Laboratorio 1 - 2C 2025

Movimiento oscilatorio amortiguado

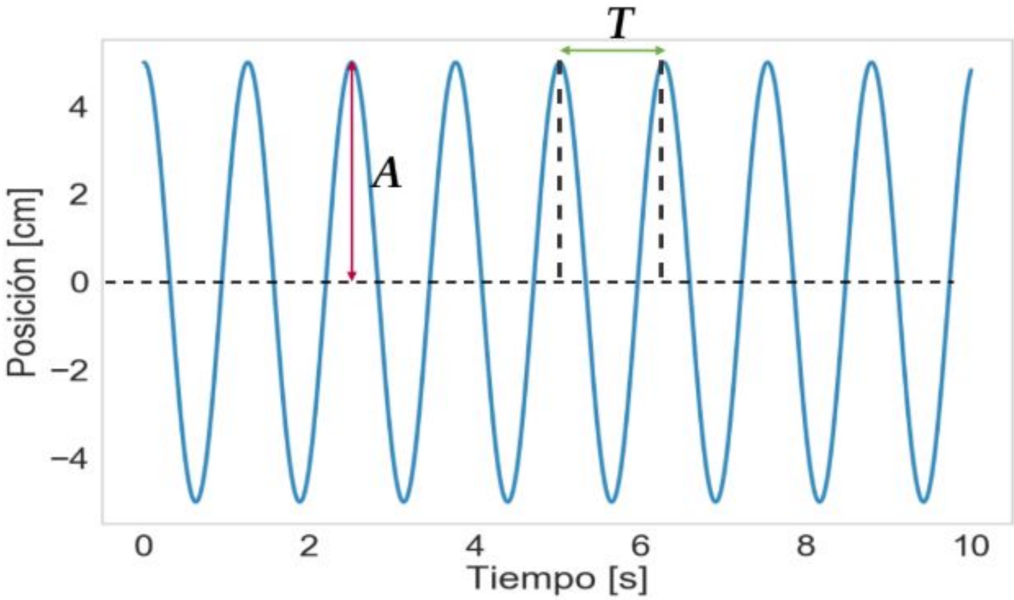
Movimiento oscilatorio simple

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = a\ cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Queremos probar si los resultados son consistentes con el modelo teórico y estimar parámetros del sistema

Ajustes no lineales

Queremos estimar el valor de los parámetros de una **función no lineal** que mejor describen los datos.

Se usa un algoritmo iterativo que varía los valores de los parámetros buscado minimizar chi cuadrado

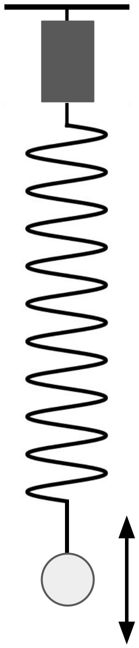
$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

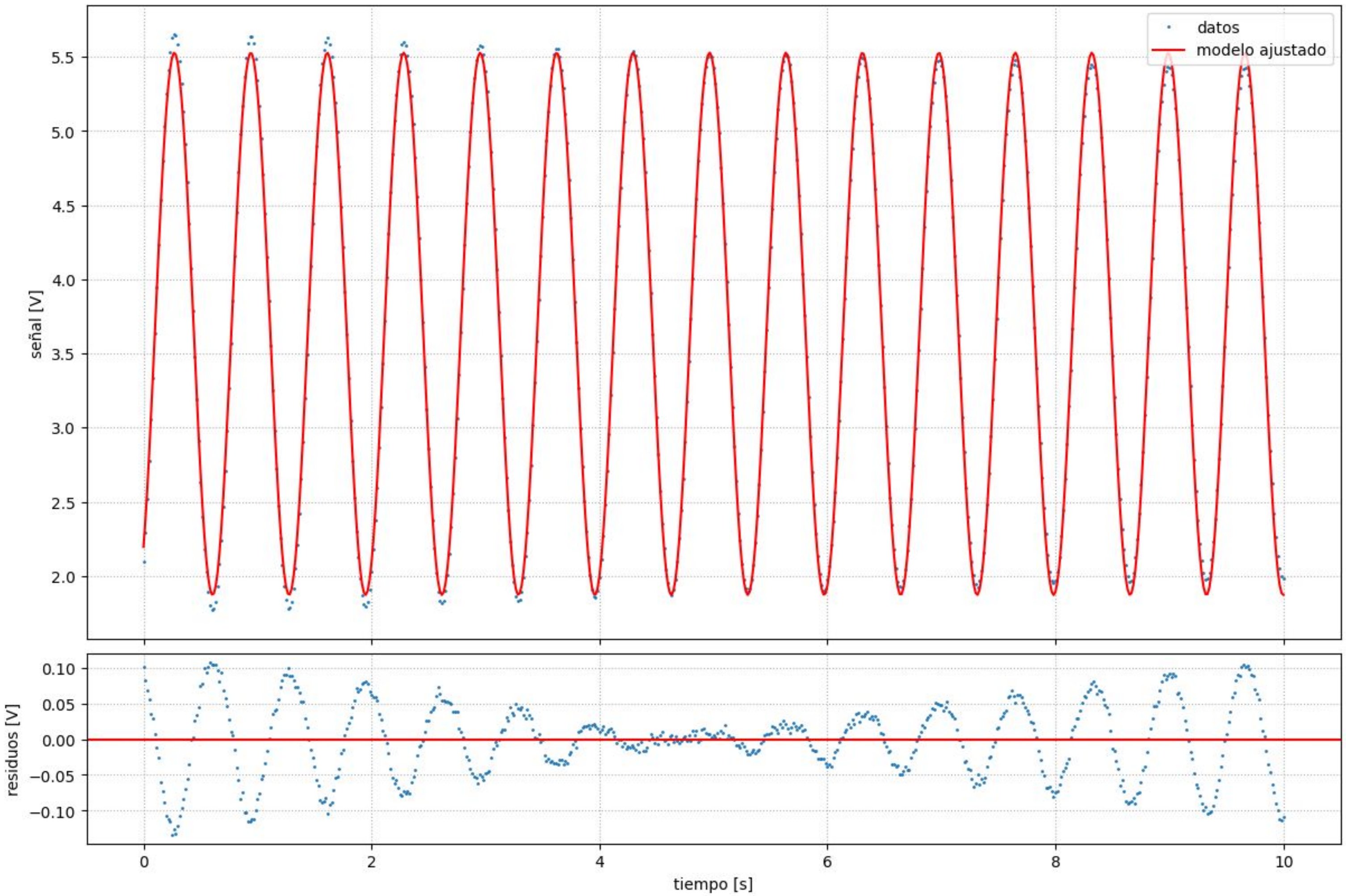
O_i : Valores observados en la medición

E_i : Valores esperados por el modelo

Problema: puede haber mínimos locales

➡ Es importante partir de **parámetros iniciales** cercanos a los valores que esperamos.




datos
modelo ajustado
señal [V]
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
residuos [V]
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
0
2
4
6
8
10
tiempo [s]

Movimiento oscilatorio amortiguado

Consideremos un movimiento oscilatorio en un fluido viscoso

Fuerza de fricción: $\vec{F} = -b\,\frac{d\vec{x}}{dt}$ b : constante que depende de la viscosidad

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Definimos la **constante de amortiguamiento** del fluido: $\boxed{\gamma = \frac{b}{2m}}$

$$\text{Tres casos} \begin{cases} \text{Sobreamortiguado} & \gamma^2 > \omega_0^2 \\ \text{Amortiguamiento crítico} & \gamma^2 = \omega_0^2 \\ \text{Subamortiguado} & \gamma^2 < \omega_0^2 \quad \Leftarrow \end{cases}$$

¿Qué forma tendrá la solución?

Tres casos $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Sobreamortiguado} & \gamma^2 > \omega_0^2 \\ \text{Amortiguamiento crítico} & \gamma^2 = \omega_0^2 \\ \text{Subamortiguado} & \gamma^2 < \omega_0^2 \quad \leftarrow \end{array} \right.$

¿Qué forma tendrá la solución?

$$\boxed{x(t) = a\, e^{-\gamma t}\, cos(\omega t + \varphi)}$$

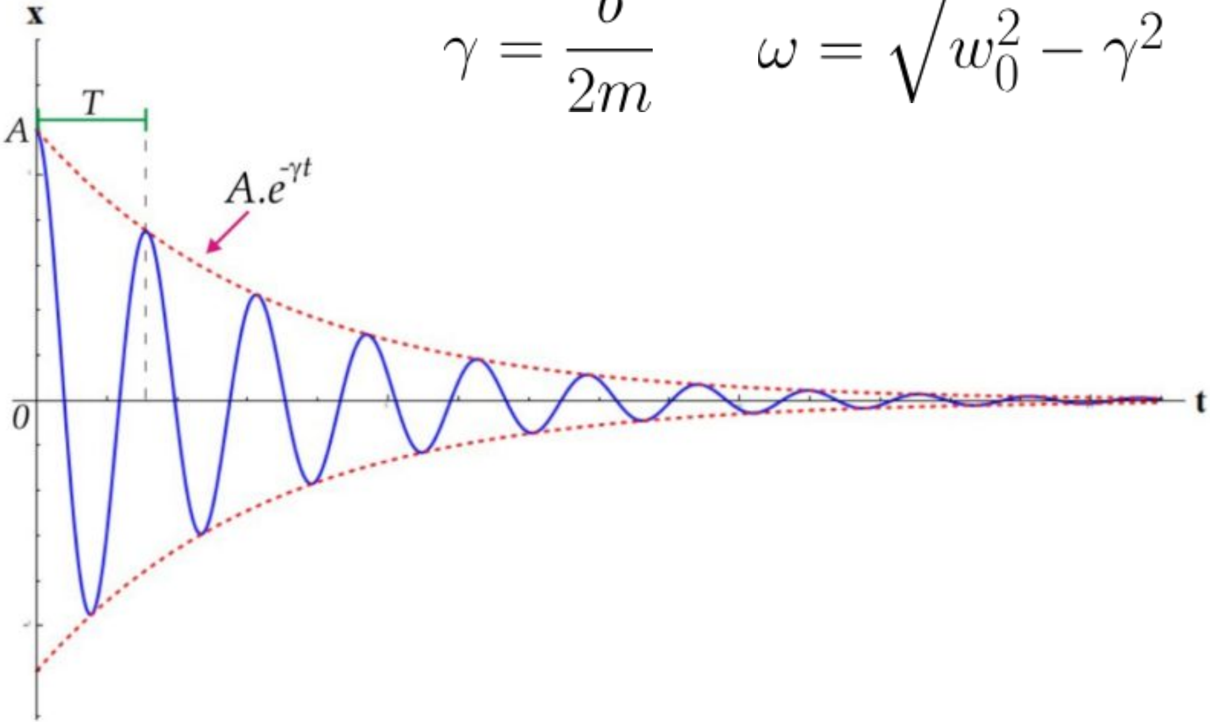
Solución:

$$\boxed{x(t) = a\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)}$$

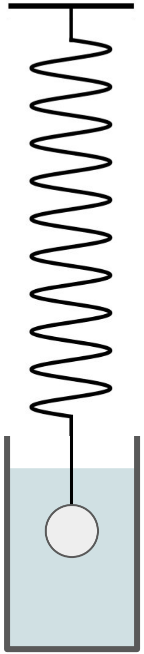
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} \qquad \omega = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$$

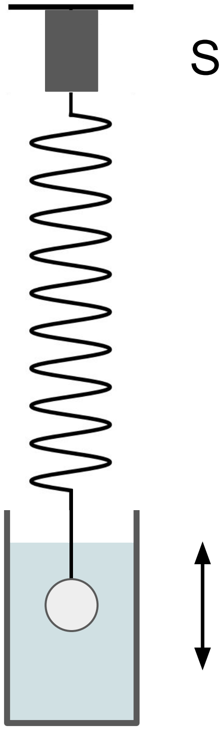
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



¿Cómo medimos?



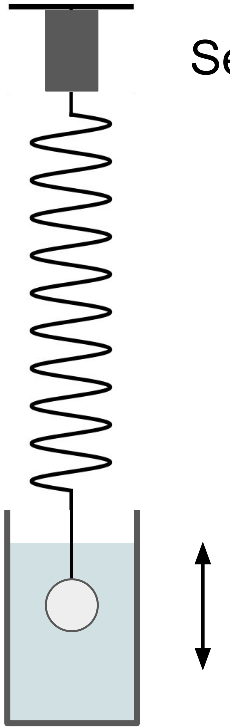
¿Cómo medimos?



Sensor de fuerza

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t}\, cos(\omega t + \varphi)$$

¿Cómo medimos?



Sensor de fuerza

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t}\, cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$F(t) = -k\,(x(t) - x_0)$$

$$F(t) = -k\, a\, e^{-\gamma t}\, cos(\omega t + \varphi) - kx_0$$

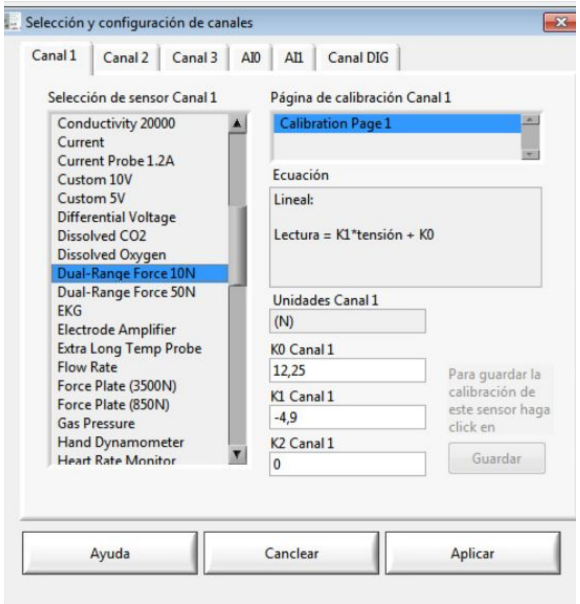
$$\boxed{F(t) = A\, e^{-\gamma t}\, cos(\omega t + \varphi) + D}$$

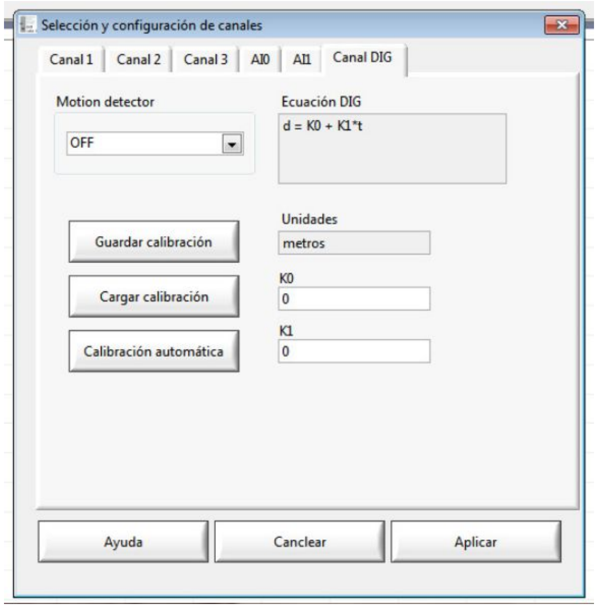
$$\omega = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \gamma = \frac{b}{2m}$$

Calibración del sensor de fuerza

$$F(V)?$$

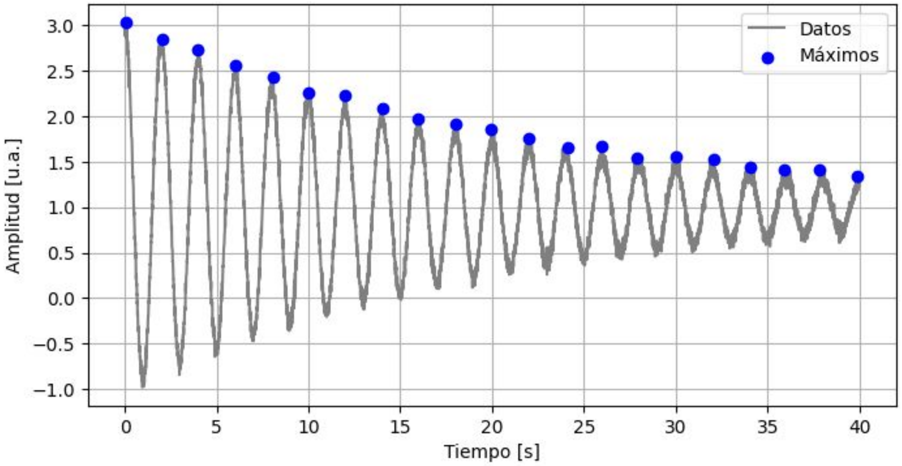
$$F = k_1 V + k_0 \qquad k_0? \; k_1?$$





Método 1: Comparación de frecuencias

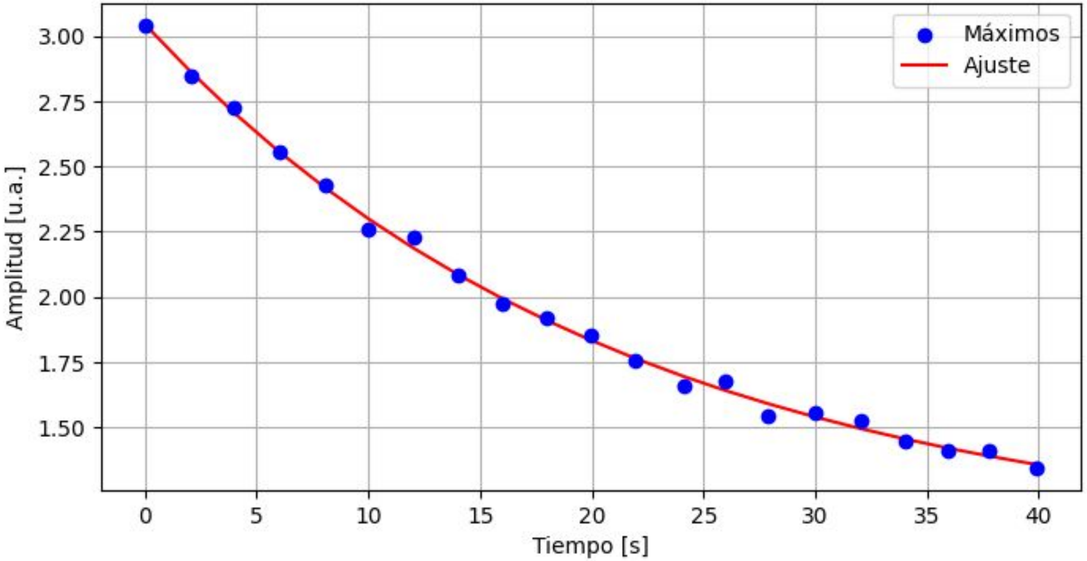
$$\omega = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} \quad \begin{cases} \omega = \dfrac{2\pi}{T} & \text{Medición en fluido viscoso} \\ \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} & \text{Medición en aire} \end{cases}$$



Usamos la función findpeaks()
para encontrar máximos

Método 2: Ajuste exponencial de la envolvente

$$F(t) = A\, e^{-\gamma t}\, cos(\omega t + \varphi) + D \quad \Rightarrow \quad y_{max} = A\, e^{-\gamma\, t_{max}} + D$$



Método 3: Linealización de la envolvente

$$y(t) = A\, e^{-\gamma\, t} + y_0$$

$$y(t) - y_0 = A\, e^{-\gamma\, t}$$

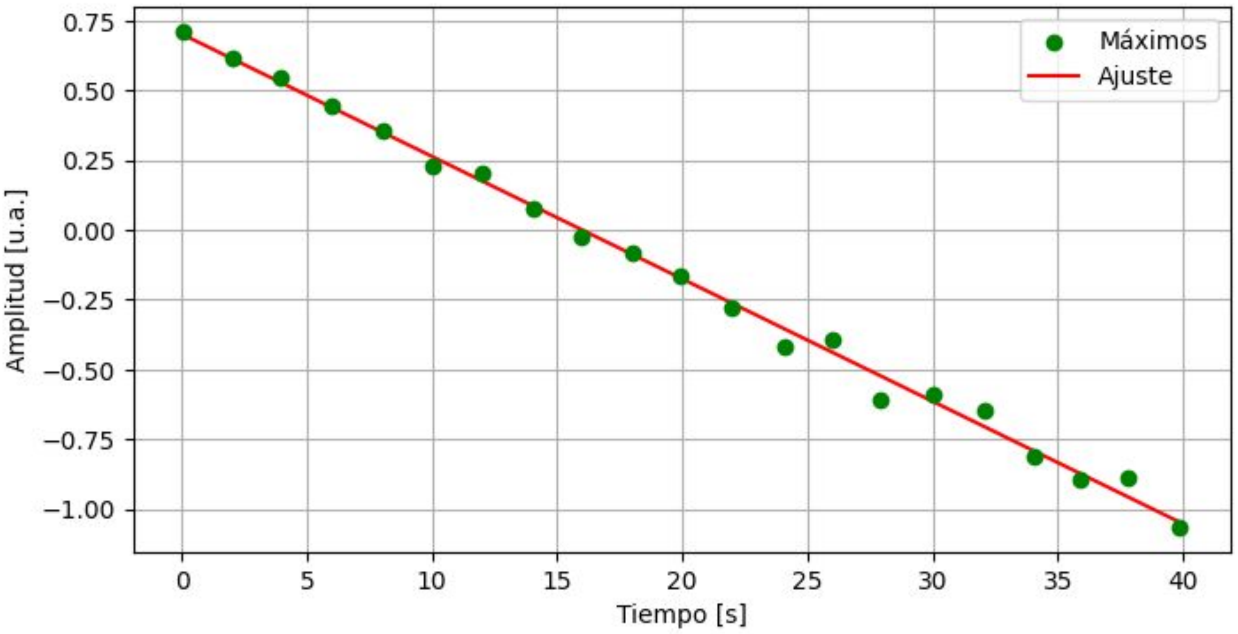
$$ln(y(t) - y_0) = ln(A\, e^{-\gamma\, t})$$

$$ln(y(t) - y_0) = ln(A) + ln(e^{-\gamma\, t})$$

$$\boxed{ln(y(t) - y_0) = ln(A) - \gamma\, t}$$

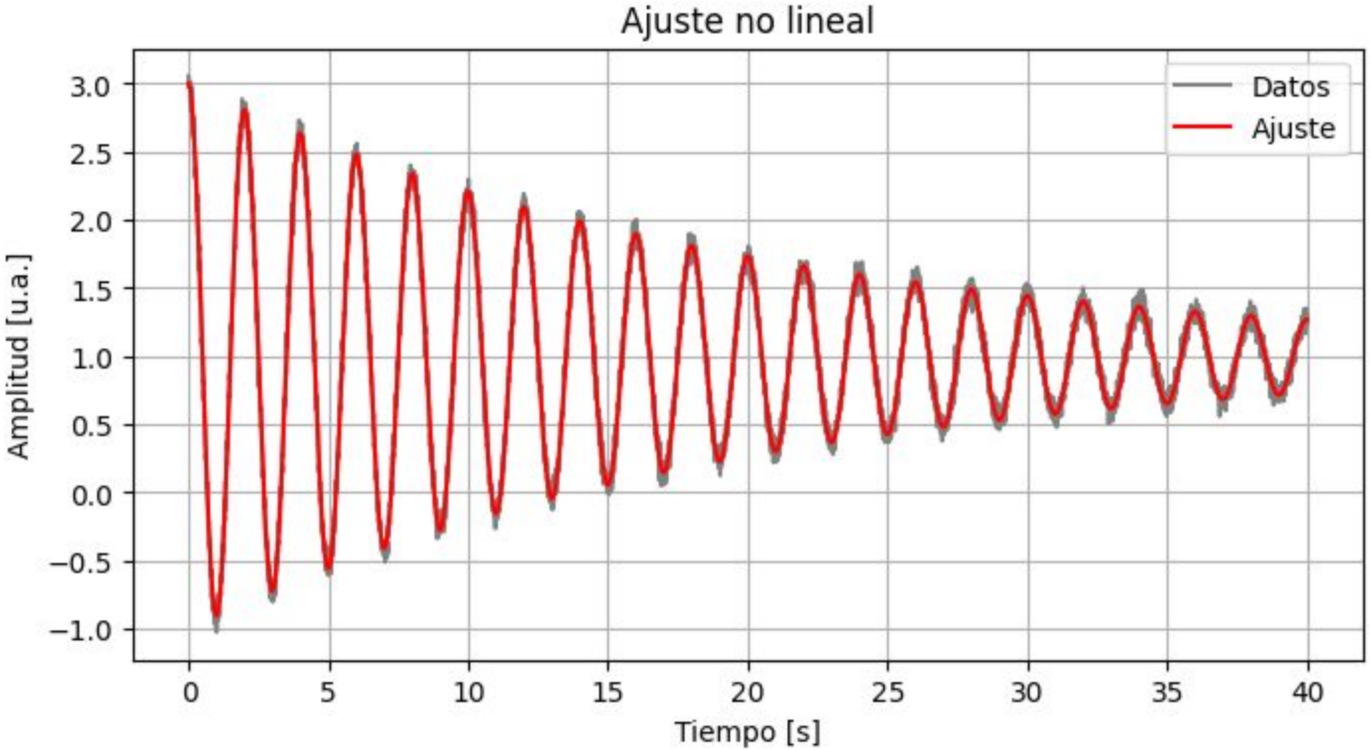
Método 3: Linealización de la envolvente

$$ln(y(t) - y_0) = ln(A) - \gamma\, t$$



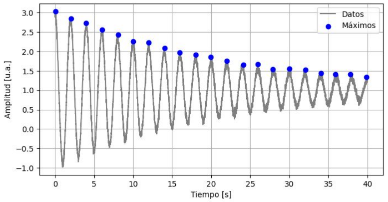
Método 4: Ajuste no lineal del modelo completo

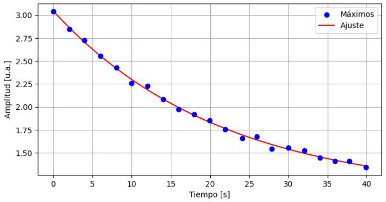
$$F(t) = A\,e^{-\gamma t}\,cos(\omega t + \varphi) + D$$

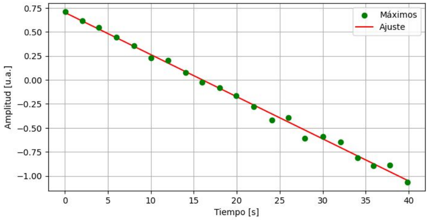


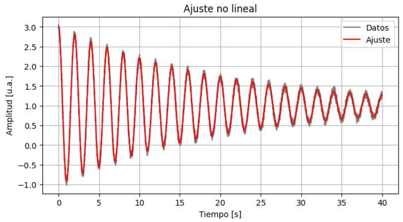
Objetivos para hoy:

- Estudiar el movimiento del resorte mediante el modelo de oscilador amortiguado









- Medir gamma de 4 maneras diferentes:

Método 1: Comparación de frecuencias

Método 2: Ajuste exponencial de la envolvente

Método 3: Linealización de la envolvente

Método 4: Ajuste no lineal del modelo completo