \frac{m}{l^3} = m \cdot l^{-3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{1}{l^3}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial l} = -3\frac{m}{l^4}$$

$$\Longrightarrow (\Delta\rho)^2 = \left(\frac{1}{l^3}\right)^2 \cdot (\Delta m)^2 + \left(-3\frac{m}{l^4}\right)^2 \cdot (\Delta l)^2$$

Clase de hoy

PRÁCTICA 2 **2º CUATRIMESTRE 2025**

LABORATORIO 1

INTRODUCCIÓN A MEDICIONES E INCERTEZAS DE MEDIDA CON EXPERIMENTOS DE MECÁNICA

Departamento de Física, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

PRÁCTICA 2: Mediciones Indirectas

OBJETIVO GENERAL

En esta práctica se busca estudiar la manera más adecuada de medir una magnitud. A través del experimento se desea adquirir conocimientos básicos sobre los conceptos involucrados en las mediciones indirectas. Además, se buscará determinar las incertezas de las magnitudes de interés, desarrollando criterios para medir correctamente.

Clase de hoy

PRÁCTICA 2 **2º CUATRIMESTRE 2025**

LABORATORIO 1

INTRODUCCIÓN A MEDICIONES E INCERTEZAS DE MEDIDA CON EXPERIMENTOS DE MECÁNICA

Departamento de Física, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

PRÁCTICA 2: Mediciones Indirectas

ACTIVIDAD 1: DETERMINACIÓN DEL VOLUMEN DE UN SÓLIDO

¿Qué método experimental puedo utilizar para medir el volumen de un sólido?

Clase de hoy

PRÁCTICA 2 **2º CUATRIMESTRE 2025**

LABORATORIO 1

INTRODUCCIÓN A MEDICIONES E INCERTEZAS DE MEDIDA CON EXPERIMENTOS DE MECÁNICA

Departamento de Física, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

PRÁCTICA 2: Mediciones Indirectas

ACTIVIDAD 1: DETERMINACIÓN DEL VOLUMEN DE UN SÓLIDO

a) POR DESPLAZAMIENTO DE VOLUMEN: Utilice una probeta graduada. Llene la probeta con agua hasta un volumen conocido, introduzca cuidadosamente el objeto y estudie la diferencia de volumen en la probeta.

b) POR MEDICIÓN DE SUS DIMENSIONES: Utilice un calibre para medir las dimensiones relevantes del objeto (como el diámetro, la altura o la longitud de los lados, según su forma). Luego calcule el volumen aplicando la fórmula geométrica apropiada según la forma del objeto.

c) POR MEDICIÓN DE LA MASA UTILIZANDO UNA BALANZA: Pese el objeto para obtener su masa m. Luego calcule su volumen usando la relación $V = \frac{m}{\delta}$, donde δ es la densidad del material del cual está hecho el objeto.

Clase de hoy

De esta manera, obtendré mediciones indirectas del volumen de un objeto, utilizando 3 métodos distintos.

Luego de realizar las mediciones, los cáculos de magnitud e incertezas, queremos comparar las mediciones obtenidas con los distintos métodos.

Discrepancia

- Medición 1: $X_1 = \overline{X_1} \pm \Delta X_1$
- Medición 2: $X_2 = \overline{X_2} \pm \Delta X_2$

Definimos $\Delta X = \sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2}$

$|\overline{X_2} - \overline{X_1}| \geq \Delta X \rightarrow$ Mediciones distintas entre sí con un límite de confianza del 68%

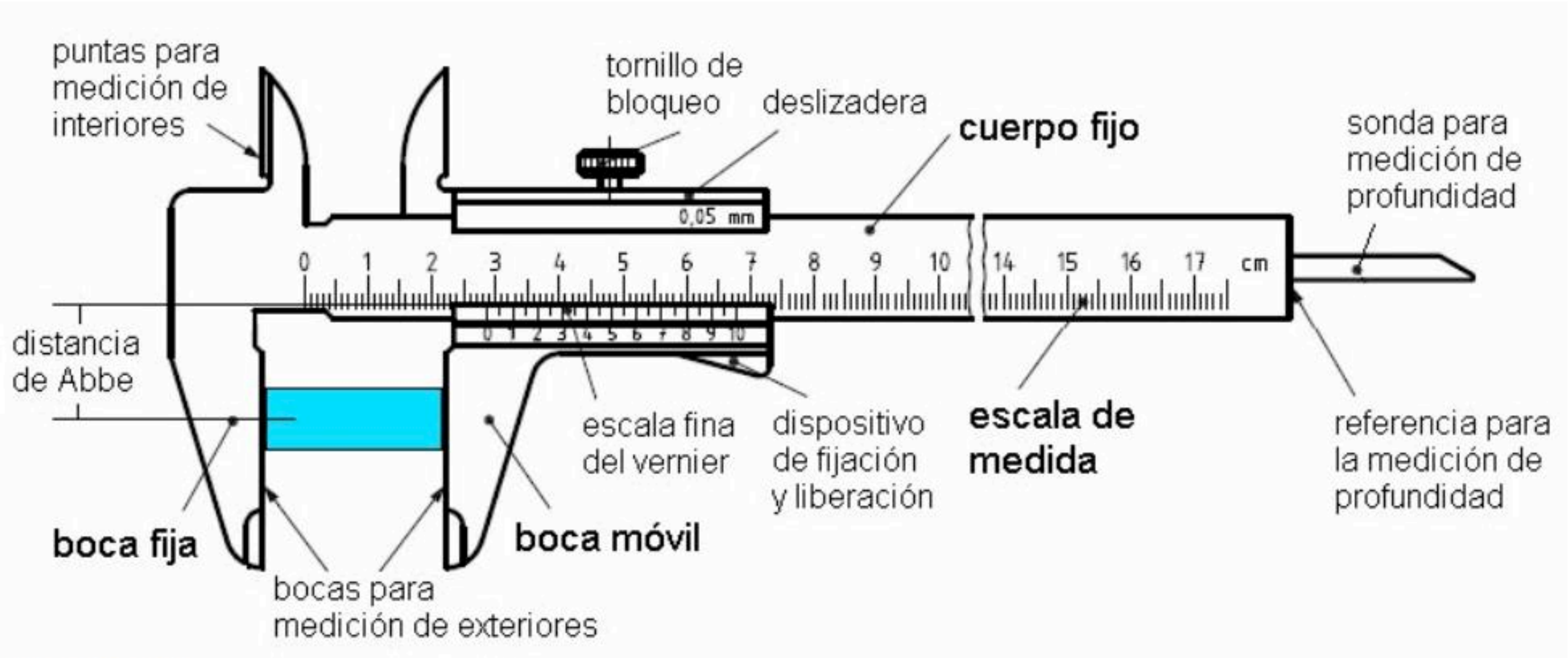
$|\overline{X_2} - \overline{X_1}| \geq 2\Delta X \rightarrow$ Mediciones distintas entre sí con un límite de confianza del 95%

Además de comparar los valores, queremos determinar cuál es el método más preciso.
¿Cómo hacemos esto?

Clase de hoy

Método b: medición de dimensiones

Para medir utilizaremos el calibre

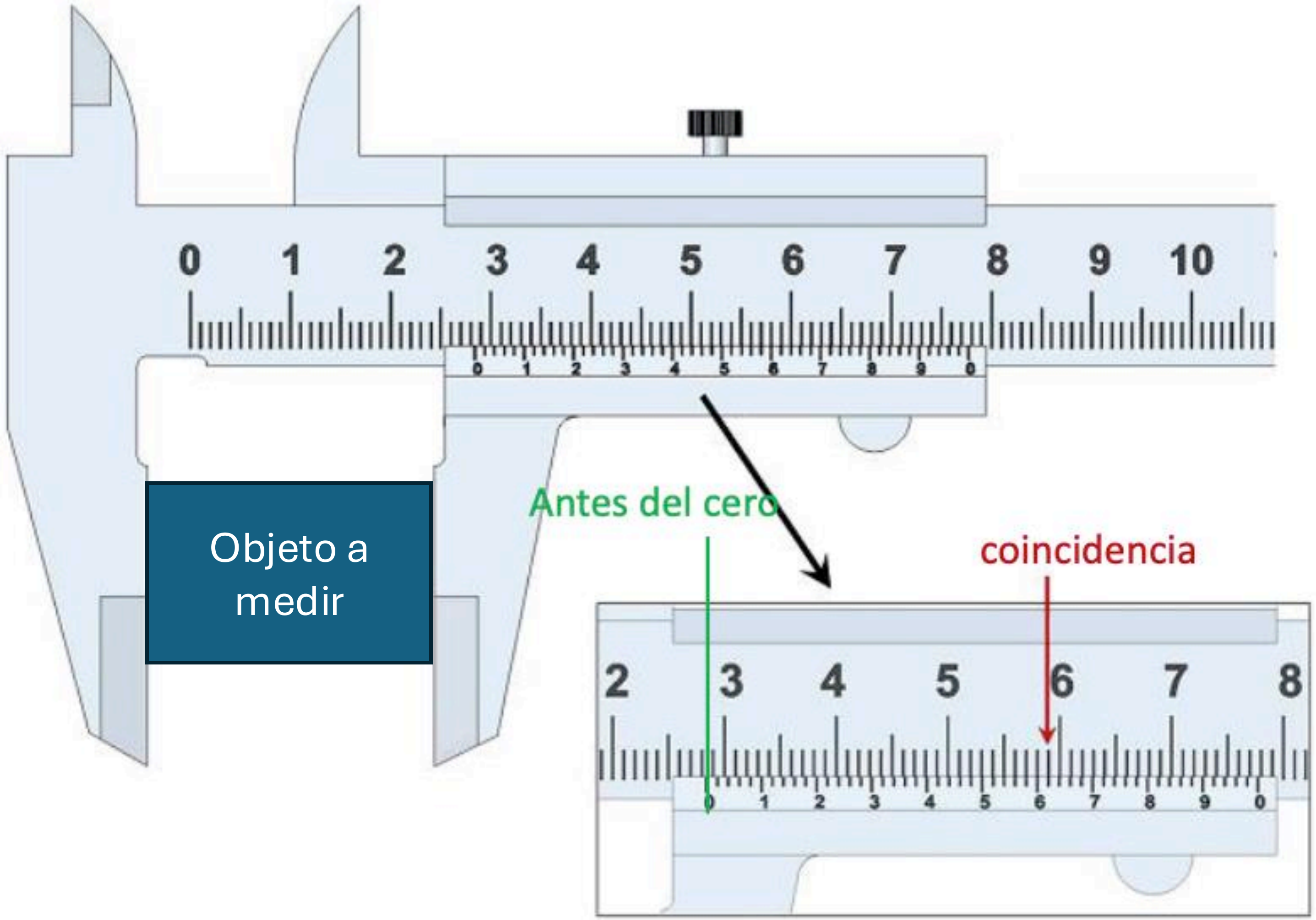


Determinación de la apreciación

$$\sigma_{aprec} = \frac{mínima\ divisón\ escala\ fija}{n°\ de\ divisiones\ del\ vernier} \Rightarrow \sigma_{aprec} = \frac{1\ \text{mm}}{20} = 0{,}05\ \text{mm}$$

Clase de hoy

EL USO DEL CALIBRE



Ejemplo:

1) Determinar la apreciación

$$\sigma_{aprec} = \frac{1\ \mathrm{mm}}{50} = 0{,}02\ \mathrm{mm}$$

2) Lectura en escala fija

$$x_1 = 28\ \mathrm{mm}$$

3) Lectura en escala móvil

$$x_2 = 0{,}62\ \mathrm{mm}$$

4) Sumo 2) y 3)

$$x = 28{,}62\ \mathrm{mm}$$

5) Expreso el resultado

$$\boldsymbol{x = (28,62 \pm 0,02\ )\ \mathrm{mm}}$$