LABORATORIO 1A

2do. CUAT 2025

- Digitalización
- Cuadrados mínimos

Miércoles 8 – 14 hs

REPASO DE LAS CLASES PASADAS

Queremos obtener una expresión válida para una determinada **magnitud física**

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)$$ Unidades

Valor más representativo

Incerteza absoluta ➡ Fuentes de incerteza

Error total, error absoluto y error relativo

$$\Delta x \equiv \sigma_{total} = \sqrt{\sigma_{ap}^2 + \sigma_{exac}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{est}^2 + \cdots}$$

(Fuentes de error independientes entre sí)

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

Error absoluto: Δx

Error relativo: $\varepsilon_r = \Delta x / \bar{x}$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

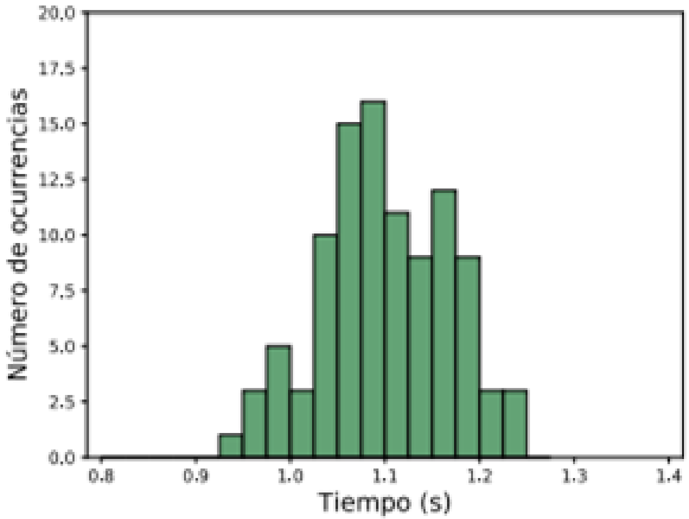
expresamos las incertidumbres con **una o dos cifras significativas**

😎
L = (84 ± 1) mm
L = (83,9 ± 0,5) mm

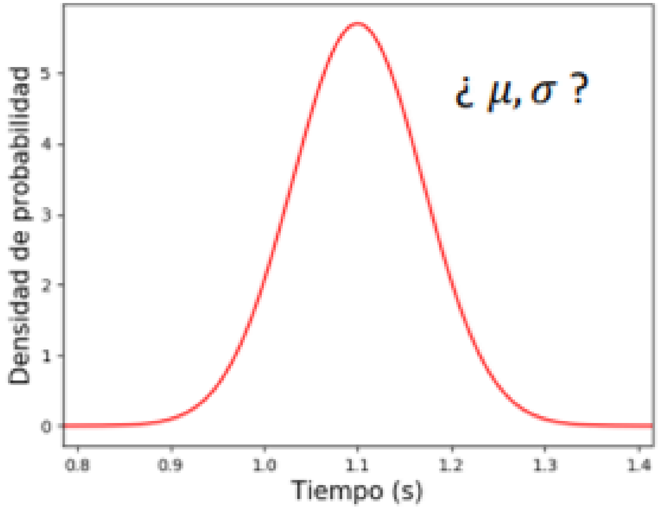
😠
L = (83,923 ± 1) mm
L = (83,923 ± 1,052) mm

REPASO DE LAS CLASES PASADAS

Datos obtenidos



¿De qué distribución de probabilidad provienen mis datos?

¿  ?

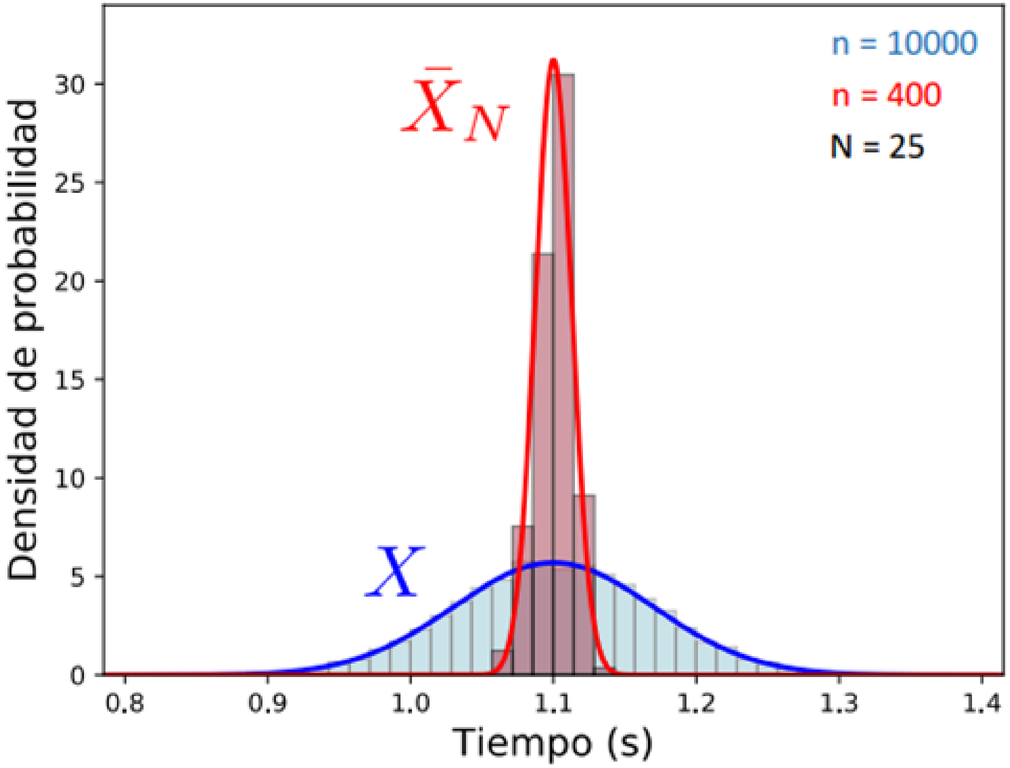
$$G_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\mu,\sigma}(x)dx = 1$$

La distribución de Gauss es una buena *aproximación* para muchísimos casos*

- Está centrada en $x = \mu$
- Es simétrica alrededor de $x = \mu$
- Tiende exponencialmente a 0 para $|x - \mu| \gg \sigma$
- El parámetro σ da una medida de su ancho

REPASO DE LAS CLASES PASADAS



$$\sigma_{\bar{X}_N} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$$ *

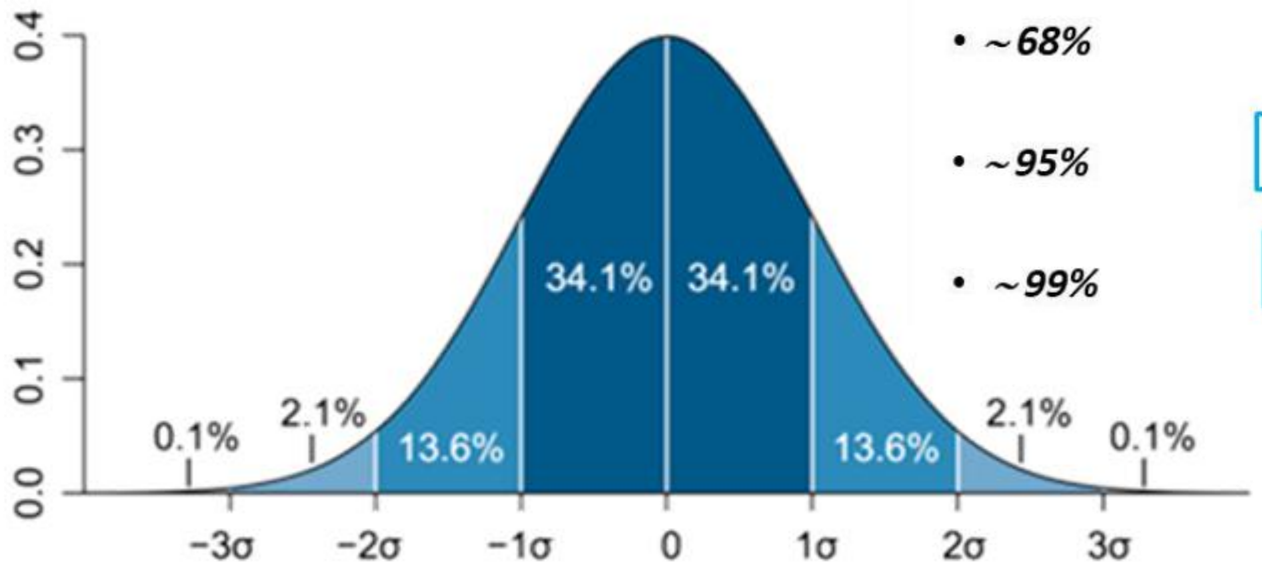
X : variable aleatoria "una medición"

$\bar{X}_N$: variable aleatoria "promedio de N mediciones"

n: número de cuentas en el histograma

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ Unid}} \qquad \Delta x = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_e^2} \qquad \sigma_e = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

REPASO DE LAS CLASES PASADAS



PROBABILIDAD

- *~68%*
- *~95%*
- *~99%*

Una nueva medida de x_i

$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$

$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$

$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$

una nueva medida de $\bar{x}_i$

$(\bar{x} - \sigma_e, \bar{x} + \sigma_e)$

$(\bar{x} - 2\sigma_e, \bar{x} + 2\sigma_e)$

$(\bar{x} - 3\sigma_e, \bar{x} + 3\sigma_e)$

→ **Desviación Estándar (de la muestra)**
- → Permite predecir probabilidad de hallar valores al medir
- → SD o σ

→ **Valor medio**
- → Estimación del valor real que se trata de medir
- → μ o x_0 o <X> o $\bar{X}$

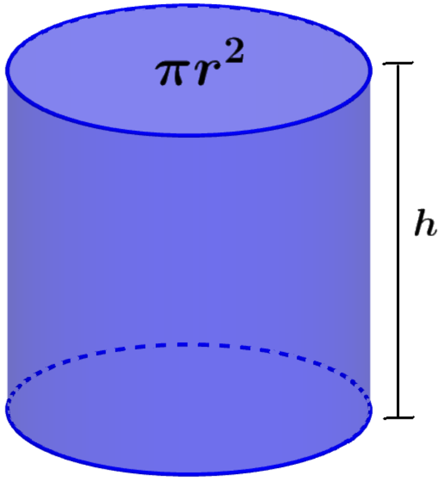
→ **Error Estándar**
- → $SD/\sqrt{N}$
- → Incerteza del valor medio μ o x_0
- → SE o σ_{x0}

Propagación de errores

Medición directa
La medida deseada se obtiene de la lectura del instrumento (ej. temperatura, masa y longitud pueden determinarse directamente utilizando un termómetro, una balanza, y una regla, respectivamente).

Medición indirecta
Cuando la magnitud se determina a partir de relaciones matemáticas con otras magnitudes que fueron medidas directamente (ej. superficie de un objeto a partir de la medida de sus lados)

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 + \cdots}$$



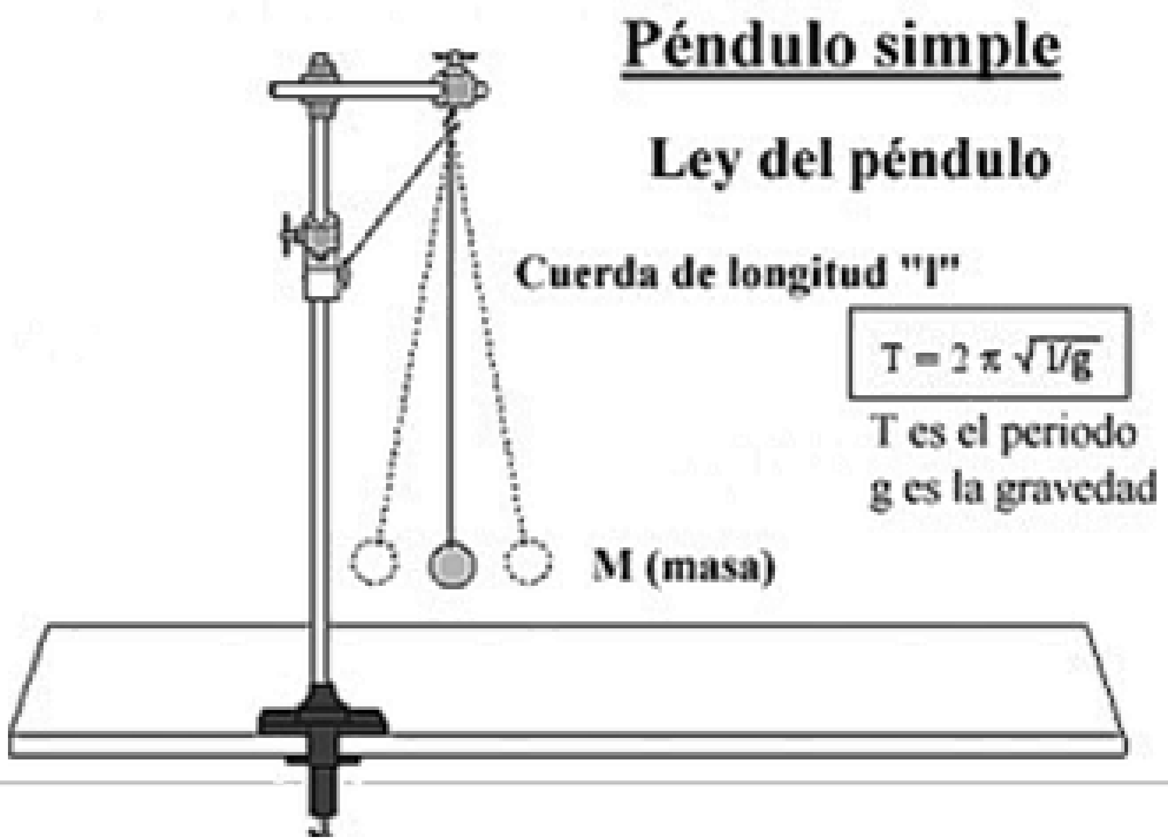
$$V = \pi r^2 \times h$$

REPASO DE LAS CLASES PASADAS

Propagación de errores

Medición directa
La medida deseada se obtiene de la lectura del instrumento (ej. temperatura, masa y longitud pueden determinarse directamente utilizando un termómetro, una balanza, y una regla, respectivamente).

Medición indirecta
Cuando la magnitud se determina a partir de relaciones matemáticas con otras magnitudes que fueron medidas directamente (ej. superficie de un objeto a partir de la medida de sus lados)



$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 + \cdots}$$

¿QUÉ PUEDO HACER PARA OBTENER UN MEJOR VALOR DE G?

Un poco de física

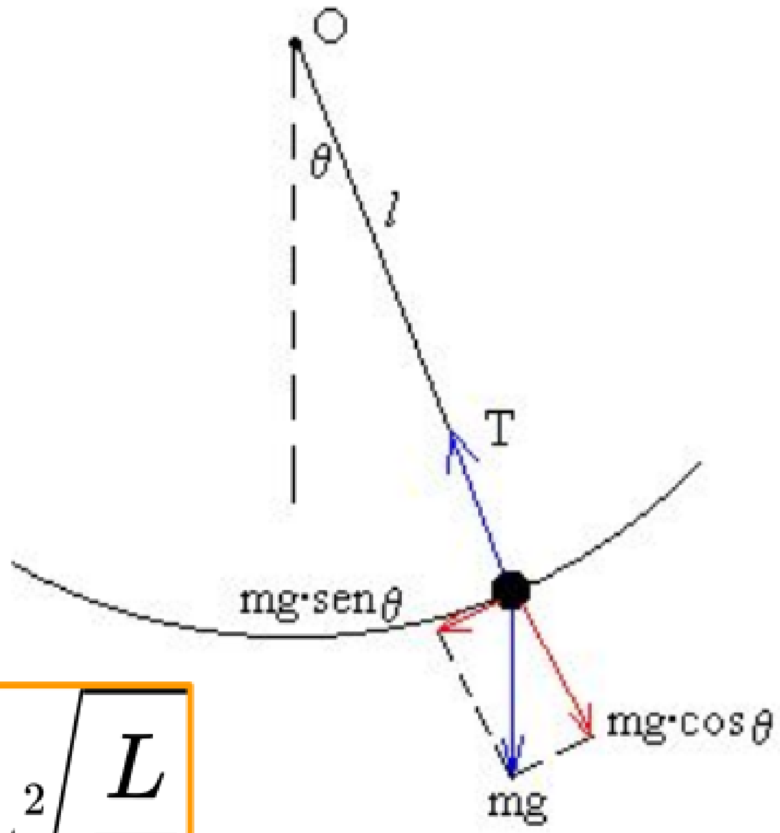
$$\hat{r})\, mg\cos(\theta) - T = -mL\dot{\theta}^2$$

$$\hat{\theta})\; -mgsen(\theta) = mL\ddot{\theta}$$

$$0 = L\ddot{\theta} + gsen(\theta)$$

$$0 = \ddot{\theta} + \frac{g}{L}sen(\theta)$$

$$0 = \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta \longrightarrow \boxed{\tau = 2\pi\sqrt[2]{\frac{L}{g}}}$$



Podríamos calcular la gravedad!

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Medimos T la clase pasada y lo tenemos con su inscerteza

Usamos un L determinado, lo medimos con una cinta métrica

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

PERO esa única medición tiene errores (de tiempo, de longitud), y podría no ser representativa.

¿Qué pasa si medimos varias configuraciones diferentes?

¿Qué pasa si modifico la longitud del péndulo?

¿Cómo puedo analizar mediciones que según mi modelo deberían seguir una relación funcional?

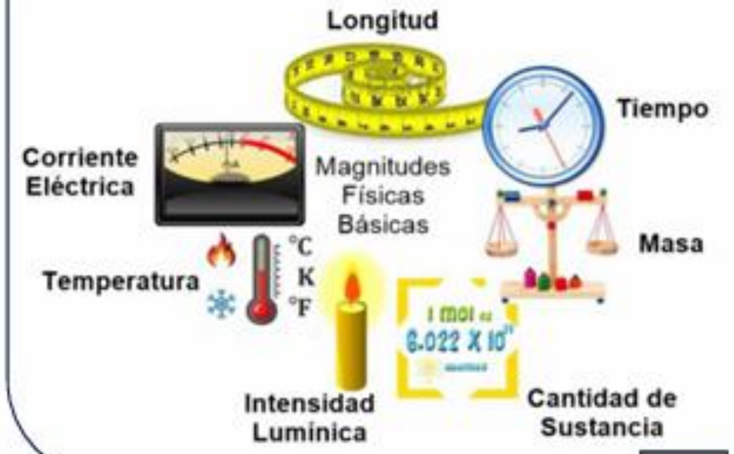
VOY A NECESITAR HACER VARIAS MEDICIONES

Optimizar mediciones

La **adquisición de datos** o **adquisición de señales** consiste en la toma de muestras del mundo real (sistema analógico) para generar datos que puedan ser manipulados por un ordenador u otros dispositivos electrónicos (sistema digital).

Proceso de medición

Magnitud física



Instrumento

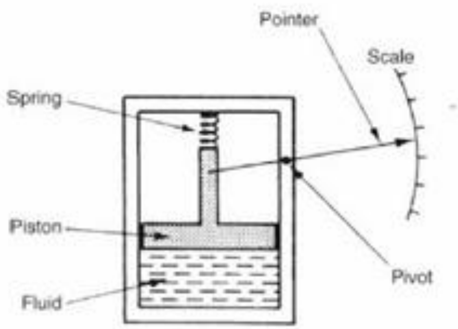
Tipo de señal:

Analógica | **Digital**

Instrumentos

Analógico

Brinda una **señal continua** de la magnitud tal cual llega, mediante agujas o numeración mecánica.

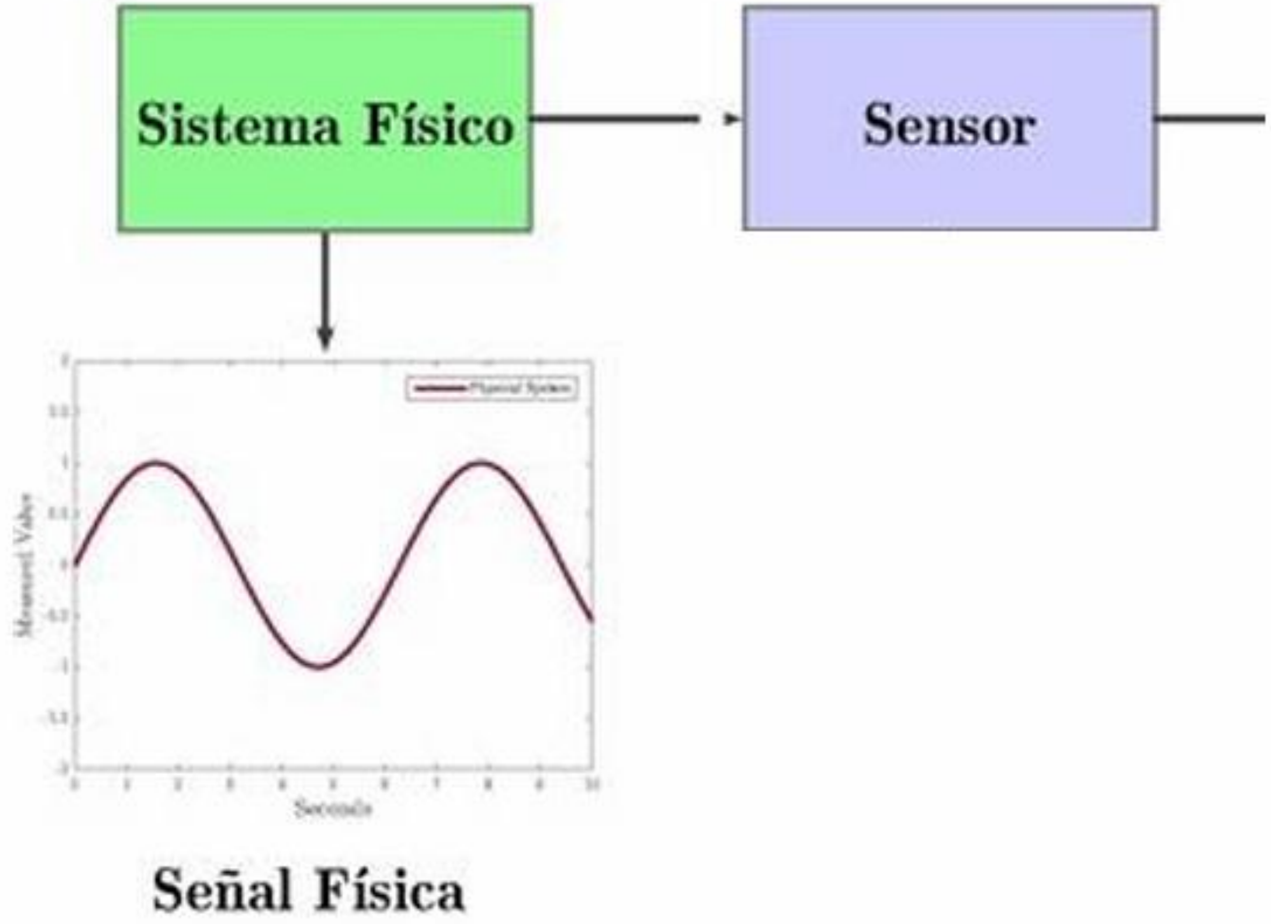


Ej: dial

Ej: osciloscopio analógico

Digital

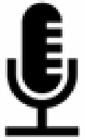
Brinda una **señal discreta** de la magnitud física, requiriendo un proceso de conversión previo.


Sistema Físico
Sensor
Señal Física

Sensores - transductores

Un **sensor** es un instrumento que "capta" magnitudes físicas. Debe tener alguna propiedad sensible a la magnitud que se desea medir en la entrada

Un sensor **transductor**, además de captar la magnitud de entrada, transforma la energía que recibe en otra forma de energía más conveniente para ser interpretada y utilizada.



Presión sonora

↓

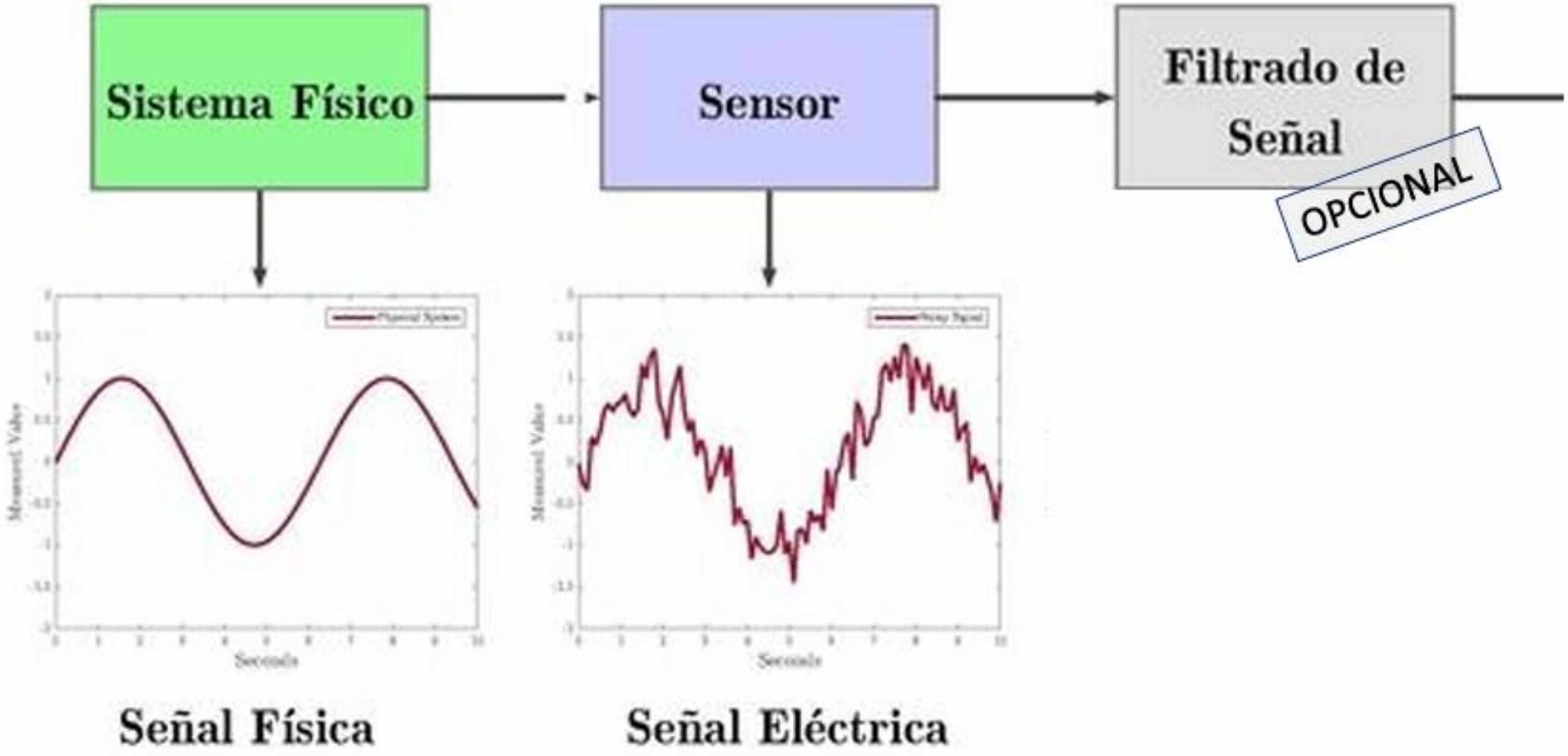
Corriente Eléctrica

Fuerza

↓

Longitud

→ **REQUIEREN CALIBRACIÓN**


Sistema Físico
Sensor
Filtrado de Señal
OPCIONAL
Seconds
Seconds
Señal Física
Señal Eléctrica

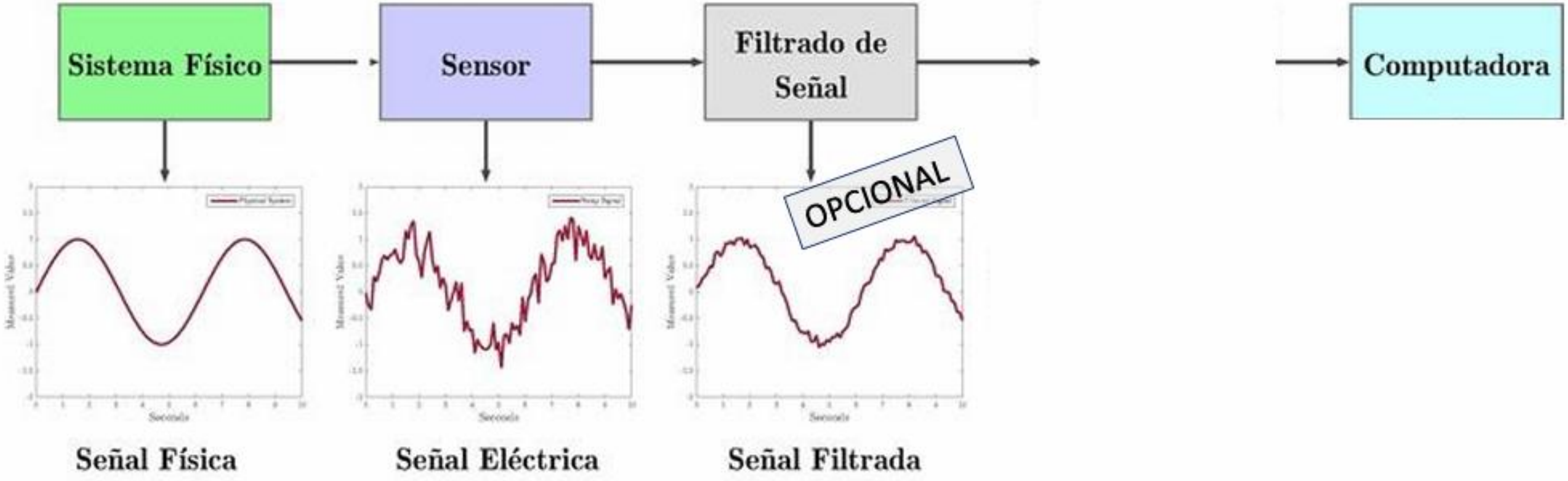
Acondicionamiento de la señal

Se manipula la señal del sensor para convertirla en una más adecuada para la adquisición de datos. Incluye distintos procesos, entre ellos:

Amplificación
Se amplifican señales de baja amplitud para mejorar su resolución y disminuir el ruido. El máximo de la señal de entrada debe coincidir con la máxima tensión que el convertidor pueda leer.

Filtrado
Elimina las señales no deseadas (ruido) de la señal que estamos observando. Para eso se elimina la banda de frecuencia en las que se encuentran esas interferencias o ruidos.

Sistema Digital de Adquisición de Datos



Mundo digital

La información se guarda en **bits** (Estado binario 1 o 0).

La cantidad de bits determina la cantidad de valores discretos que puedo representar

Ejemplo

2 bits → 00, 10, 01, 11 — **$2^2 = 4$ valores posibles**

3 bits → 000, 010, 001, 011, 100, 110, 101, 111 — **$2^3 = 8$ valores posibles**

x bits → 2^x números

Digitalización de los datos

La señal **analógica** se la discretiza tanto en la magnitud de medición como en el tiempo, y se la pasa a formato **digital**. Los datos se transfieren a una computadora para su almacenamiento y análisis.

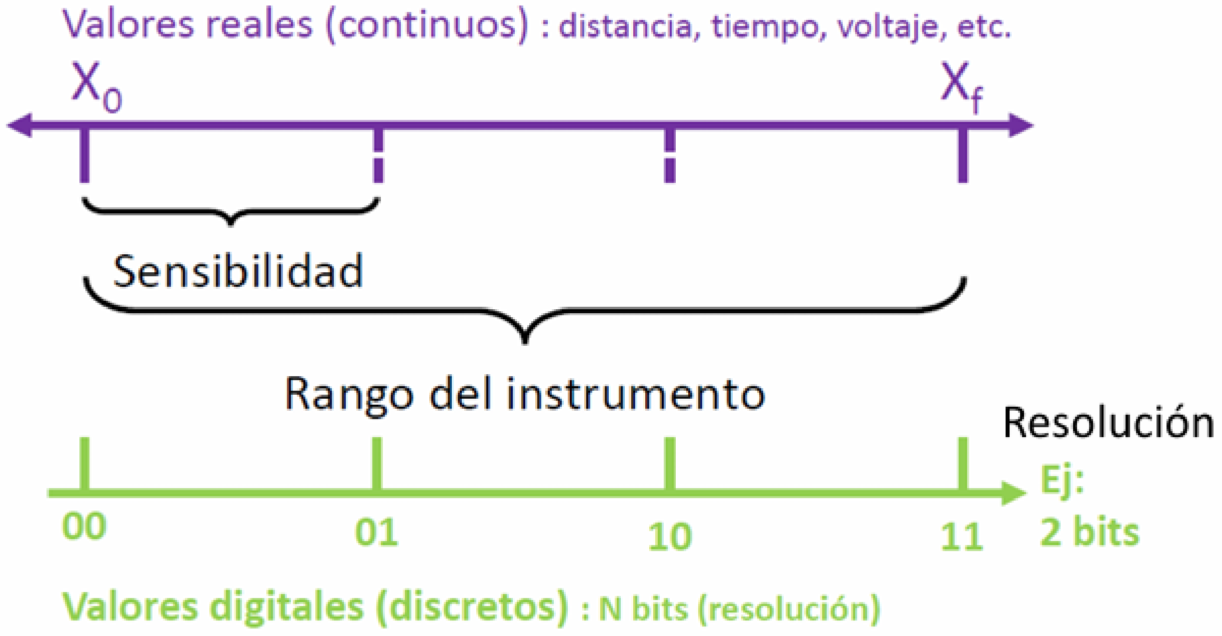
Para eso se usa un dispositivo que cumpla el rol de **conversor analógico-digital.**

La **cantidad de bits** del conversor, determina la **resolución** de la señal.

La **frecuencia de muestreo** determina la **resolución temporal** de la digitalización.

Digitalización de los datos

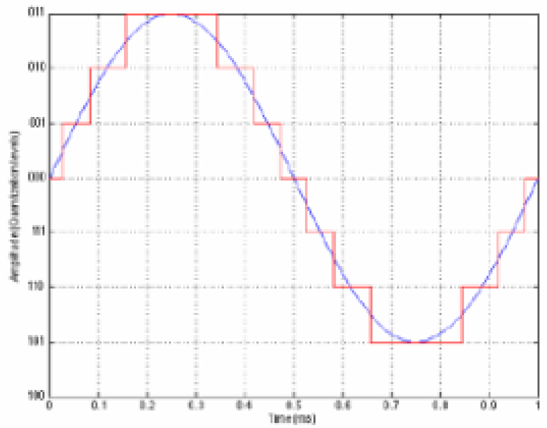
La **cantidad de bits** del conversor, determina la **resolución** de la señal.



Sensibilidad:

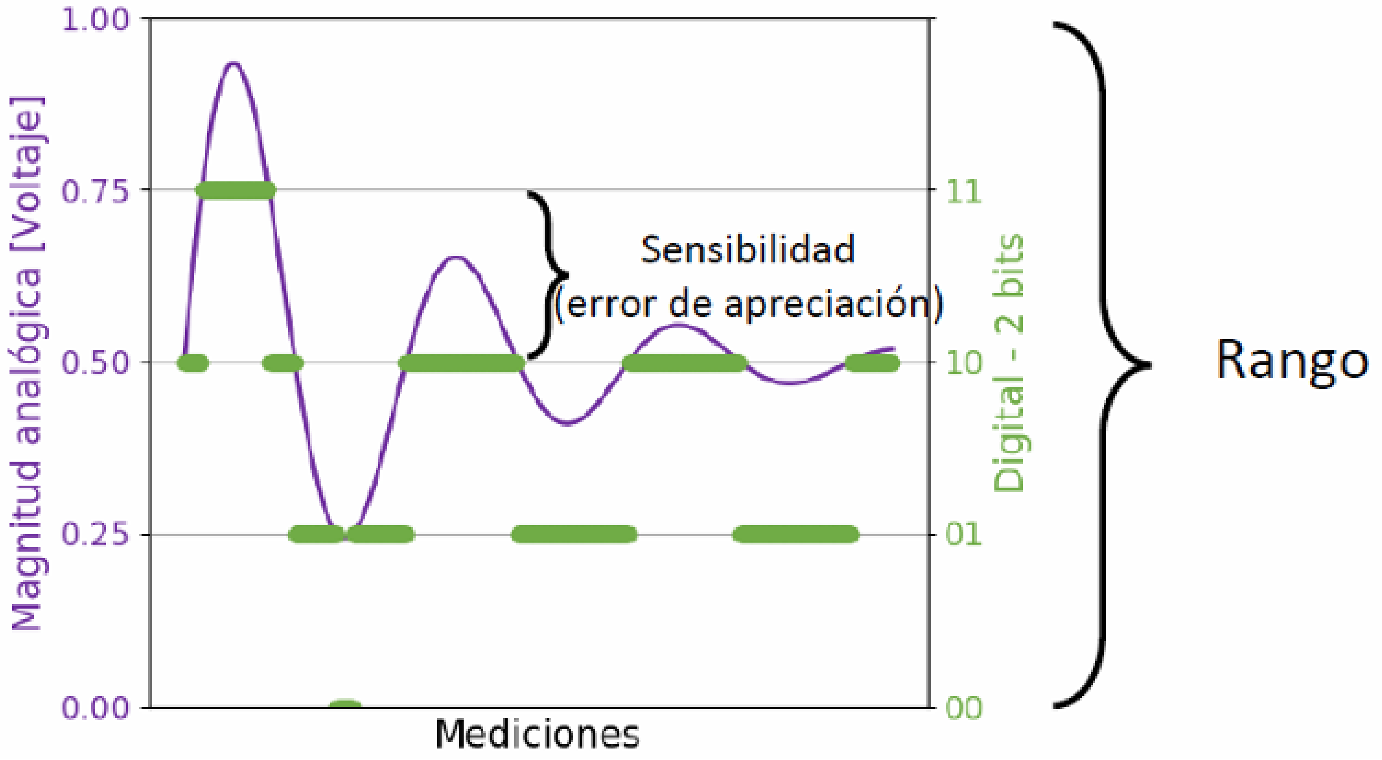
$$Sensibilidad = \frac{Rango\ operativo}{2^N}$$

N: número de bits



Digitalización de los datos

La **cantidad de bits** del conversor, determina la **resolución** de la señal.



Digitalización de los datos

La **frecuencia de muestreo** determina la **resolución temporal** de la digitalización.

Existe una discretización horizontal de la señal, es decir en el tiempo.

El parámetro que determina esa discretización se denomina **frecuencia de muestreo (f_s):** "Cuántos datos adquiero en 1 segundo". Cuanto más alta la frecuencia de muestro, mayor resolución temporal, pero a la vez más datos que adquirir y almacenar.

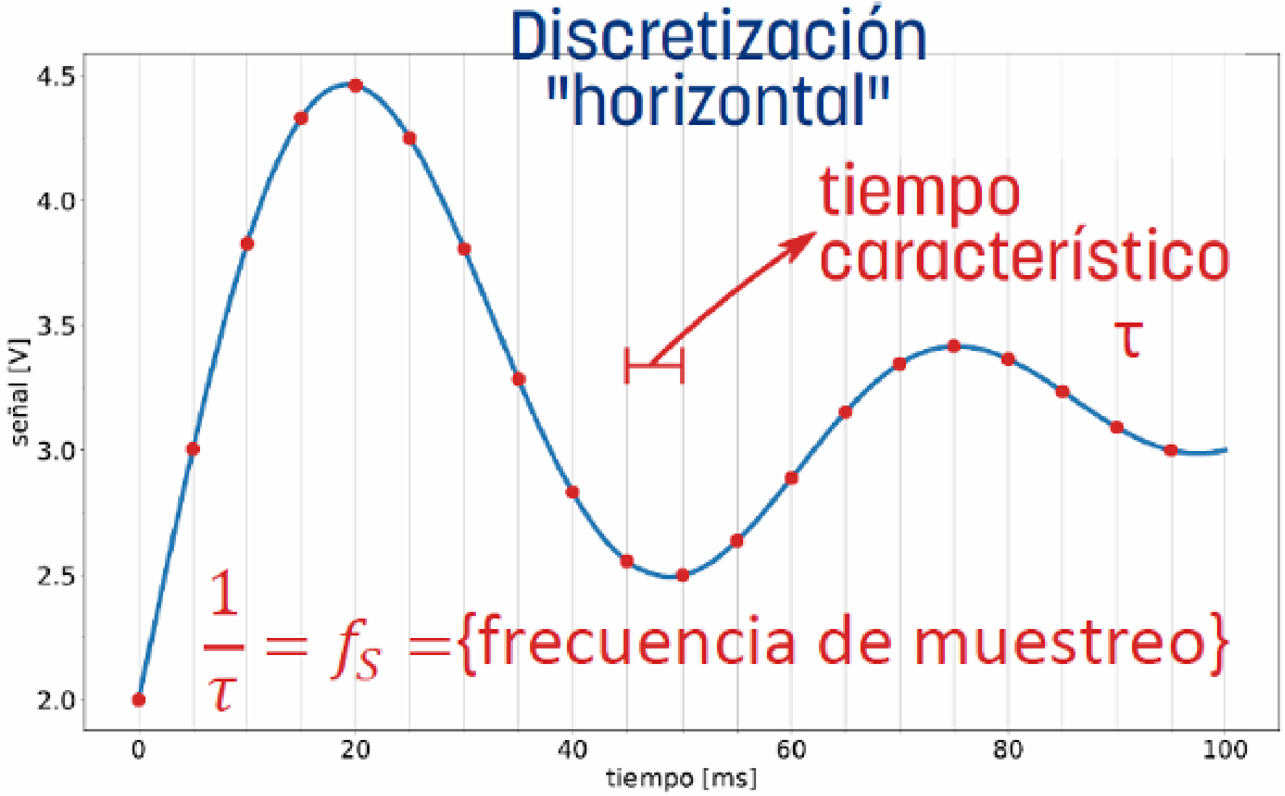
El tiempo entre dos datos consecutivos se denomina **tiempo o período de muestreo** (τ), y también es una medida de la resolución temporal. Cuanto más pequeño, mayor resolución.

$$\boxed{\tau = \frac{1}{f_s}}$$

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física

Digitalización de los datos

La **frecuencia de muestreo** determina la **resolución temporal** de la digitalización.



Digitalización de los datos

La **frecuencia de muestreo** determina la **resolución temporal** de la digitalización.

Frecuencia de muestreo [Samples / second]

Persona

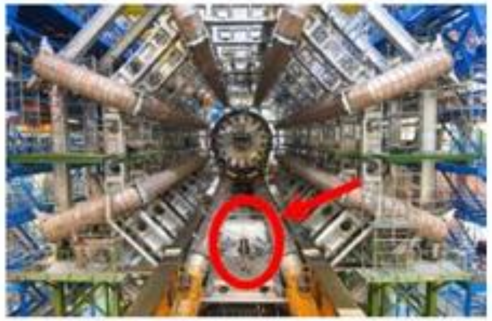
1 S / s

Arduino Uno

10 kS / s

App Phyphox Audio

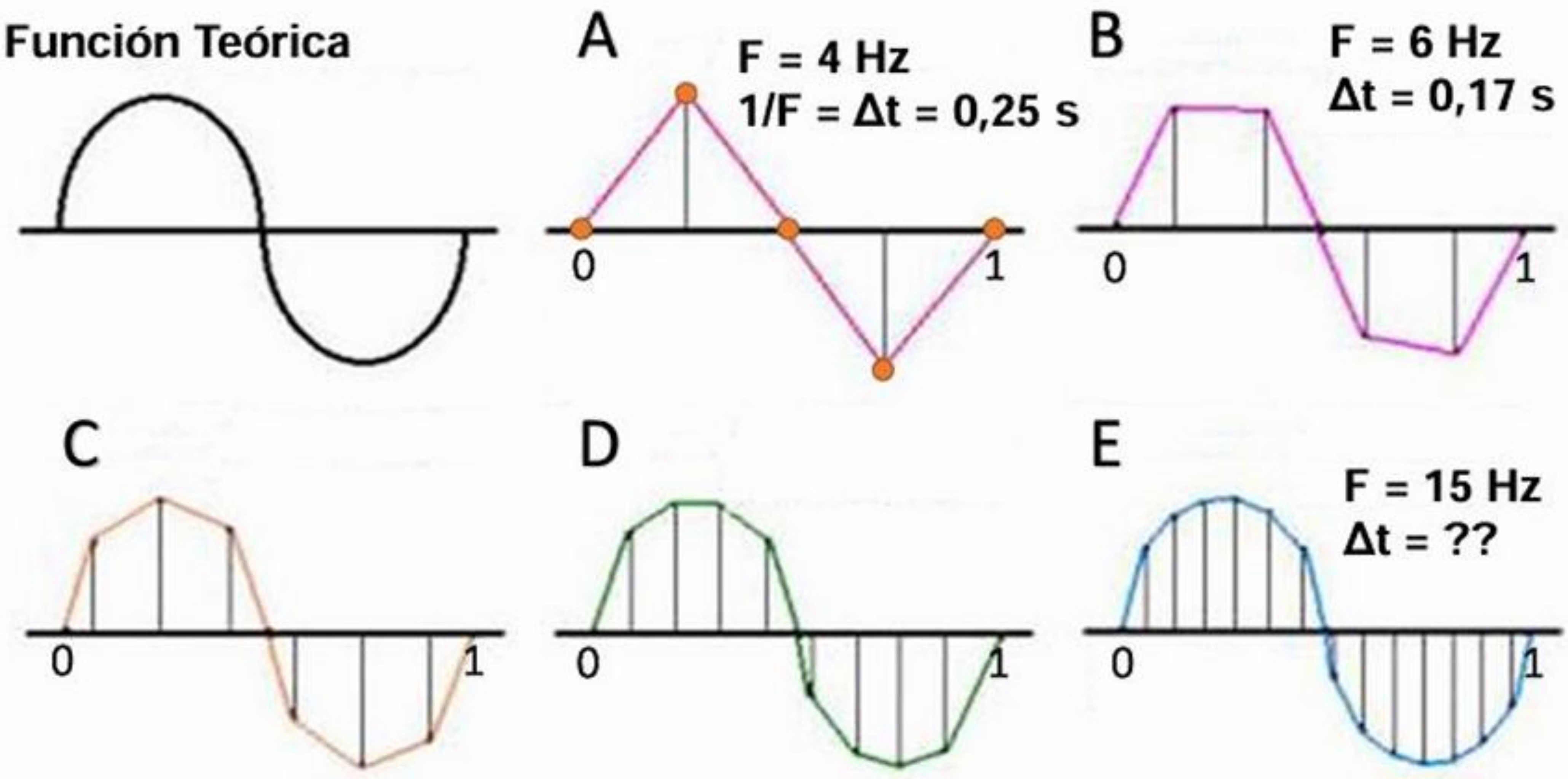
48 kS / s



Detector de partículas ATLAS en el CERN

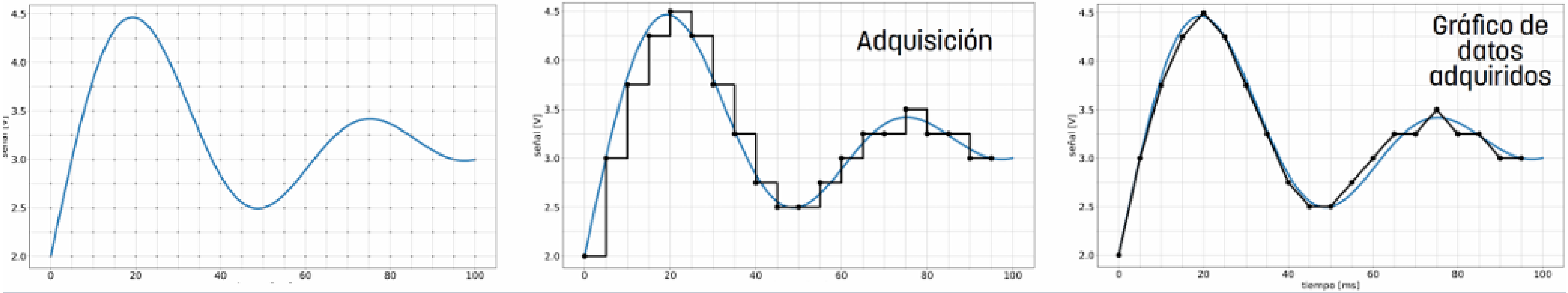
1 petabyte / s
(1024 terabytes)

Frecuencia de muestreo y resolución temporal

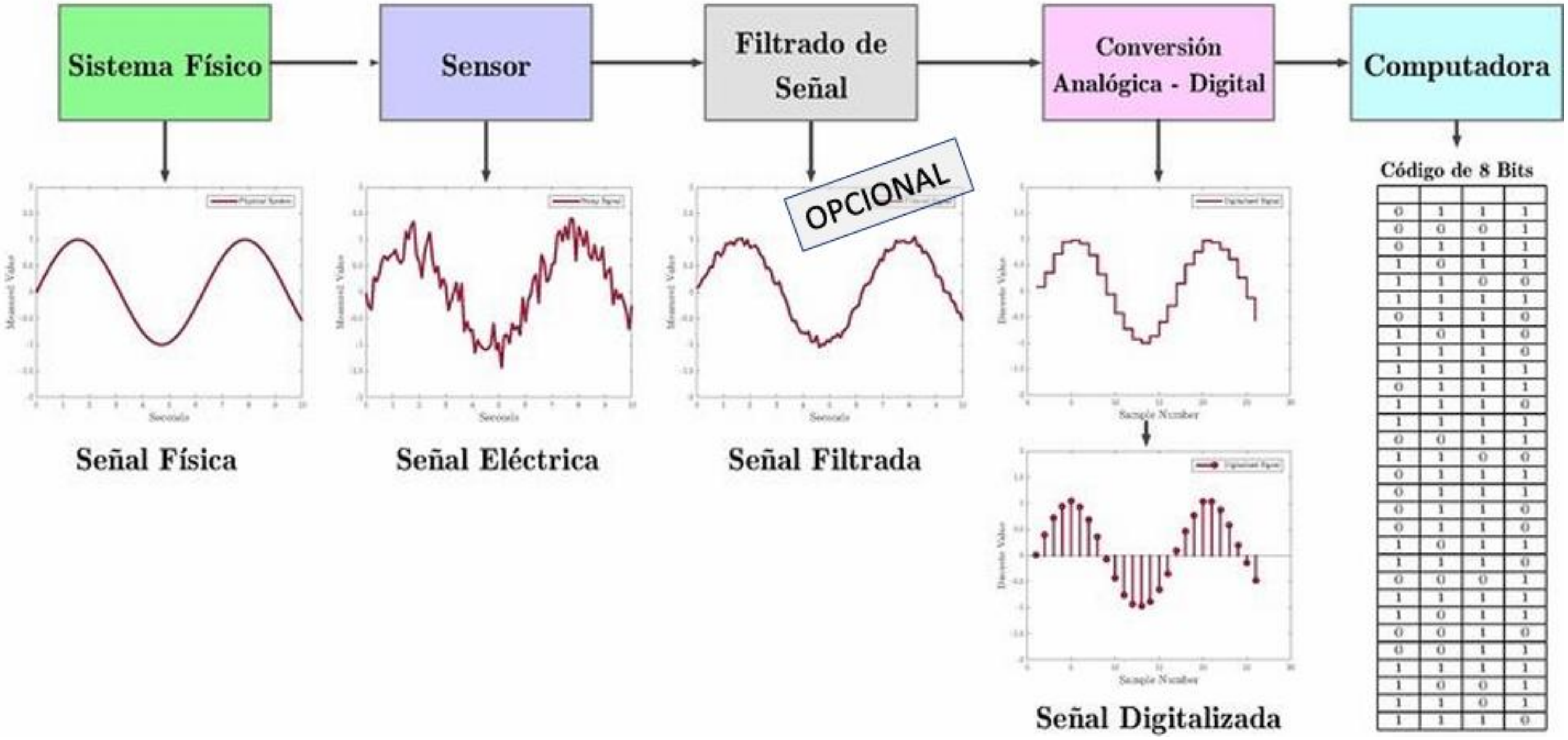


Resumen digitalización de los datos

Magnitud (°C, N, m, s) → Calibración (Transductor) → **Señal Eléctrica (V)**



Sistema Digital de Adquisición de Datos



0	1	1	1
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	1	1
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	0
0	0	0	1
1	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	0

El conversor A/D en el laboratorio

- Resolución (tensión): 13 bits
- Frecuencia de muestreo máxima: 48000 Hz
- 3 canales analógicos, 1 digital

Adquisición de datos

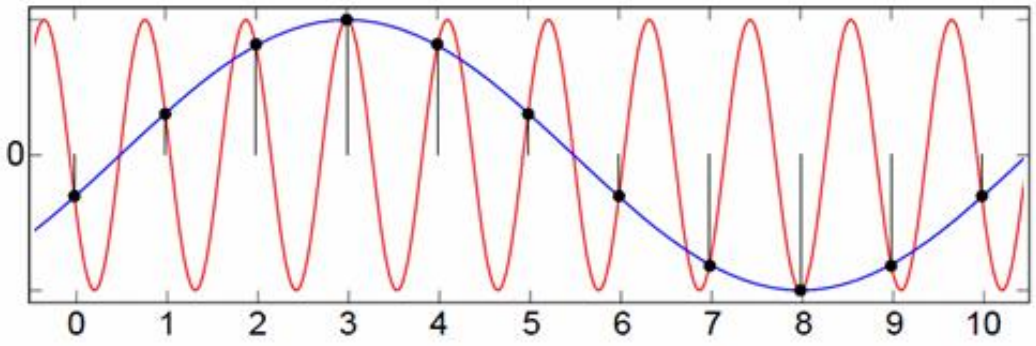
Limitaciones

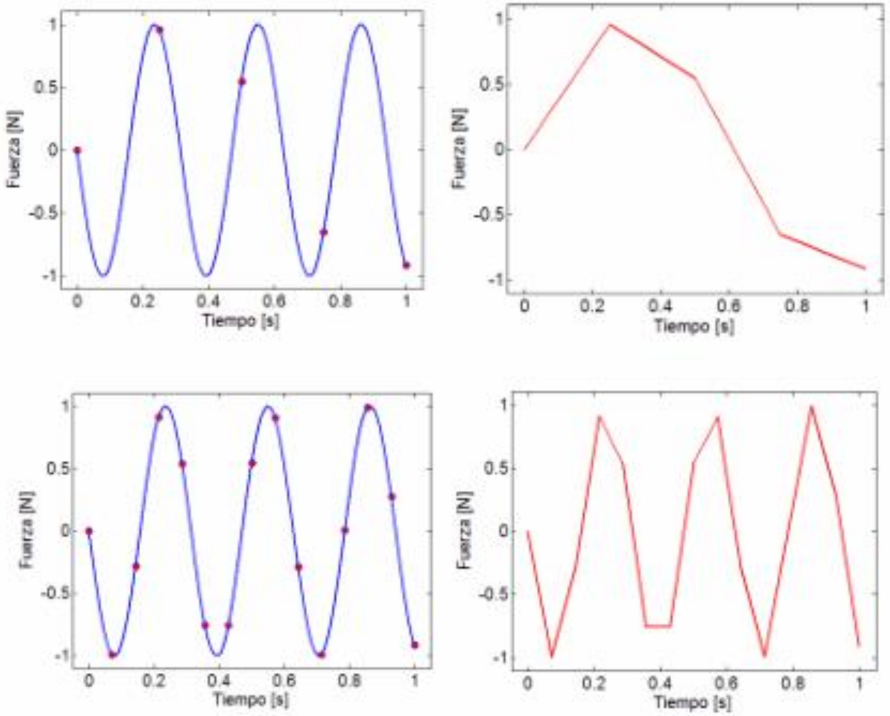
Aliasing

Teorema de Nyquist

"Para reconstruir adecuadamente una señal, se debe emplear una frecuencia de muestreo tal que sea, como mínimo, el doble de la frecuencia de la señal"

- Si mi frecuencia de muestreo es baja, aliasing.





- Para evitarlo: criterio de Nyquist.

$$f_s \geq 2 f_{max}$$

del fenómeno estudiado

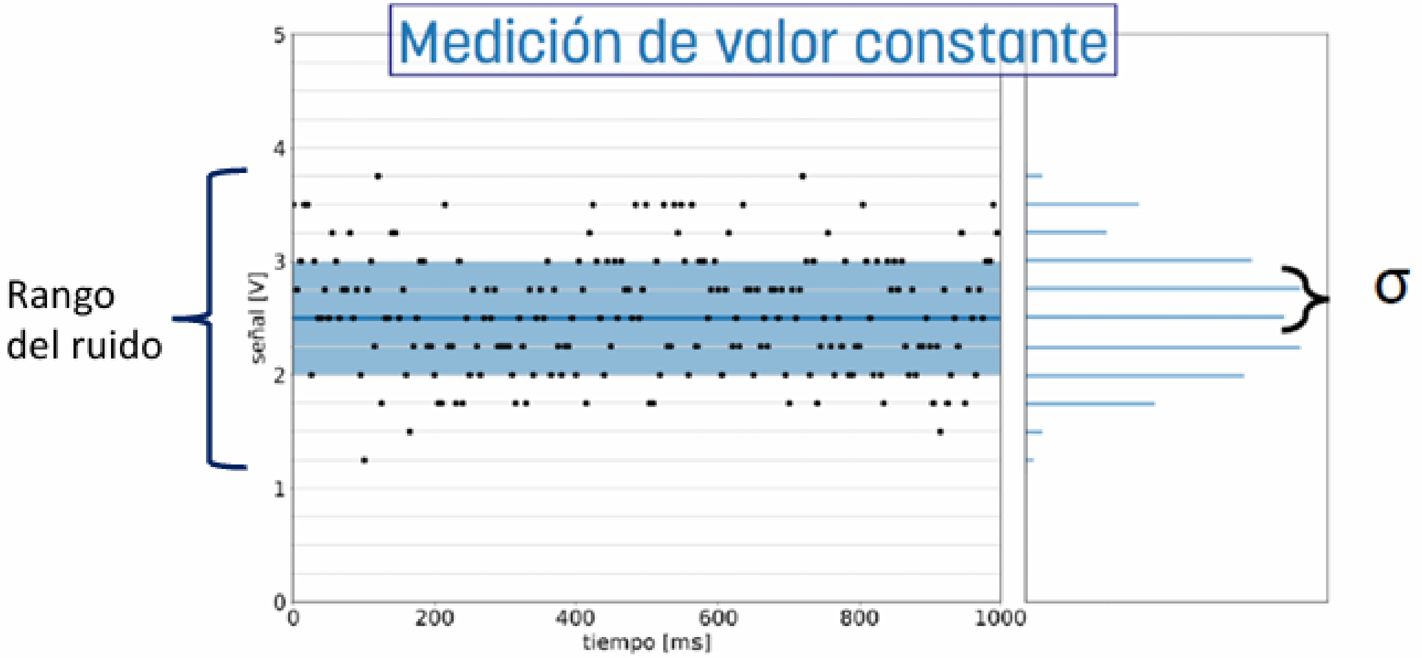
En general el criterio es usar una f_s que nos permita ver bien nuestra señal.

Adquisición de datos

Limitaciones

Ruido

La incerteza no siempre está determinada por la sensibilidad unívocamente



Resumen - Machete

Una señal **analógica** (continua) de una magnitud física se convierte en una señal eléctrica y mediante un dispositivo se convierte en una señal **digital** (discreta)

La cantidad de bits (estado binario 1 o 0) del conversor, determina la resolución de la señal. Se define **sensibilidad** como: $Sensibilidad = \frac{Rango\ operativo}{2^N}$

La **frecuencia de muestreo** (f_s) se define como la cantidad de datos que se adquieren por segundo y su unidad son los Hz (1/s). Determina la resolución temporal de la digitalización. El período de muestreo se calcula como la inversa de la frecuencia de muestreo y determina el intervalo de tiempo entre datos consecutivos: $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f_s}}$. En señales oscilatorias, baja f_s genera aliasing. Muy alta f_s genera exceso de datos y destaca el ruido. Criterio de Nyquist: $f_s > 2f_{máxima\ del\ fenómeno\ medido}$

Pasos necesarios para adquirir datos digitalmente:
- Determinar **rango** y **resolución** del sensor. **Calibrar el transductor**.
- Determinar **sensibilidad** de la placa de adquisición (conversor A/D).
- Elegir adecuadamente la **frecuencia de muestreo**. Determinar error temporal.
- Asegurarse de que no se produzca aliasing ni saturación.
- Estimar el error de la magnitud medida estudiando el ruido de la señal.

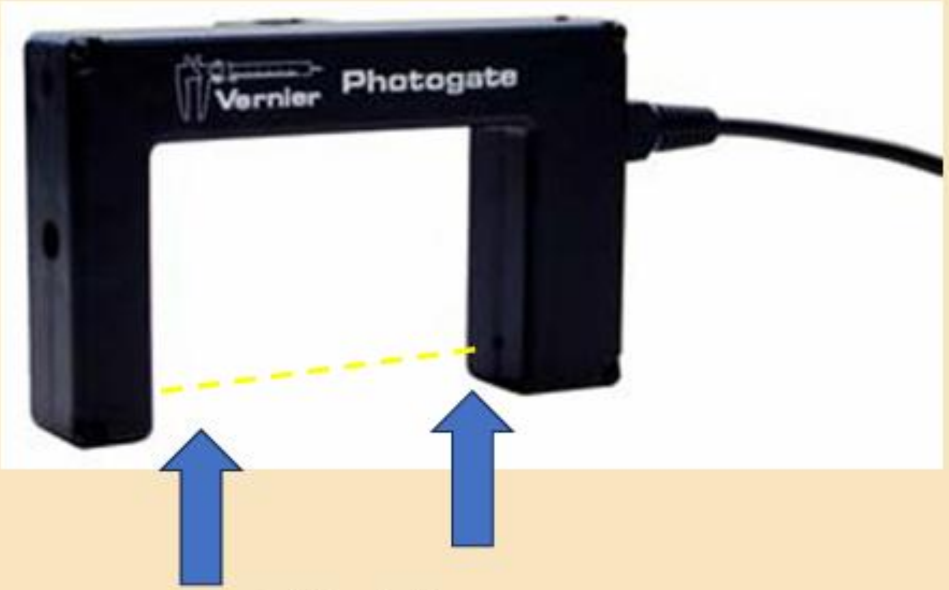
Sensores utilizados en Labo 1

Photogate

- Determina si algo está obstruyendo o no el camino del sensor.

- **Cómo funciona**: emite un pulso infrarrojo y del otro lado tiene un detector de IR. Si lo detecta emite una señal continua cercana a los 5V, si no lo detecta porque se obstruye el paso del haz, la tensión baja a un valor cercano a cero.

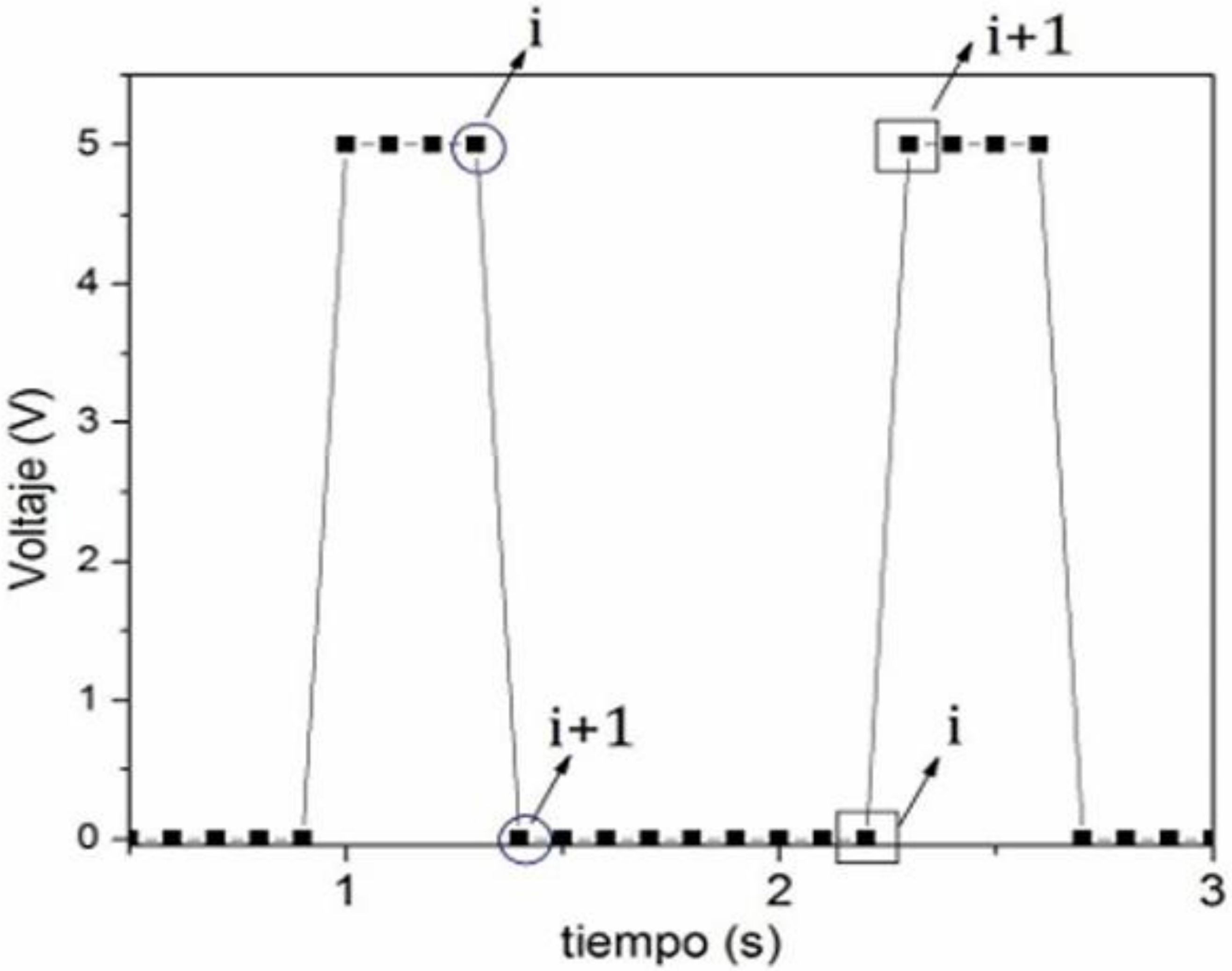
- Su señal de salida es **analógica.**



Salida del haz y detector IR

- Obtenemos entonces señales en forma de escalón, según si está obturado o no. La idea es no obtener puntos intermedios, y para eso hay que asegurarse de que la frecuencia de muestreo sea tal que nunca vemos lo momentos de semi-obturación del haz

Photogate



- En este caso, la salida que interesa son los tiempos en los que ocurre el evento, y no el valor de voltaje de salida.
- Ver documento sobre cómo calcular velocidades a partir de estas señales.

Actividad día 1

Actividad 1: Determinación de g a partir de la medición del período de un péndulo

En esta primera parte se propone construir un péndulo simple e investigar la dependencia del período de oscilación T con la longitud L del péndulo.

Procedimiento y mediciones:

a) Construya un sistema físico que se aproxime a un péndulo simple, cuya longitud L pueda variarse fácilmente. ¿Qué cuidados debe tener al poner en movimiento el péndulo? ¿Cómo puede garantizar repetitividad de los experimentos? ¿Qué amplitudes angulares iniciales corresponden a las hipótesis asumidas? ¿Qué otras condiciones deben cumplirse para que el sistema se comporte como un péndulo simple?

b) Mida el período del péndulo T con buena estadística, es decir, realizando un número suficiente de mediciones que le permitan asegurar un error relativo porcentual inferior al 5%. Repita el procedimiento para 10 longitudes distintas del péndulo, manteniendo constantes los demás parámetros del montaje experimental.

Usando el photogate y el conversor A/D, ¿cómo podemos obtener varias mediciones del período del péndulo para cada L?

Una vez que las tenemos, ¿qué podemos explorar?

¿Cómo es la relación entre las variables medidas?

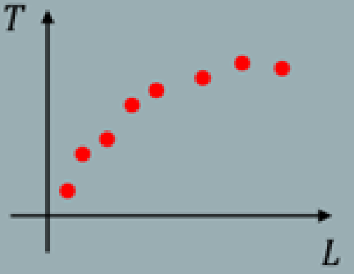
Propuesta: ver la relación entre dos variables y graficar

PÉNDULO: ¿Cómo varía T a medida que varía L?

Modelo no lineal

Modelos lineales: $y = mx + b$

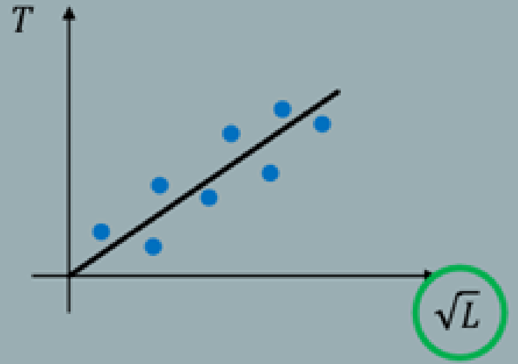
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L}$$

$$T = A\sqrt{L}$$

siendo $A = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$

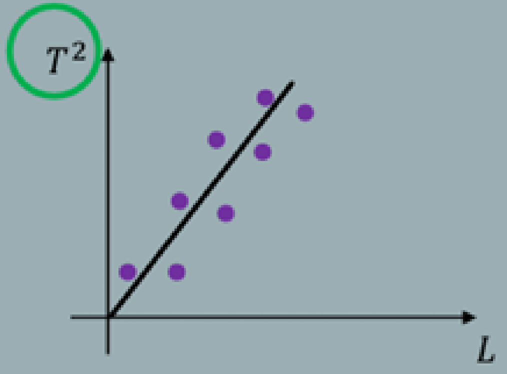


$u = \sqrt{L}$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$$

$$T^2 = B\,L$$

siendo $B = \frac{4\pi^2}{g}$



$v = T^2$

Experimento: medir el período del péndulo para $\neq L$

- Medir para 10 longitudes distintas (a partir de los 30 cm).
- Variar en un rango lo más amplio posible y en valores aproximadamente equidistantes.

Material Adicional

1. Guía rápida sobre MotionDAQ
2. Información sobre el sensor Photogate
3. Apunte para uso del photogate y el motion DAQ
4. Apunte para calcular el período del péndulo a partir de mediciones con fotosensor. Instructivo para Origin

A MEDIR…

YA MEDIMOS Y GRAFICAMOS.. Y AHORA QUÉ?

Modelado por el Método de Cuadrados Mínimos

Relación entre dos medidas:

Empleo un modelo que mejor relacione las variables (que mejor aproxime a mis datos experimentales)

Caso más sencillo

Modelo Lineal

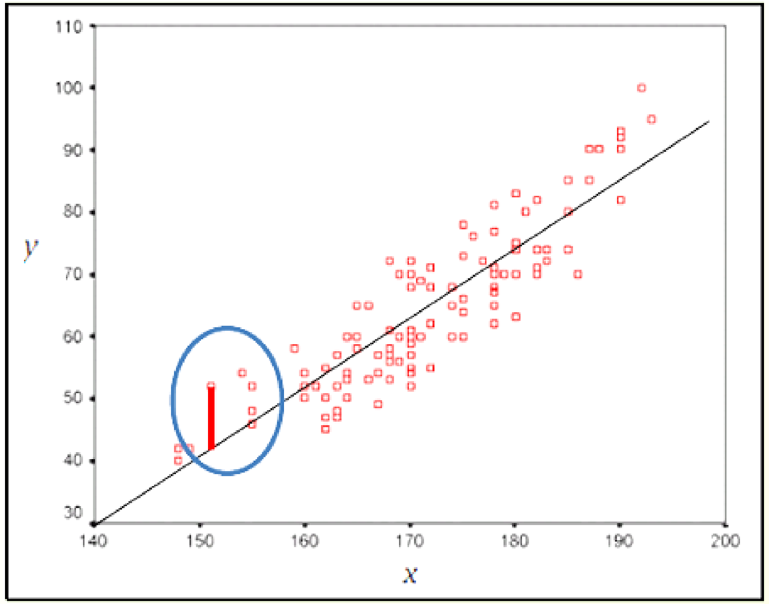
¿Por qué modelar?

- Se puede observar la relación entre las variables.
- El resultado es más representativo del sistema que tomar un único caso.
- Reducimos posibles fuentes de errores.
- Permite verificar la teoría.
- Se pueden realizar predicciones para la magnitud física fuera del rango de medición.

Caso más sencillo

Modelo Lineal

Tomamos una serie de medidas (x_i, y_i)



Partamos asumiendo que la relación es:

$$y = mx + b$$

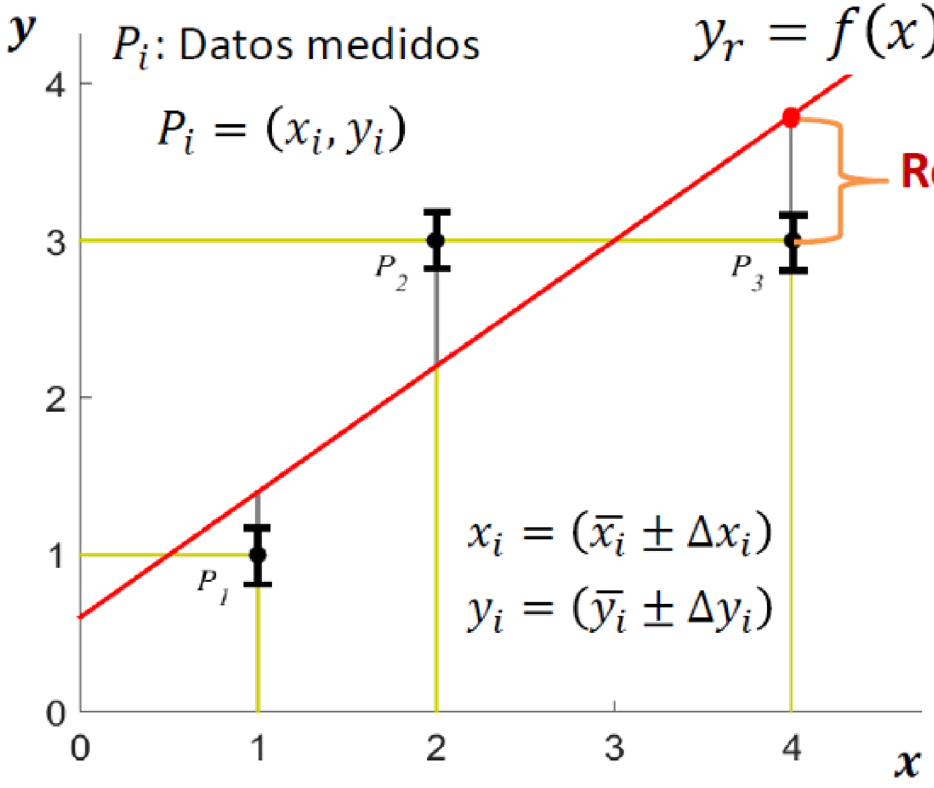
Caso aún más sencillo: Considerando la Distancia en "y"

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo en el eje "y"

Buscamos encontrar los parámetros m y b que minimicen la distancia de los datos al modelo

Considerando la Distancia en "y"

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Residuos (δ_i) ➡ $\delta_i = y_i - y_r$

Experimental **Recta**

Hipótesis:

$$\varepsilon_{ry} \gg \varepsilon_{rx}$$

$$\varepsilon_{ry} = \left|\frac{\Delta y}{y_o}\right|$$

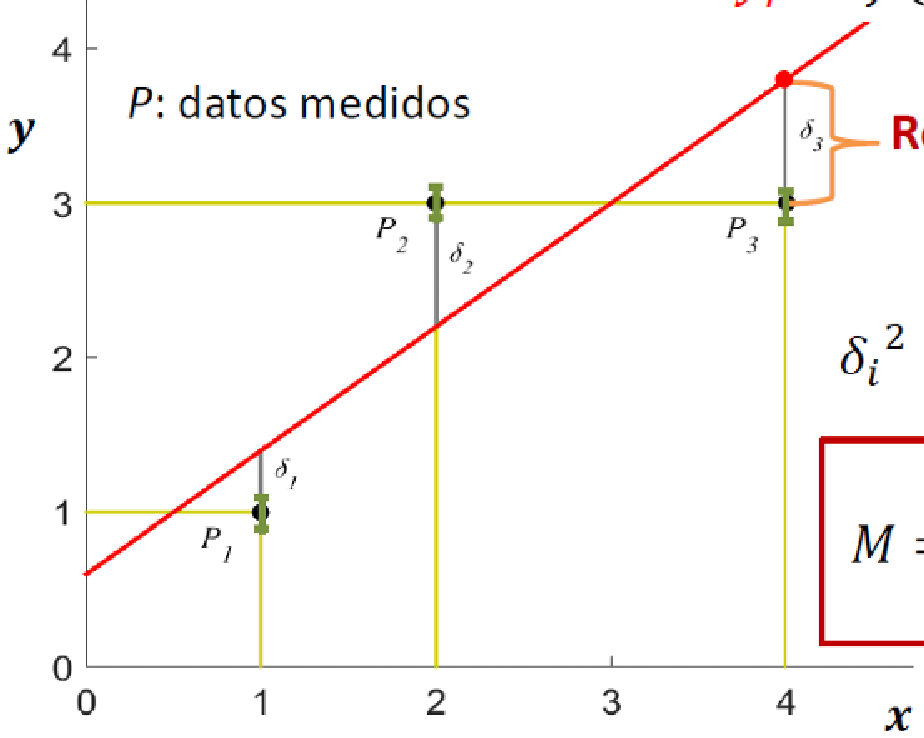
D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2

Caso A

Cuadrados mínimos **NO Ponderados**

Cuando todos los datos en "y" tienen igual incerteza

$$y_r = f(x) = mx + b$$



Residuos (δ_i) ➡ $\delta_i = y_i - y_r$

Experimental **Recta**

$$\delta_i{}^2 = [y_i - y_r]^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2$$

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i{}^2 = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2}$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

¿Cómo encontramos los parámetros m y b?

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos

$$M(m,b) = \sum_i y_i^2 + m^2 \sum_i x_i^2 + Nb^2 + 2mb \sum_i x_i - 2m \sum_i x_i y_i - 2b \sum_i y_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial m} = 0 \longrightarrow 2m \sum_i x_i^2 + 2b \sum_i x_i - 2 \sum_i x_i y_i = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = 0 \longrightarrow 2Nb + 2m \sum_i x_i - 2 \sum_i y_i = 0 \end{cases}$$

2 ecuaciones y
2 incógnitas

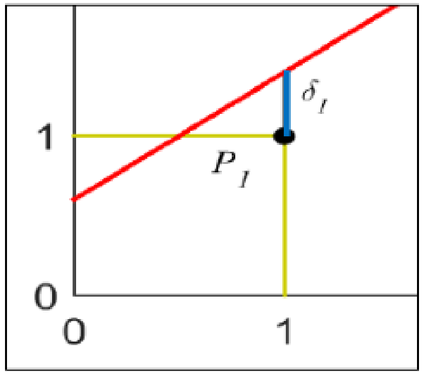
$$\boxed{m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}$$

¿Cómo encontramos S_m y S_b?

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

Propagación de errores!! ⇒ *D. C. Baird. Prentice Hall (1991). Apéndice 2*



Estamos evaluando la incerteza en el eje y

→ *Hipótesis:* Consideremos a la incerteza como δ_i

$$\boxed{S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}} \qquad \boxed{S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum x_i}{N\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}}} \quad \dashrightarrow \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

⇒ Calculamos las incertezas de forma exacta

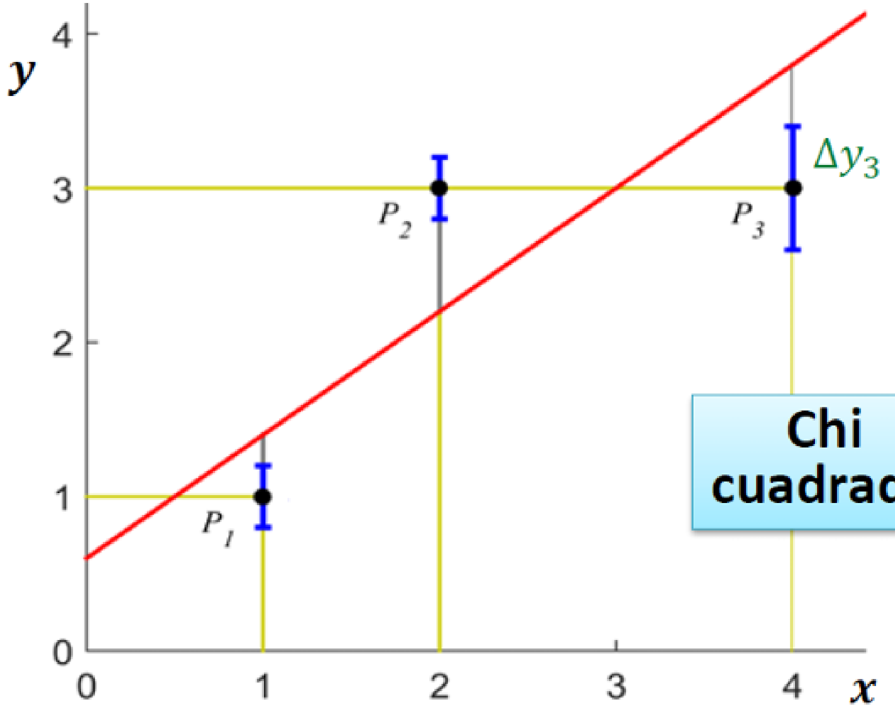
Válido cuando todas las medidas de y tienen igual precisión

Caso B

Cuadrados mínimos **Ponderados**

Cuando todos los datos en "y" tienen diferente incerteza

$$y = f(x) = mx + b$$



Hipótesis: **Considera a las medidas más precisas como las más relevantes**

Chi cuadrado

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Minimizar la Suma de los Cuadrados de los Residuos
Normalizados al error de cada medida

Si confiamos más en algunos puntos que en otros

Cuadrados mínimos ponderados

Obtengo m y b despejando (2 ecuaciones y 2 incógnitas):

$$b = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i^2 - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i^2 - \left(\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i\right)^2}$$

$$m = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} (x_i y_i) - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i^2 - \left(\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i\right)^2}$$

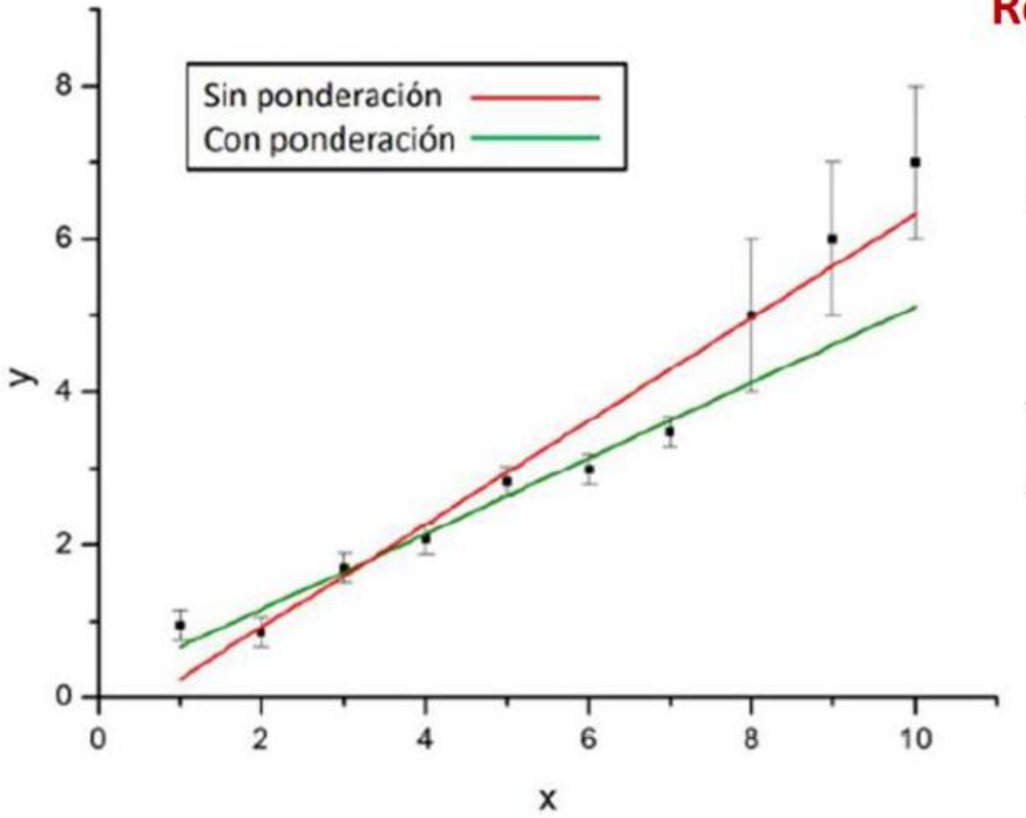
$$S_m{}^2 = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2}\right)^2}$$

$$S_b{}^2 = \frac{\sum \frac{x_i y_i}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2}\right)^2}$$

Lo importante es que puedo calcular estos valores de manera **EXACTA**

SIN Ponderación vs CON Ponderación

Se pondera cuando las incertezas absolutas de la MF que se asigna al eje "y" tienen diferente precisión



Residuos (δ_i) ➡ $\delta_i = y_i - y_r$

SIN

$$M = \sum_{1}^{N} [y_i - (mx_i + b)]^2$$

CON

$$\chi^2 = \sum_{1}^{N} \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i} \right]^2$$

Al ponderar, considera más relevantes a las medidas más precisas

¿Cómo determinamos si el ajuste es “bueno”?
¿Qué medidas podemos evaluar y comparar?

Parámetros de BONDAD

Los Parámetros de Bondad pueden darnos una idea de la ***discrepancia entre los valores observados*** *(datos experimentales)* ***y los esperados según el modelo de estudio***

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)

Indica cuán fuerte es la correlación entre las variables X e Y

¿Existe algún patrón entre ellas?

$$\boxed{r = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}}$$

$$Var(x) = {S_x}^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$Var(y) = {S_y}^2 = \frac{1}{N}\sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$\boxed{-1 \leq r \leq 1}$$

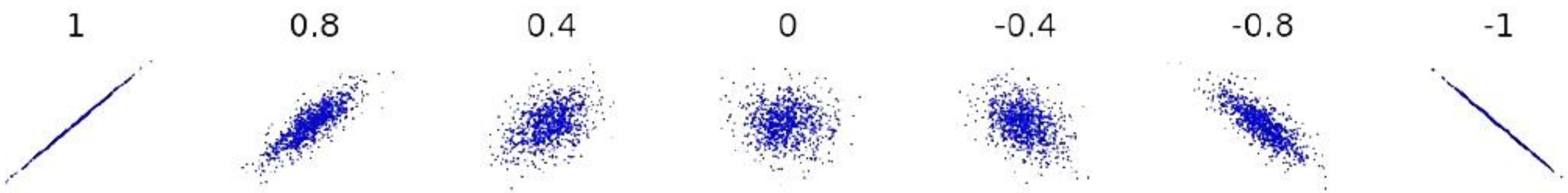
$$Cov(x,y) = S_{xy} = \frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Se espera que $|r| \sim 1$

Cálculo del Correlación de Pearson en Python: **corrcoef()**

Parámetros de BONDAD

Coeficiente de Correlación de Pearson (r)



•**Si r = 1:** Correlación positiva perfecta. El índice refleja la dependencia total entre ambas dos variables, la que se denomina relación directa: cuando una de las variables aumenta, la otra variable aumenta en proporción constante.

•**Si 0 < r < 1:** Refleja que se da una correlación positiva.

•**Si r = 0:** En este caso no hay una relación lineal. Aunque no significa que las variables sean independientes, puede haber relaciones no lineales entre ambas.

•**Si -1 < r < 0:** Indica que existe una correlación negativa.

•**Si r = -1:** Indica una **correlación negativa perfecta** y una dependencia total entre ambas variables lo que se conoce como **"relación inversa"**, que es cuando una de las variables aumenta, la otra variable disminuye en proporción constante.

Vamos a usar el coeficiente de determinación R^2

En el caso de los modelos lineales, es igual al coeficiente de Pearson al cuadrado

$$R^2 = \frac{\sigma^2_{XY}}{\sigma^2_X \sigma^2_Y} = \rho^2$$

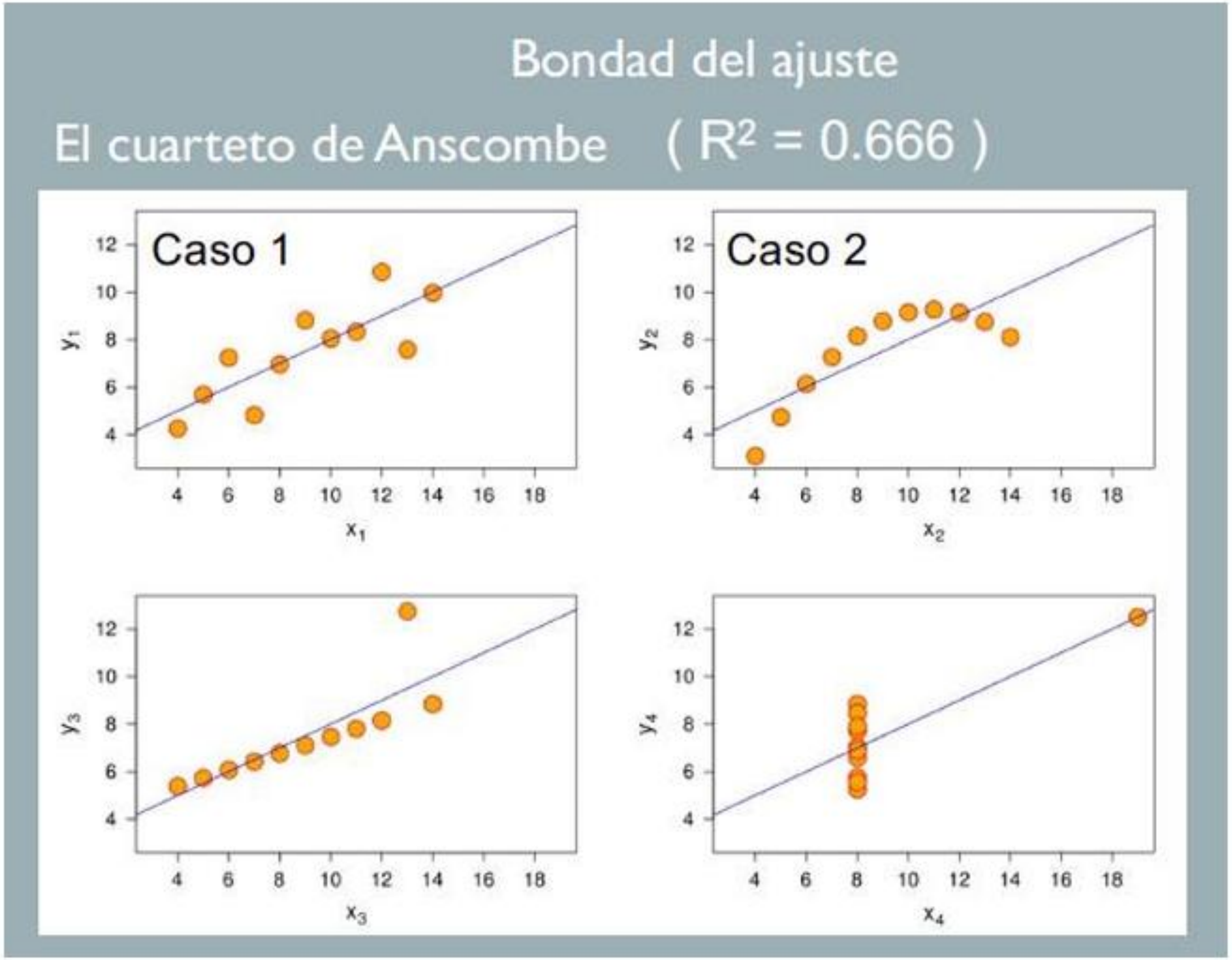
$$\rho^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sigma_r^2}{\sigma_y^2}$$

Donde:

- σ_{XY} es la covarianza de (X, Y)
- σ^2_X es la varianza de la variable X
- σ^2_Y es la varianza de la variable Y

R^2 está entre 0 y 1
Cuanto más cerca de 1, mayor es la correlación

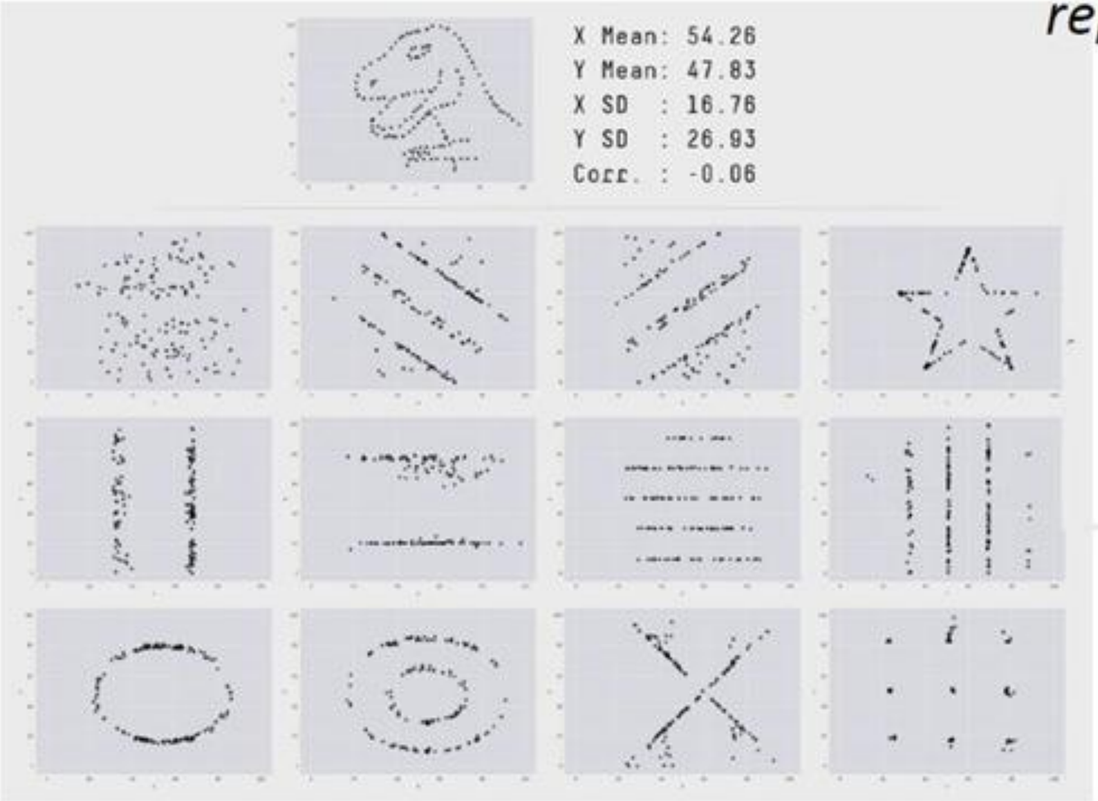
Pero ojo! el R^2 solo no alcanza para determinar la bondad de un ajuste

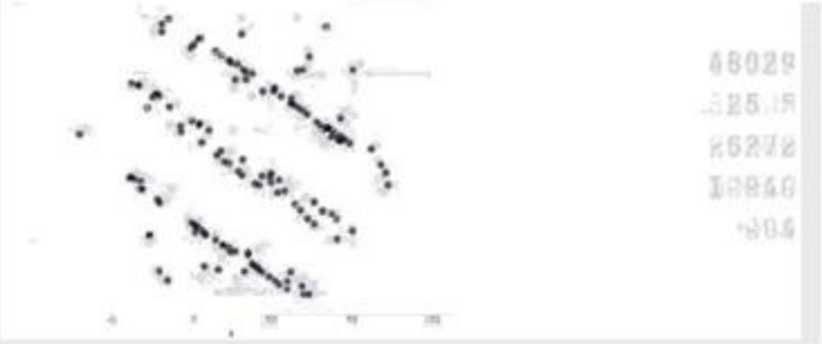


Estos casos tienen los MISMOS Parámetros Estadísticos!!!

Datasaurus dozen

... pero que producen gráficos diferentes
Por eso la IMPORTANCIA de las representaciones gráficas



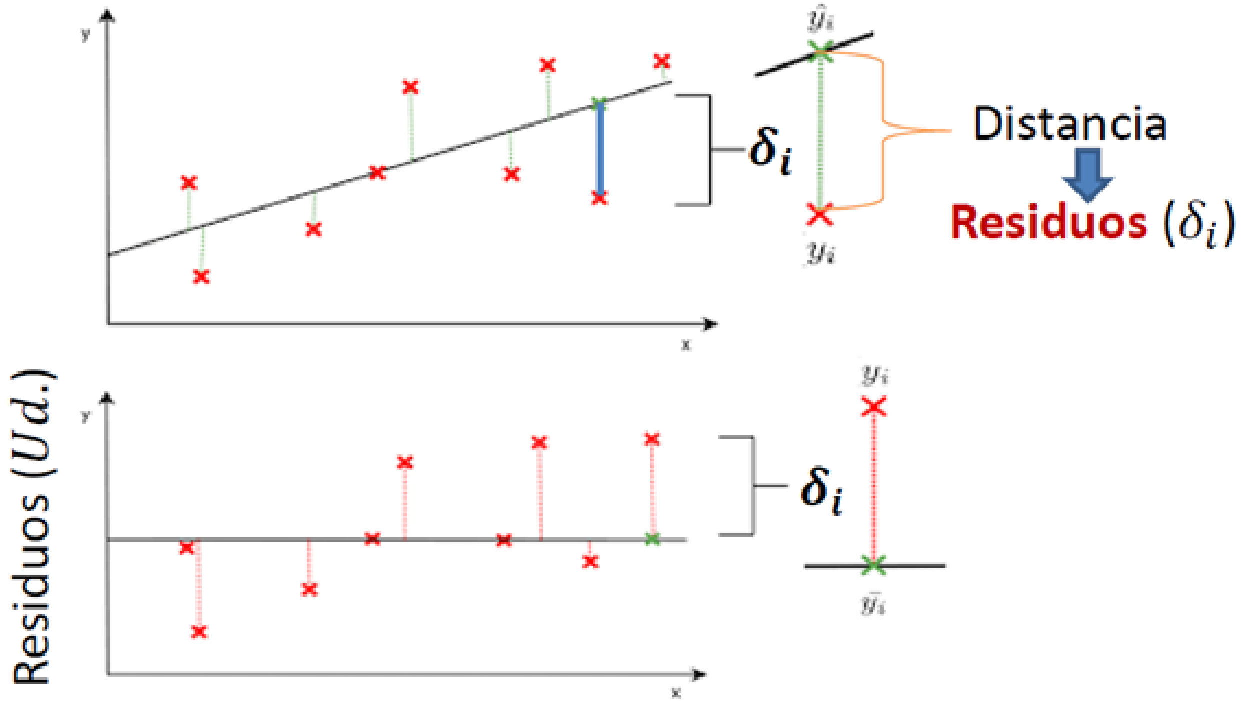


https://www.autodesk.com/research/publications/same-stats-different-graphs

Parámetros de BONDAD

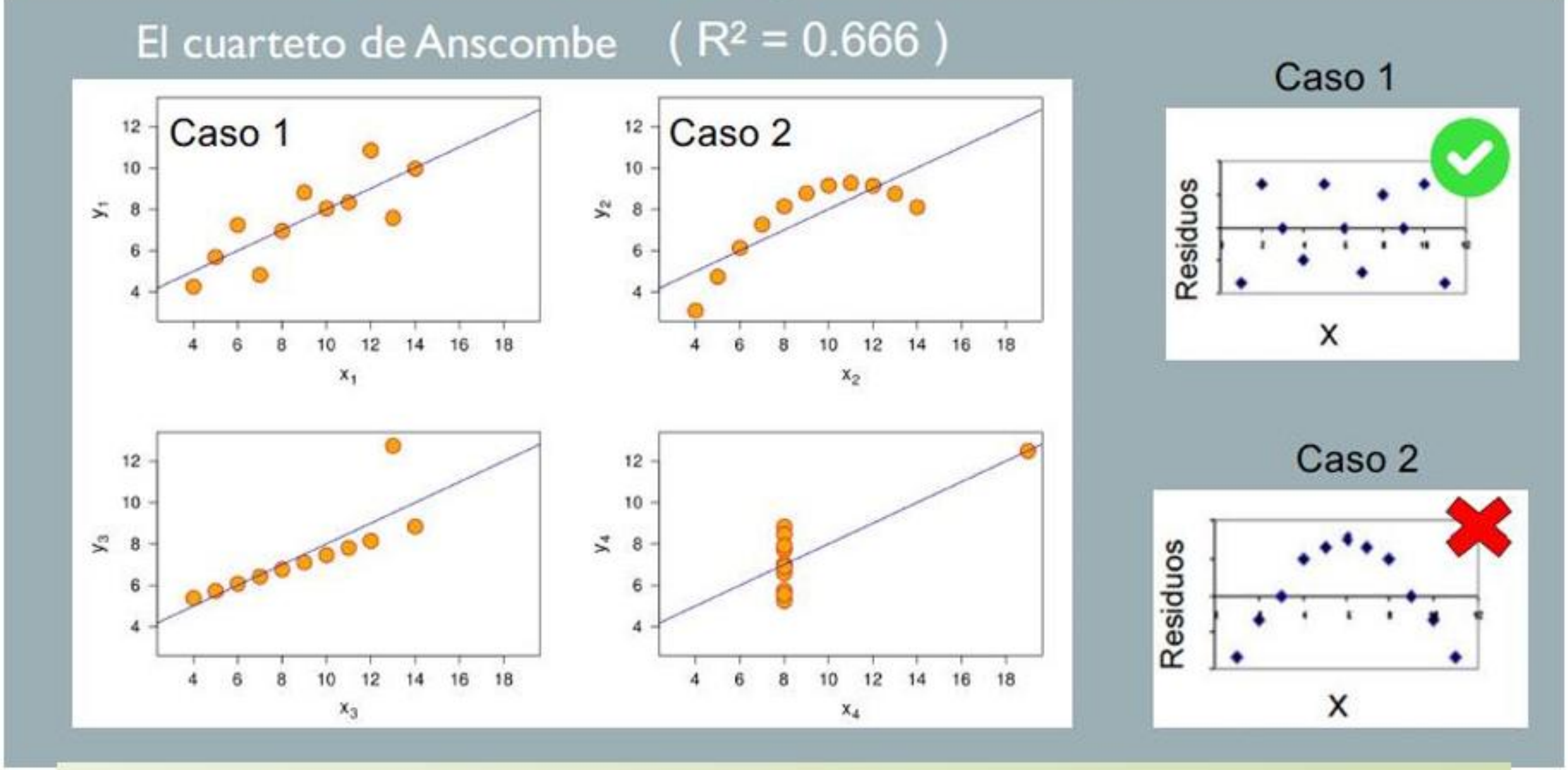
Gráfico de Residuos

Distancia de los puntos experimentales a la recta, en “y”



Los residuos deben ser datos distribuidos en forma aleatoria alrededor del cero.
NO DEBEN tener ESTRUCTURA

También tenemos que observar el gráfico de residuos y ver si tienen estructura



En los casos 2, 3 y 4 la distribución de los datos alrededor de la recta no es normal. **Los residuos tienen estructura**

Por último, necesitamos una medida que nos dé información sobre nuestra estimación de incertezas: χ_ν^2(chi cuadrado reducido)

Dimensiona cuánto difieren los datos experimentales de los del modelo. Pesa fuertemente la incerteza Δy

$$\boxed{\chi^2 = \sum_1^N \left[\frac{y_i - (mx_i + b)}{\Delta y_i}\right]^2}$$

Caso lineal:

N = número de datos

2: los grado de libertad

Chi cuadrado reducido ➡ $\chi_v^2 = \dfrac{\chi^2}{N-2}$

Se espera que χ_v^2

$$\begin{cases} \chi_v^2 \sim 1 & ✓ \\ \chi_v^2 \ll 1 & ✗ \\ \chi_v^2 \gg 1 & ✗ \end{cases}$$

Parámetros de BONDAD

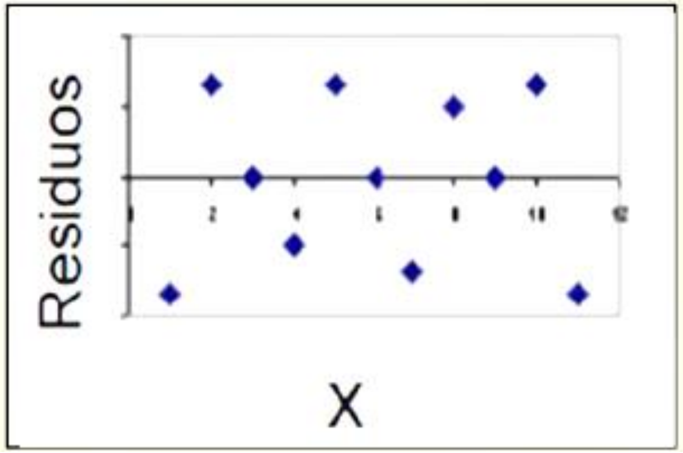
¿Qué esperamos?

Parámetros de BONDAD que nos servirán de ayuda:

Coeficiente de Determinación R^2 → $R^2 \sim 1$

Chi-cuadrado reducido χ^2_v → $\chi^2_v \sim 1$

Residuos Sin ESRUCTURA →



En resumen…

Cuadrados mínimos: es un método matemático para **ajustar** una recta a un conjunto de datos experimentales, de modo que la **diferencia** entre los valores medidos y los predichos por el modelo sea lo más **pequeña** posible.

Si tengo un experimento en el que las variables medibles guardan una relación lineal (o pueden linealizarse), puedo aplicar el método de **cuadrados mínimos** para obtener la recta de mejor ajuste.

Este método me permite extraer **parámetros** físicos a partir de los datos experimentales, junto con sus incertidumbres, de una manera objetiva y reproducible.

Objetivo de la práctica de hoy

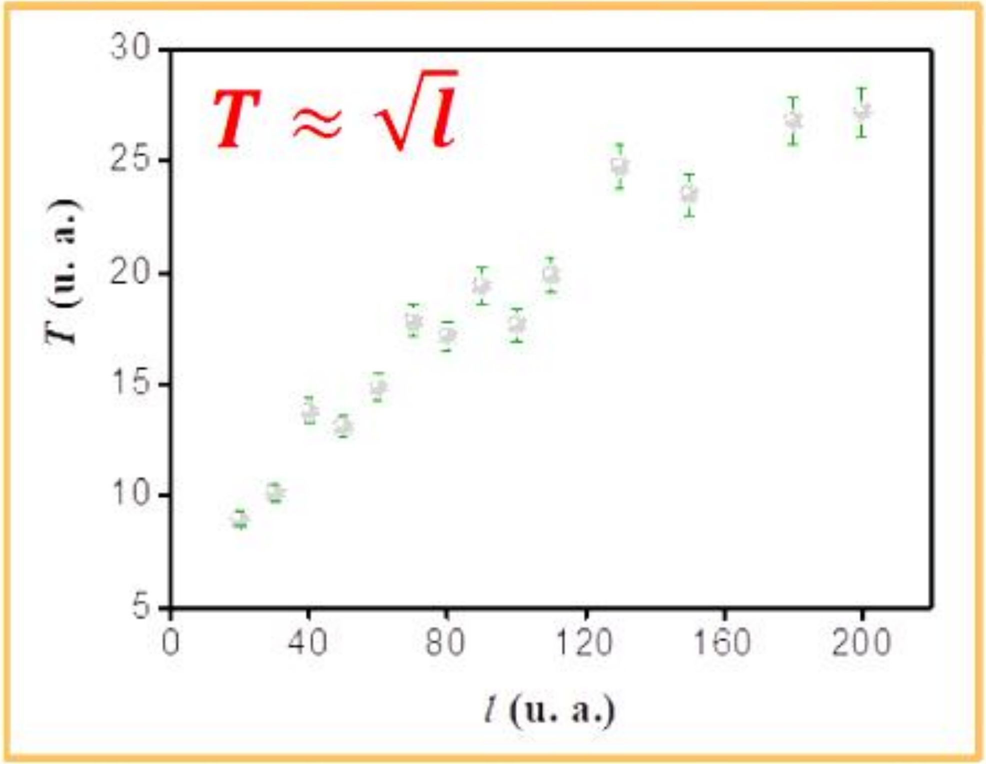
Determinar la aceleración de la gravedad g a partir de los datos del Período de un Péndulo T y su Longitudes l

$$\boxed{g = (\bar{g} \pm \Delta g)\ Ud.}$$

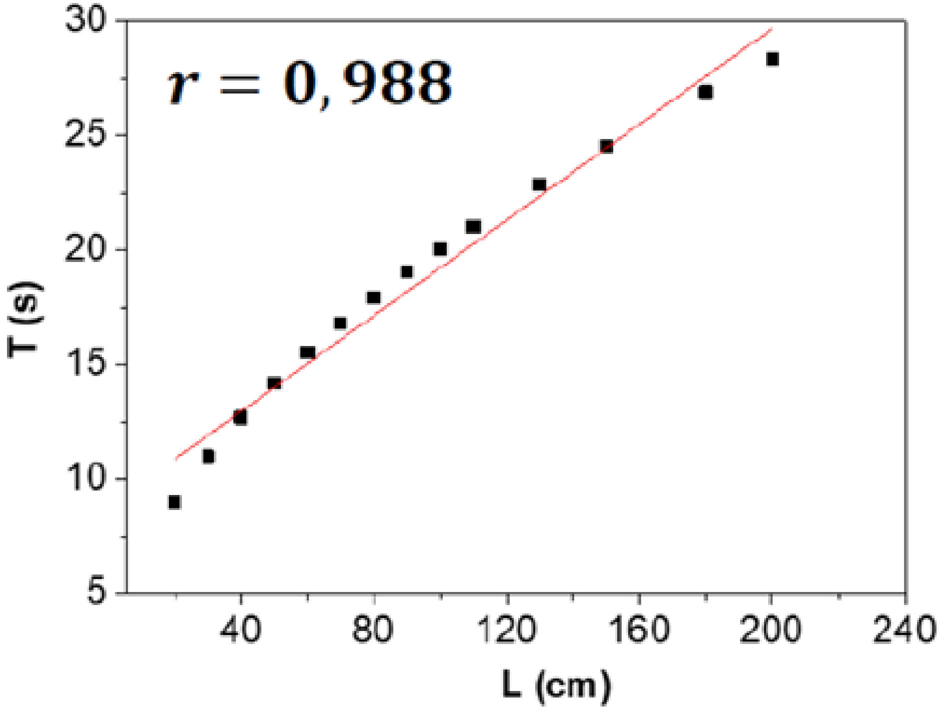
Determinar la aceleración de la gravedad g a partir de T y l de DIFERENTES Péndulos y un MODELO LINEAL DEL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS

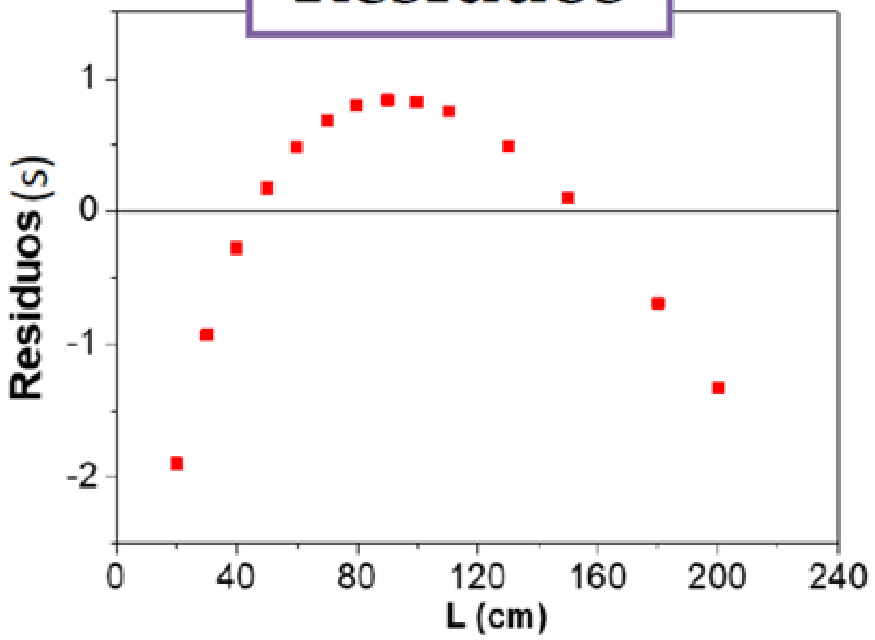
PERO T Y l SE RELACIONAN LINEALMENTE??

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$



Está bien usar el modelo lineal en este caso?





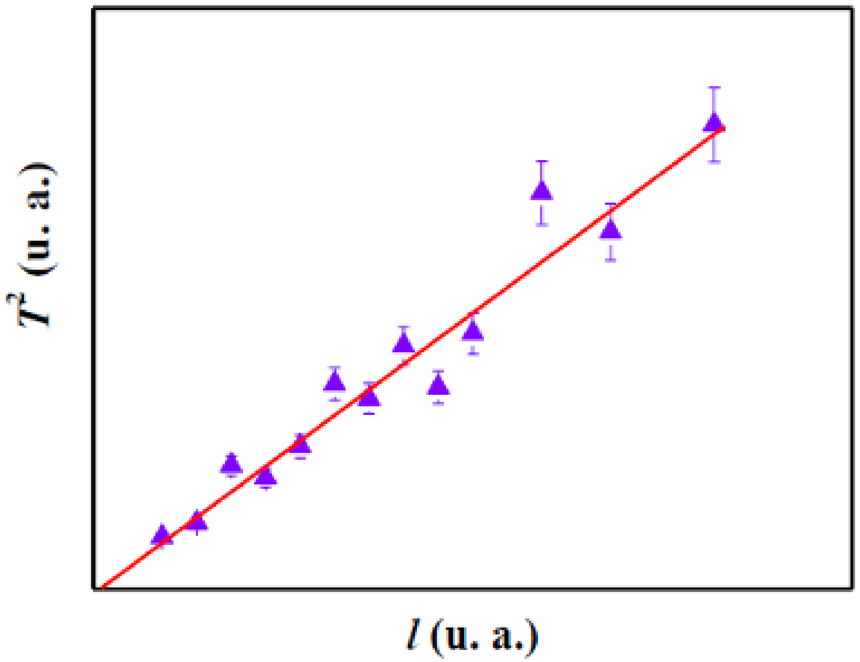
NOOOOOO es lineal!!

¿Cómo utilizo el modelo lineal en una relación NO lineal?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\underbrace{T}_{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\underbrace{\sqrt{l}}_{\tilde{l}}$$

$$\underbrace{T^2}_{\widetilde{T}} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\text{Pendiente}}\underbrace{l}_{l}$$



✓ $y = mx + b$

Queremos obtener: $\boxed{g = (\bar{g} \pm \Delta g)\, Ud.}$

Uno de los dos casos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$$

y x

Pendiente $m = \bar{m} + \Delta m$

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \longrightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

$$\boxed{\bar{g} = \frac{4\pi^2}{\bar{m}}}$$

¿ Δg?

Propago!!

$$\boxed{\Delta y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{y_0} \Delta p\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_{y_0} \Delta q\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{y_0} \Delta r\right)^2 + \cdots}}$$

Son productos y divisiones

$$y = \frac{p}{q} \qquad \frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\frac{(\Delta q)^2}{{q_0}^2} + \frac{(\Delta p)^2}{{p_0}^2}}$$

$$y = p \cdot q \qquad \frac{\Delta y}{y_0} = \sqrt{\frac{(\Delta q)^2}{{q_0}^2} + \frac{(\Delta p)^2}{{p_0}^2}}$$

Análisis:

a) Para el análisis gráfico de datos, construya al menos tres gráficos: uno en el que represente T en función de L, otro en el que muestre T^2 en función de L y otro con T en función de $\sqrt{L}$, todos los puntos con sus respectivas incertezas en ambos ejes. Con la ayuda de estos gráficos (y/o de otros que considere pertinentes) discuta las correlaciones entre las magnitudes graficadas.

b) Analice cuál de las dos variables presenta mayor error relativo y decida cuál debe colocarse en el eje y, para realizar un ajuste lineal.

c) Ajuste los datos de los tres gráficos realizados en el inciso (a) mediante el método de cuadrados mínimos (ver tutoriales en la página del curso o código en Python). Evalúe la calidad del ajuste a partir del valor de chi cuadrado reducido, el gráfico de residuos y el coeficiente de correlación de Pearson. Discuta en cada caso cómo se interpreta el resultado del ajuste.

d) ¿Se espera una ordenada al origen distinta de cero? ¿Qué interpretación física podría tener en ese caso?

e) Obtenga la aceleración de la gravedad y su incerteza a partir de los parámetros de ajuste del punto c. ¿Influyen los errores de la longitud y del período en la determinación de g? Discuta.

f) Teniendo en cuenta que la predicción teórica establece que, para un péndulo ideal simple compuesto de un hilo inextensible y una masa puntual que realiza oscilaciones de pequeña amplitud en ausencia de rozamiento, el período T viene dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

discuta en qué medida las hipótesis teóricas asumidas para derivar esta relación se cumplen en la práctica dentro del montaje experimental que construyó.