Resultado de una medición $\longrightarrow$ $x = (x_0 \pm \epsilon)$ unidad

es un intervalo

Error absoluto de la medición $\longrightarrow$ $\epsilon = \sqrt{\epsilon_{inst}^2 + \epsilon_{est}^2 + \epsilon_{sist}^2}$

Resultado de una medición $\longrightarrow$ $x = (x_0 \pm \epsilon)$ unidad

es un intervalo

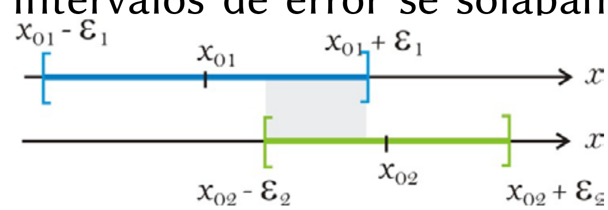
Error absoluto de la medición $\longrightarrow$ $\epsilon = \sqrt{\epsilon_{inst}^2 + \epsilon_{est}^2 + \epsilon_{sist}^2}$

Diferencias significativas $\longrightarrow$ Queremos comparar dos mediciones y ver si son "iguales".

¿Cuándo podemos decir que dos mediciones son <u>indistinguibles</u>?

Las magnitudes son el resultado de un proceso de medición, por lo tanto toda magnitud tiene asociada una incerteza.

- Criterio: Dos mediciones son indistinguibles cuando los intervalos de error se solapan en algún punto.



Matemáticamente: sean dos mediciones $x_{01} \pm \varepsilon_1$ y $x_{02} \pm \varepsilon_2$

- si $|x_{01} - x_{02}| \leq |\varepsilon_1 + \varepsilon_2|$ $\Rightarrow$ no hay diferencia significativa.

¿Cómo comparar medidas? $\longrightarrow$ **Error relativo**

Podemos definir la incerteza relativa y la incerteza porcentual relativa como

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\Delta x}{x_0} \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_{\%} = \frac{\Delta x}{x_0} .100$$

Estas cantidades dan una idea numérica más clara de cuán importante es la incerteza de la medición con respecto del valor medido.

El **error relativo** es **indicativo** de la **precisión de una medida**.

$\downarrow$

Mientras menor sea el error relativo, más precisa será la medida.

Ejemplo:

Hago dos mediciones distintas (con diferentes métodos) $\longrightarrow$ ¿Cuál tiene mayor precisión?

$x_1 = (0{,}010 \pm 0{,}005)$ mm	$x_2 = (200{,}0 \pm 0{,}5)$ mm
$\varepsilon_{rel} = 0{,}5$	$\varepsilon_{rel} = 0{,}0025$
$\varepsilon_{\%} = 50\%$	$\varepsilon_{\%} = 0{,}25\%$

$\Rightarrow$ medida x_2 es más precisa que la medida x_1.

Tipos de medición

Medida directa $\longrightarrow$ el resultado se obtiene con un instrumento de medida que compara la variable a medir con un patrón.

Medida indirecta $\longrightarrow$ El valor de la magnitud que se desea medir se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes, relacionados entre sí mediante una cierta función matemática.

Una de las mejores formas de evaluar la fiabilidad de una medición es repetirla varias veces y examinar los diferentes valores obtenidos.

Tipos de medición

Medida directa → el resultado se obtiene con un instrumento de medida que compara la variable a medir con un patrón.

Medida indirecta → El valor de la magnitud que se desea medir se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes, relacionados entre sí mediante una cierta función matemática.

Una de las mejores formas de evaluar la fiabilidad de una medición es repetirla varias veces y examinar los diferentes valores obtenidos.

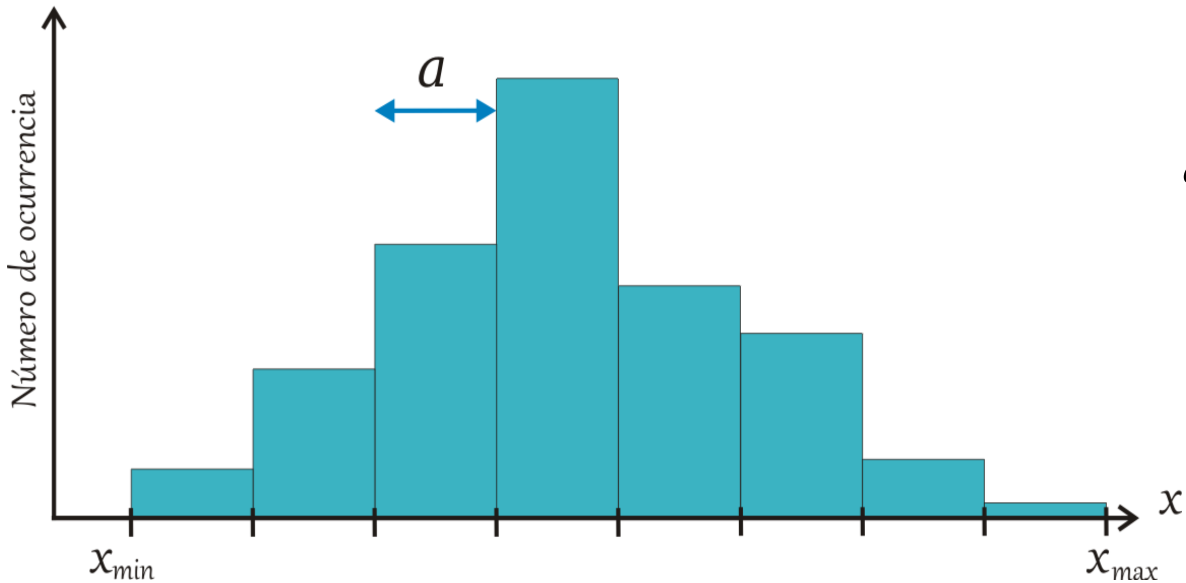
↓

Error casuales, estadísticos o aleatorios → generan distinguibilidad entre dato y dato (obtenemos resultados distintos), cuando repetimos un experimento en idénticas condiciones.

N mediciones de una misma magnitud → resultados: $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$

¿Hay alguna regularidad en los resultados?
¿Alguno de ellos aparece con más frecuencia que los demás?
¿Qué resultado representa mejor al grupo de observaciones en su totalidad?

Histogramas $\longrightarrow$ útiles para describir distribuciones con un gran número de datos.



$a \longrightarrow$ *factor de clase* o *bin size.*

- Definimos un rango (x_{min},x_{max}) dentro del cual se encuentran las mediciones

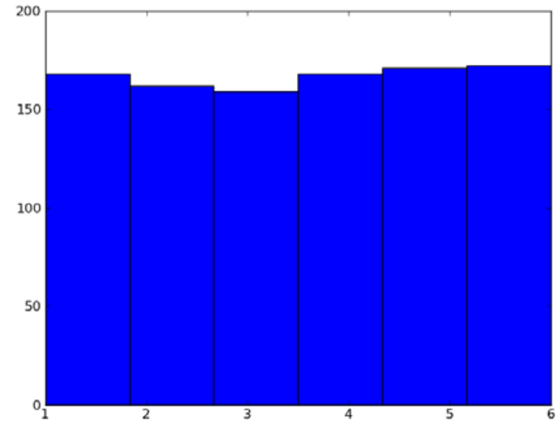
- Marcamos intervalos regulares *a* sobre un eje horizontal (en el rango donde están los valores de las mediciones).

- Sobre cada intervalo dibujamos un rectángulo cuya altura es proporcional a la cantidad de mediciones que caen dentro de dicho intervalo (*Número de ocurrencia*).

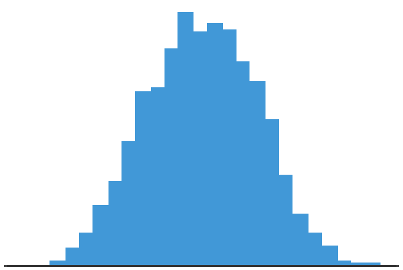
- Si normalizamos por el número total de datos, en el eje y tenemos la *Frecuencia de ocurrencia.*

¿Todos los histogramas tienen esta forma de campana?

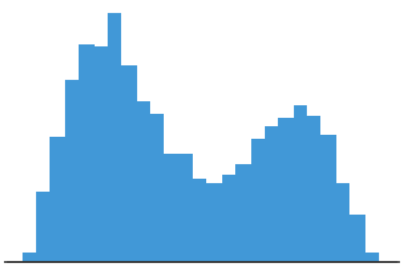
Experimento: Arrojamos un dado y anotamos el número obtenido.



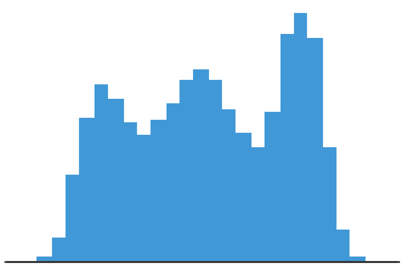
Otros ejemplos:



Histograma unimodal



Histograma bimodal



Histograma multimodal

Teoría estadística

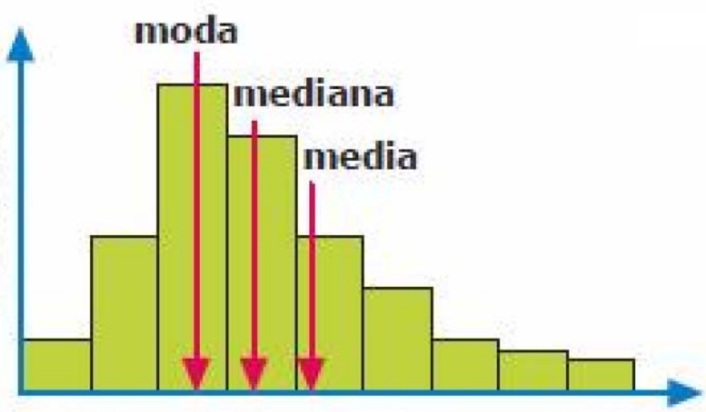
Para analizar una serie de N mediciones de una misma magnitud obtenida en las mismas condiciones vamos a emplear métodos estadísticos.

- **Media o promedio:** La mejor estimación de *x* es usualmente la media (promedio aritmético de las mediciones) de $x_1,\dots x_N \rightarrow$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}.$$

- **Mediana:** ordeno las mediciones de menor a mayor, la mediana separa por la mitad las observaciones (50% de estas son menores que la mediana y el otro 50% son mayores).

- **Moda:** valor que se repite más veces.



Medida de la distribución de las mediciones alrededor del valor más probable: **Desvío estándar**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

(desvío estándar poblacional)

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

(desvío estándar de la muestra)

Para N grande: $S \to \sigma$

$d_i = x_i - \bar{x}$ Desviaciones (indica la diferencia entre cada uno de los valores y la media)

- σ da una idea de cuán dispersos están los datos alrededor del valor promedio. (medida de la dispersión de los valores observados)
- σ caracteriza las errores asociados a las <u>medidas experimentales individuales</u> que se realizan para determinar el valor "verdadero".
- Por su definición, σ depende solo del proceso de medición y resulta independiente del número de mediciones realizadas.

Medida de la distribución de las mediciones alrededor del valor más probable: **Desvío estándar**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

(desvío estándar poblacional)

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

(desvío estándar de la muestra)

Para *N* grande: $S \to \sigma$

$d_i = x_i - \bar{x}$ Desviaciones (indica la diferencia entre cada uno de los valores y la media)

- σ da una idea de cuán dispersos están los datos alrededor del valor promedio. (medida de la dispersión de los valores observados)
- σ caracteriza las errores asociados a las <u>medidas experimentales individuales</u> que se realizan para determinar el valor "verdadero".
- Por su definición, σ depende solo del proceso de medición y resulta independiente del número de mediciones realizadas.

El resultado final que reportamos es un promedio $\bar{x}$ $\Rightarrow$ ¿Cuál es el error estadístico ϵ_{est}?

Error estadístico de la serie de N mediciones

Resultado de la medición → $x = x_0 \pm \epsilon = \bar{x} \pm \epsilon$ con $\epsilon^2 = \epsilon_{inst}^2 + \epsilon_{est}^2$

$x_0 = \bar{x}$ → proviene de una combinación de todas las mediciones realizadas.

Se puede demostrar que el <u>error estadístico</u> de la serie de *N* mediciones viene dado por el **desvío estándar de la media**

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

ξ indica que, si realizo una nueva serie de mediciones, hay un 68% de probabilidad de que el <u>nuevo promedio</u> caiga en el intervalo $(\bar{x} - \xi, \bar{x} + \xi)$

Error estadístico de la serie de N mediciones

Resultado de la medición → $x = x_0 \pm \epsilon = \bar{x} \pm \epsilon$ con $\epsilon^2 = \epsilon^2_{inst} + \epsilon^2_{est}$

$x_0 = \bar{x}$ → proviene de una combinación de todas las mediciones realizadas.

Se puede demostrar que el error estadístico de la serie de N mediciones viene dado por el **desvío estándar de la media**

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

ξ indica que, si realizo una nueva serie de mediciones, hay un 68% de probabilidad de que el nuevo promedio caiga en el intervalo $(\bar{x} - \xi, \bar{x} + \xi)$

Entonces $x = \bar{x} \pm \epsilon$ con $\epsilon = \sqrt{\epsilon^2_{inst} + \epsilon^2_{est}}$ donde $\epsilon_{est} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Al aumentar N → σ se mantiene estable pero ϵ_{est} sí disminuye.

¿Por qué se espera que σ sea estable y que ξ disminuya al aumentar N?

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Ejemplo:

x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$
10	0
11	1
13	3
10	0
9	-1
8	-2
9	-1
10	0
11	1
12	2
10	0
12	2
11	1
9	-1
8	-2
7	-3
10	0

$N = 17$

$\bar{x} = 10$

¿Por qué se espera que σ sea estable y que ξ disminuya al aumentar N?

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2} \qquad \xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Ejemplo:

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{17}\left[(0)^2 + (1)^2 + (3)^2 + (0)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. + \ (0)^2 + (2)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + (0)^2\right]\right\}^{1/2} = 1,581$$

x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$
10	0
11	1
13	3
10	0
9	-1
8	-2
9	-1
10	0
11	1
12	2
10	0
12	2
11	1
9	-1
8	-2
7	-3
10	0

$N = 17$

$\bar{x} = 10$

¿Por qué se espera que σ sea estable y que ξ disminuya al aumentar N?

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2} \qquad \xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Ejemplo:

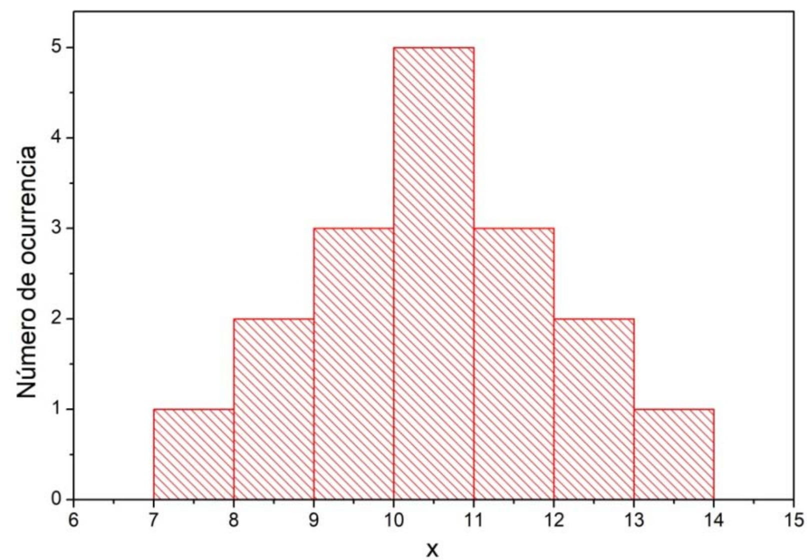
$$\sigma = \left\{\frac{1}{17}\left[(0)^2+(1)^2+(3)^2+(0)^2+(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(2)^2 + (0)^2+(2)^2+(1)^2+(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2+(0)^2\right]\right\}^{1/2} = 1,581$$

x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$
10	0
11	1
13	3
10	0
9	-1
8	-2
9	-1
10	0
11	1
12	2
10	0
12	2
11	1
9	-1
8	-2
7	-3
10	0

♦ Por su definición, σ depende solo del proceso de medición y resulta independiente del número de mediciones realizadas.
♦ Si la estadística está bien definida, al aumentar *N* no espero que cambie la forma del histograma.
♦ Además σ se debería mantener estable. Si aumento *N* los valores de d_i no deberían cambiar significativamente.

$N = 17$

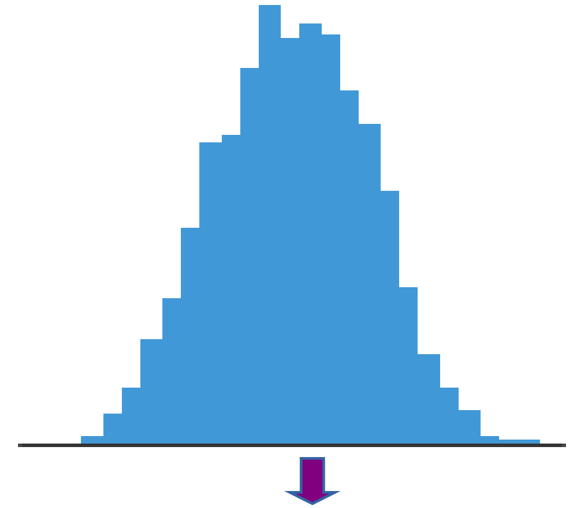
$\bar{x} = 10$



Distribución de Gauss

¿Qué sucede cuando el número de datos crece?

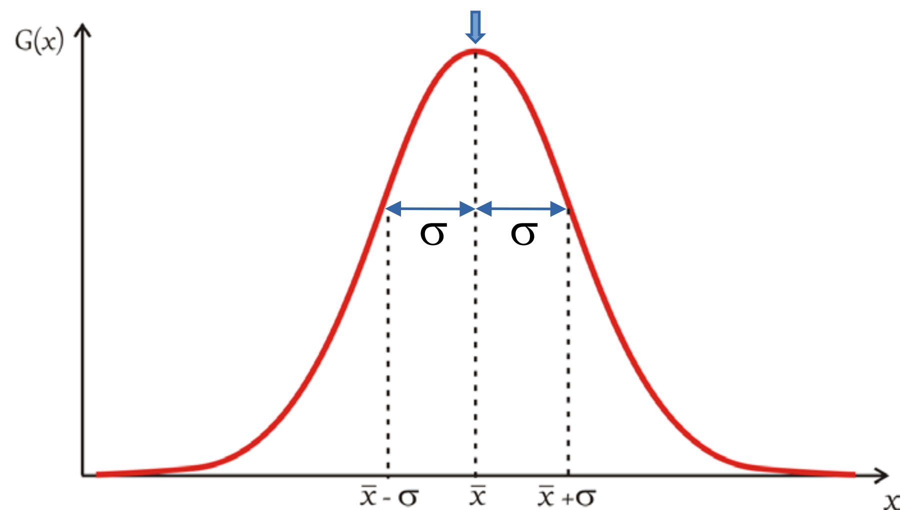
Serie de N mediciones: $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$



Aumentamos el nro de mediciones $\Rightarrow$ el histograma se aproximará a una función continua bien definida (**distribución límite**).

Si tenemos errores casuales $\longrightarrow$ distribución límite dada por la curva de distribución de Gauss (distribución normal, campana de Gauss).

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right]}$$



Cuidado: σ no es el ancho a mitad de altura de la campana.

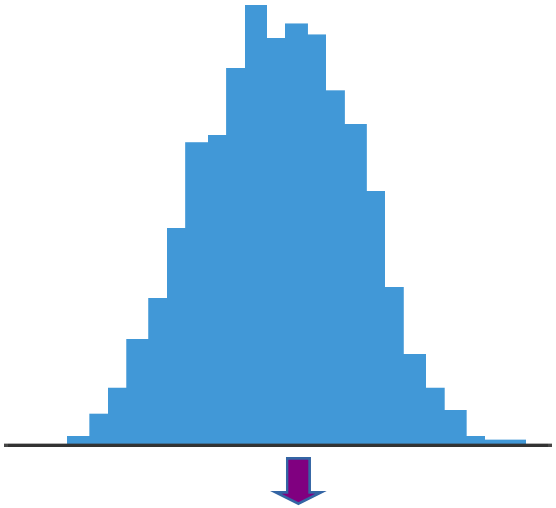
Distribución de Gauss

¿Qué sucede cuando el número de datos crece?

Serie de N mediciones: $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$

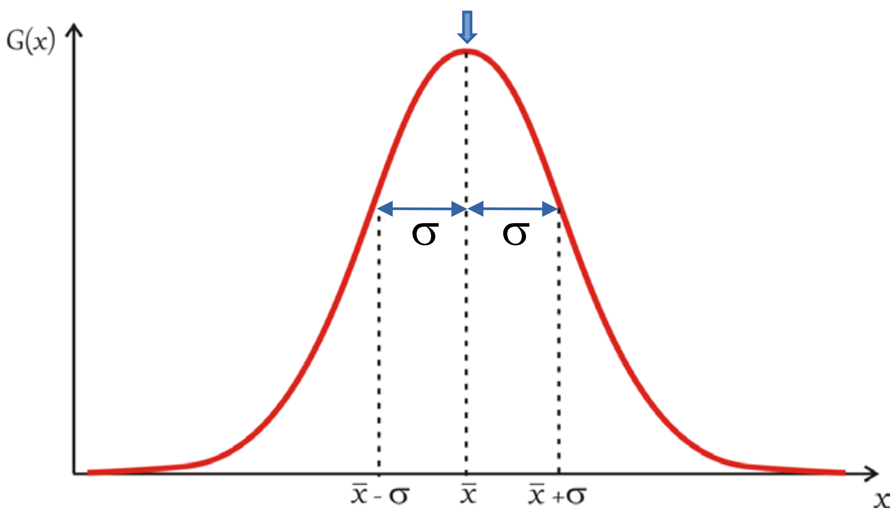
Aumentamos el nro de mediciones $\Rightarrow$ el histograma se aproximará a una función continua bien definida (**distribución límite**).

Si tenemos errores casuales $\longrightarrow$ distribución límite dada por la curva de distribución de Gauss (distribución normal, campana de Gauss).



media = moda = mediana

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right]}$$



1. Presenta un máximo en $x = \bar{x}$.

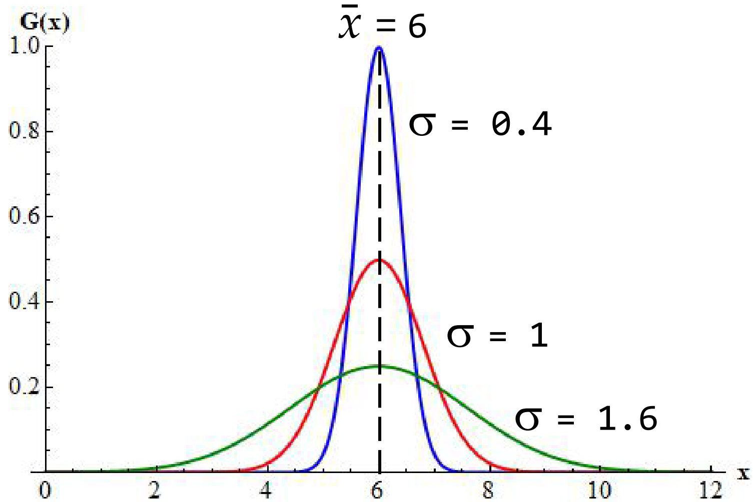
2. Es simétrica respecto de ese valor medio $\bar{x}$.

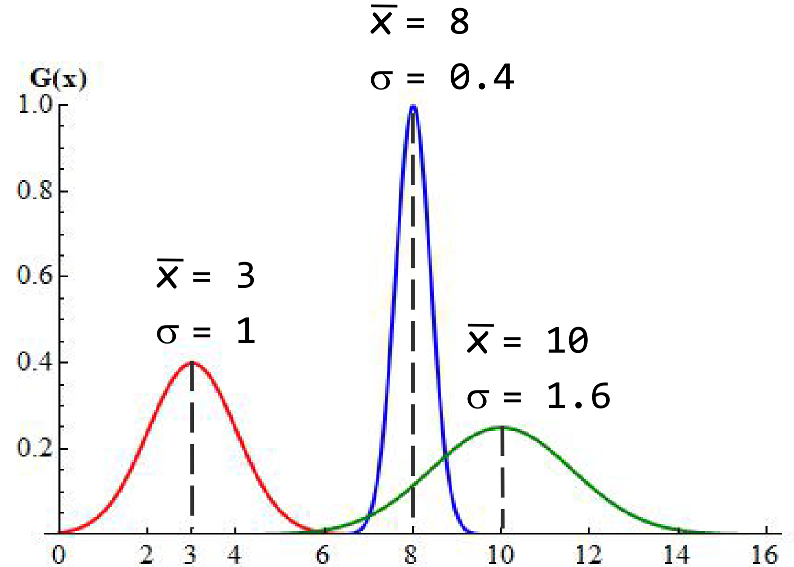
3. Tiene forma de campana.

4. Sus puntos de inflexión están en $\bar{x} \pm \sigma$.

5. Tiende a cero a medida que nos alejamos de $\bar{x}$.

Cuidado: σ no es el ancho a mitad de altura de la campana.





σ chico ⟶ campana más aguda ⟶ alta precisión del experimento.

σ es grande → campana achatada (o dispersa) → baja precisión del experimento (habrá un número considerable de mediciones con grandes desviaciones).

Cuanto mayor sea σ vamos a tener mayor variabilidad de los datos respecto del valor de la media

Es imposible predecir el valor exacto que saldrá de una medición dada pero podemos indicar la probabilidad de que una observación este dentro de un cierto intervalo.

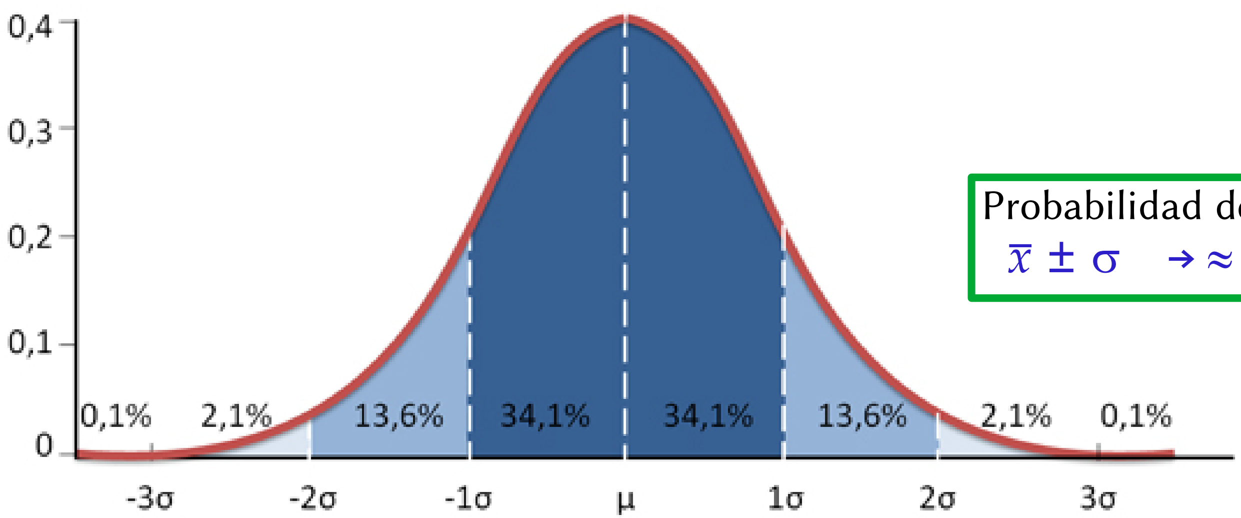
$$\Downarrow$$

Utilizamos la función de Gauss *f(x)* para predecir esas probabilidades.

$$\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} f(x)\,dx = 0,68$$ El 68% de los datos caen en el intervalo $(\bar{x}-\sigma;\bar{x}+\sigma)$

$$\int_{\bar{x}-2\sigma}^{\bar{x}+2\sigma} f(x)\,dx = 0,95$$ El 95% de los datos caen en el intervalo $(\bar{x}-2\sigma;\bar{x}+2\sigma)$

Los porcentajes representan la probabilidad de que una nueva medición caiga en el respectivo intervalo.



Probabilidad de que una medición dada esté en
$\bar{x} \pm \sigma \rightarrow \approx 68\%$ $\bar{x} \pm 2\sigma \rightarrow \approx 95.4\%$

¿Por qué es tan importante la distribución de Gauss si **no** todos los experimentos generan histogramas simétricos y acampanados compatibles con una distribución de Gauss?

Teorema central del límite

Cuando el tamaño de una muestra es lo suficientemente grande, la distribución de las medias sigue aproximadamente una distribución normal, y se aplica independientemente de la forma de la distribución de la población.

Experimento 1: mido N veces la magnitud x $\longrightarrow$ $\bar{x}_1$ $\quad \sigma_1$

Experimento 2: mido N veces la magnitud x $\longrightarrow$ $\bar{x}_2$ $\quad \sigma_2$

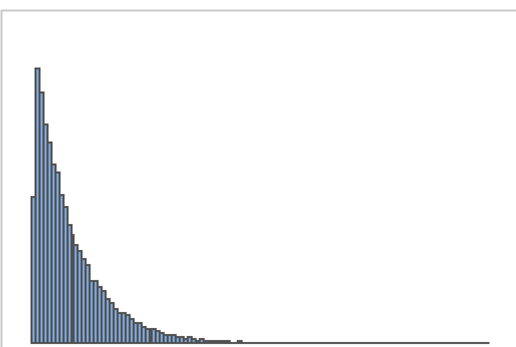
$\vdots$

Experimento M: mido N veces la magnitud x $\longrightarrow$ $\bar{x}_M$ $\quad \sigma_M$

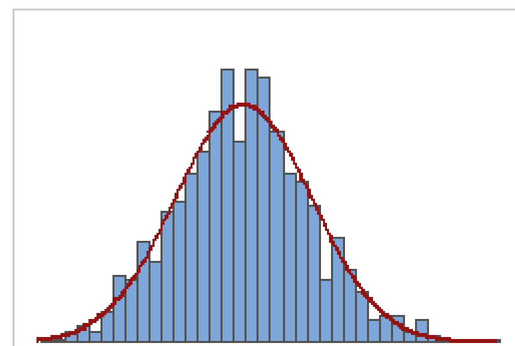
Promedio de los promedios $\longrightarrow$ $\overline{X}$

Desvío estándar de los promedios $\longrightarrow$ ξ

Tenemos varias (M) series de N mediciones



Histograma de una serie de tamaño N.



Histograma de los promedios de M series de tamaño N.

Distribución de los promedios $\longrightarrow$ curva de Gauss (centrado en $\overline{X}$ y con desvío estándar de la media ξ)

Muestra de tamaño N

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Para N grande: $S \rightarrow \sigma$

Si la distribución de mis datos es Gaussiana, tengo una **probabilidad del 68%** de que **un nuevo dato** caiga en el intervalo:

$$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma) \longrightarrow 68\,\%$$

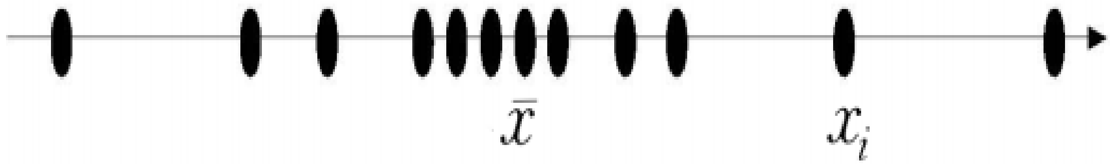
$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Desvío estándar de la media

Tengo una **probabilidad de 68%** de que **un nuevo promedio** caiga en el intervalo:

$$(\bar{X} - \xi, \bar{X} + \xi) \longrightarrow 68\,\%$$

Unidades → σ y ξ se miden en las mismas unidades que los datos originales x_i



Muestra de tamaño N

Resultado de la medida $\rightarrow$ $x = (x_0 \pm \epsilon)$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$$

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_{inst}^2 + \epsilon_{est}^2}$$

Error: sumar todas las contribuciones. En este caso solo tenemos error estadístico y error instrumental.

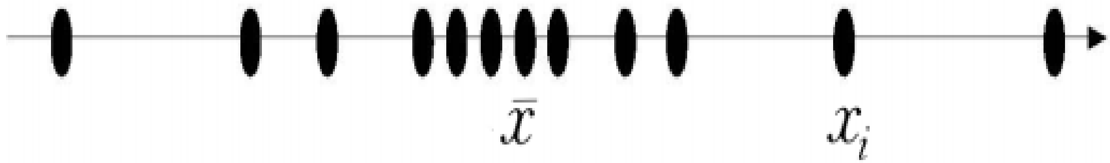
Error estadístico = Desvío estándar de la media

$$\epsilon_{est} = \xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Desvío estándar poblacional

Para *N* grande: $S \rightarrow \sigma$



Muestra de tamaño N

Resultado de la medida $\rightarrow$ $x = (x_0 \pm \epsilon)$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$$

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_{inst}^2 + \epsilon_{est}^2}$$

Error: sumar todas las contribuciones. En este caso solo tenemos error estadístico y error instrumental.

Error estadístico = Desvío estándar de la media

$$\epsilon_{est} = \xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Desvío estándar poblacional

Para *N* grande: $S \rightarrow \sigma$

ϵ_{est} puede reducirse aumentando el número de mediciones pero su límite está dado por otras fuentes de error (por ejemplo, ϵ_{inst}). Podemos utilizar este concepto para **estimar el número de mediciones** que se deberían realizar para que error estadístico sea del orden del error instrumental $\Rightarrow$ $\epsilon_{est} \approx \epsilon_{inst} \rightarrow$ $N_{op} \approx \left(\frac{\sigma}{\epsilon_{inst}}\right)^2$