

Estimación del tiempo de vida medio del muón

Resumen

En este trabajo se estudió la vida media del muón mediante la detección de su paso y posterior decaimiento en un arreglo de tres módulos centelladores. A partir de las señales registradas con una placa DRS4, se identificaron eventos con dos picos en una misma ventana temporal, correspondientes al muón y al electrón emitido en su desintegración. Se estimaron los parámetros del modelo —la vida media del muón y la probabilidad de detección real— utilizando el test de máxima verosimilitud para una distribución exponencial truncada. También se evaluó la eficiencia del detector y se aplicó el test de Wilks para determinar intervalos de confianza. El valor obtenido para la vida media resultó compatible con el tabulado, dentro de las incertezas asociadas al muestreo limitado y a la ventana temporal reducida.

1. Introducción

Según el Modelo Estándar hay 17 partículas elementales, las cuales componen toda la materia tal cual la conocemos. [1] El muón, descubierto en 1936, es una de ellas. Esta partícula tiene 207 veces la masa del electrón y su misma carga. [2] Al igual que este último, pertenece al grupo de los leptones, que son aquellas partículas que interactúan eléctricamente y débilmente, pero no experimentan interacciones fuertes. Los muones son inestables (ya que decaen mediante una interacción débil en un electrón, un antineutrino electrónico y un neutrino muónico) teniendo una vida media en torno a los $2,2 \mu\text{s}$ en su marco de referencia. Este valor es una de las pruebas de la validez de la relatividad especial, ya que los muones formados en la ionósfera debido a la interacción de rayos cósmicos con la materia (en particular por la desintegración del mesón pi, $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$) llegan masivamente a la superficie terrestre, lo cual sería imposible en ese tiempo si no sufrieran de dilatación temporal por los efectos relativistas. Al nivel del mar, el flujo de muones es $\approx 1 \text{ cm}^{-2} \text{ min}^{-1}$. [3]

La probabilidad que tiene un muón de decaer es constante, y se corresponde con el inverso de su vida media ($\frac{1}{\tau}$). En particular, el número de muones que sobreviven a un tiempo t sigue una distribución exponencial negativa. [3] Entonces, si se grafica el tiempo de vida medido para un gran número de muones, el histograma resultante debería ajustarse a una función de la forma

$$f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau},$$

característica de un proceso de decaimiento con tasa constante.

Teniendo esto en cuenta, en este trabajo se buscó estimar el tiempo de vida media del muón, detectando su arribo con un arreglo de tres centelladores apilados, y la posterior aparición de un electrón asociado al decaimiento. También se estudió la eficiencia de los centelladores,

$$eff = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

donde n es el número de veces que se detectó un muón en el primer y tercer centellador y m la cantidad de veces que se detectó en los tres.

Para estimar la vida media del muón con los decaimientos detectados se utilizó una función de distribución truncada temporalmente (ya que, por cuestiones experimentales desarrolladas más adelante, las ventanas temporales obtenidas eran de tan solo 1700 ns) que se expresa como

$$f(t; \tau, \alpha) = \alpha g(t, \tau) + (1 - \alpha) U_{(t_{\min}, t_{\max})}. \quad (2)$$

La constante α representa la probabilidad de que la medición se deba efectivamente a un decaimiento y no a una falla de los centelladores (o a la aparición de otra partícula). Luego t_{\min} y t_{\max} representan los tiempos mínimo y máximo de la ventana de medición, y

$$g(t, \tau) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau (e^{-t_{\min}/\tau} - e^{-t_{\max}/\tau})} \quad (3)$$

la función de distribución truncada.

Si se quiere obtener a partir de un set de datos estimaciones para los parámetros τ y α , se puede realizar un test de máxima verosimilitud. La verosimilitud representa la probabilidad conjunta de los datos, es decir, el producto de las probabilidades individuales. Para obtener los parámetros (en este caso estimadores de máxima verosimilitud, MLE) se debe maximizar esta cantidad. [4] Como resulta más conveniente trabajar con sumas que con productos, se utiliza el logaritmo natural de la verosimilitud. De este modo, se tiene que la cantidad a maximizar es

$$\log L = \log \left(\prod_{i=1}^n f(t_i; \tau, \alpha) \right) = \sum_{i=1}^n \log (f(t_i; \tau, \alpha)). \quad (4)$$

2. Equipo experimental

Para estudiar la detección de muones se utilizaron tres módulos centelladores colocados uno encima del otro, como se muestra en la figura 1. Cada módulo incluía un centellador de acrílico con forma de prisma de $4,5 \times 4,5 \times 46$ cm, que emite luz cuando es atravesado por una partícula ionizante. Esa luz era captada por un fotomultiplicador (PMT), encargado de transformarla en una señal eléctrica. Como la corriente generada por el PMT es muy pequeña, se enviaba a un preamplificador (PREAMP) para amplificarla antes de su digitalización. Los módulos se alimentaron con una fuente de alta tensión, necesaria para que el fotomultiplicador pueda operar y realizar el proceso de multiplicación electrónica.

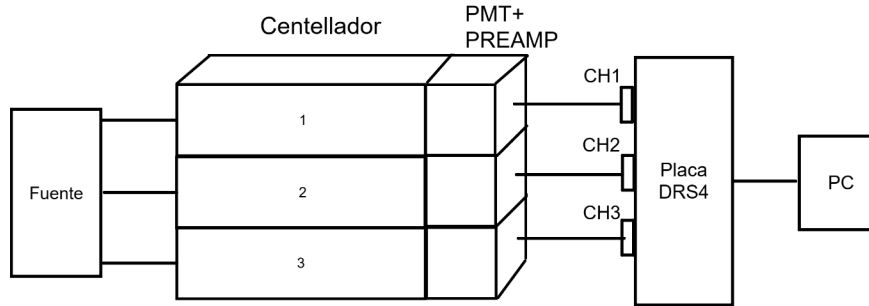


Figura 1: Esquema del dispositivo experimental. Tres módulos compuestos por un centellador, un PMT y un preamplificador alimentados por una fuente de alta tensión. Cada módulo se conectó a un canal independiente en una placa digitalizadora DRS4.

Cada módulo se conectó a un canal independiente de la placa de adquisición DRS4. Esta placa cuenta con 1024 celdas de memoria por canal, lo que significa que en cada medición solo

pueden registrarse 1024 puntos de muestreo. El tamaño temporal de cada ventana de adquisición queda determinado por el intervalo entre muestras, que depende directamente de la frecuencia de muestreo. La placa funciona, como mínimo, a aproximadamente 0,7 GHz, por lo tanto, la duración temporal de una medición es

$$\Delta t = \frac{1024}{0,7 \text{ GHz}} \approx 1698,3 \text{ ns},$$

de modo que cada evento guardado estaba limitado a esa ventana temporal.

2.1. Procesamiento de datos

Durante la toma de datos, el dispositivo estuvo funcionando de manera continua. Sin embargo, no cualquier señal en los centelladores corresponde al paso de un muón, por lo que fue necesario aplicar criterios de selección. Para ello se configuró un trigger en el primer centellador: cada vez que la señal caía por debajo de -80 mV , el sistema registraba la ventana temporal completa. Luego, para identificar eventos compatibles con muones, se filtraron los datos conservando únicamente aquellos en los que aparecían picos simultáneos en más de un centellador. Este requisito asegura que la partícula haya atravesado más de un módulo y permite descartar señales locales o espurias.

Con este conjunto ya depurado, se identificaron los eventos útiles para obtener la vida media del muón. Se corresponden a aquellos que, dentro de una misma ventana de adquisición, contienen dos picos separados por un intervalo temporal Δt : el primero asociado al paso del muón por el centellador y el segundo al electrón producido en su decaimiento.

Para minimizar el ruido en las mediciones se aplicó inicialmente un filtro de suavizado Savitzky-Golay, el cual permite reducir el ruido manteniendo la forma y características principales de la señal. En la figura 2 se ilustra un ejemplo de un decaimiento con y sin filtrado.

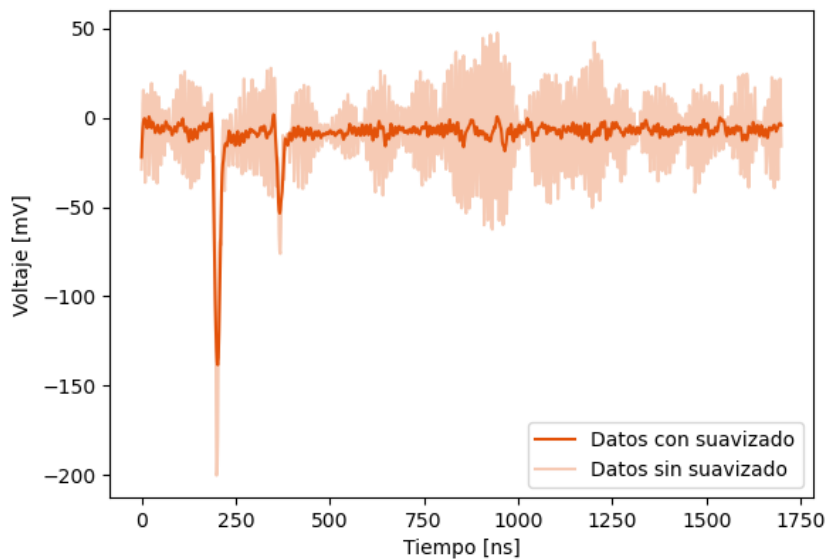


Figura 2: Comparación de un gráfico del voltaje en función del tiempo de un centellador entre los datos crudos y los suavizados por Savitzky-Golay.

Luego del suavizado, se analizaron todas las mediciones para detectar aquellas que presentaban dos picos distinguibles en un mismo canal, y en cada caso se calculó el valor de Δt entre ellos.

3. Análisis de la vida media

En primer lugar se estudió la eficiencia del detector. Para eso, se obtuvo la cantidad de eventos detectados en el primer y tercer centellador (que se corresponden con un muón que atravesó los tres) y la cantidad de eventos detectados en los tres centelladores. Si la eficiencia es máxima, se espera que ambas cantidades coincidan. Se obtuvo, según (1), un valor de $eff = (0,982 \pm 0,001)$.

Una vez obtenidos los intervalos temporales, se realizó una estimación del valor de la vida media τ y la eficiencia α mediante la maximización del logaritmo de la función verosimilitud (4) para la distribución esperada. Se trabajó con la inversa del logaritmo para así minimizar la función utilizando el método numérico L-BFGS-B. Este necesita de valores iniciales para comenzar la iteración, por lo que se usó como valor inicial de α el obtenido para la eficiencia del detector, mientras que para τ se utilizó el valor tabulado $\tau_{tab} = (2196,98 \pm 0,04)$ ns [5]. Se obtuvieron valores de $\hat{\alpha} = 0,978$ y $\hat{\tau} = 2199,96$ ns, como puede observarse en la figura 3.

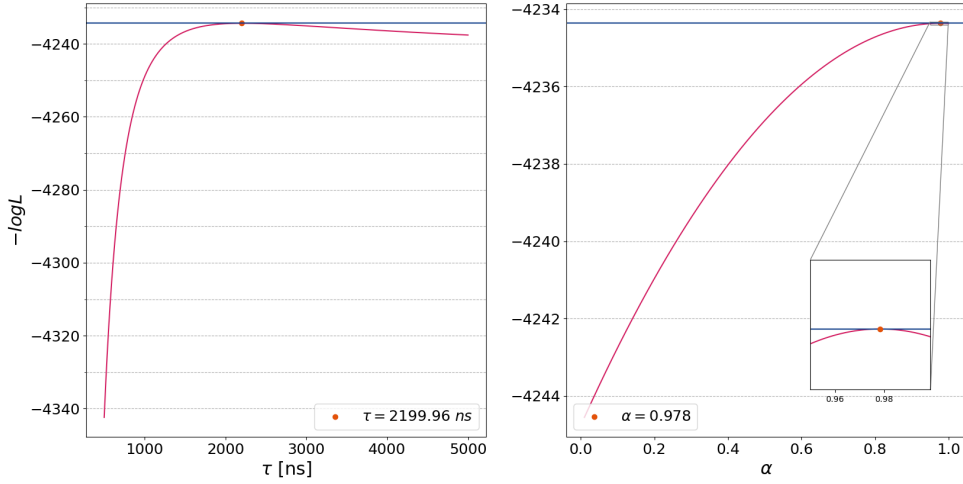


Figura 3: Valores de máxima verosimilitud para α y τ .

Para la determinación de errores, en primera instancia se utilizó la inversa de la información de Fisher, derivada a partir de la matriz hessiana; obteniéndose como incertezas $\sigma_{\hat{\alpha}} = 1,28$ y $\sigma_{\hat{\tau}} = 2938$ ns, ambos superiores al 100 %.

Con el fin de evaluar la confiabilidad de estas incertezas, se revisó el condicionamiento de la matriz, a lo que se observó que estaba fuertemente mal condicionada; esto debido a las pequeñas variaciones de la verosimilitud cerca del mínimo, las cuales provocan amplificaciones en los términos de la matriz. Debido a esto, se realizó una segunda aproximación diferente al problema, realizando un Test de Wilks sobre ambas variables.

El test de Wilks nos permite construir intervalos de confianza para un cierto parámetro basándose en comparaciones de verosimilitudes [6]. Mediante la construcción de los estadísticos

$$\Lambda(\tau_0) = -2(\log L(\hat{\alpha}(\tau_0), \tau_0) - \log L(\hat{\alpha}, \hat{\tau})) \quad (5)$$

$$\Lambda(\alpha_0) = -2(\log L(\alpha_0, \hat{\tau}(\alpha_0)) - \log L(\hat{\alpha}, \hat{\tau})) \quad (6)$$

se puede ver las diferencias entre las verosimilitud de dos modelos que difieren en una cierta cantidad de grados de libertad. Para este caso, podemos afirmar que $\Lambda(\tau_0) \sim \chi_1^2$ y $\Lambda(\alpha_0) \sim \chi_1^2$ [6], donde los grados de libertad de la distribución chi cuadrado vienen dados por la diferencia en el número de parámetros libres entre las dos log-verosimilitudes.

Esto nos permite desarrollar un intervalo de confianza al definir un cierto cuantil de referencia en la distribución χ^2_1 , por lo que se decidió tomar un intervalo del 68 %, para lo cual se obtuvo $\hat{\tau} = (2200^{+691}_{-1314})$ ns ($IC = 68\%$) y $\hat{\alpha} = (0,98^{+0,01}_{-0,42})$ ($IC = 68\%$). El resultado puede observarse en la figura 4.

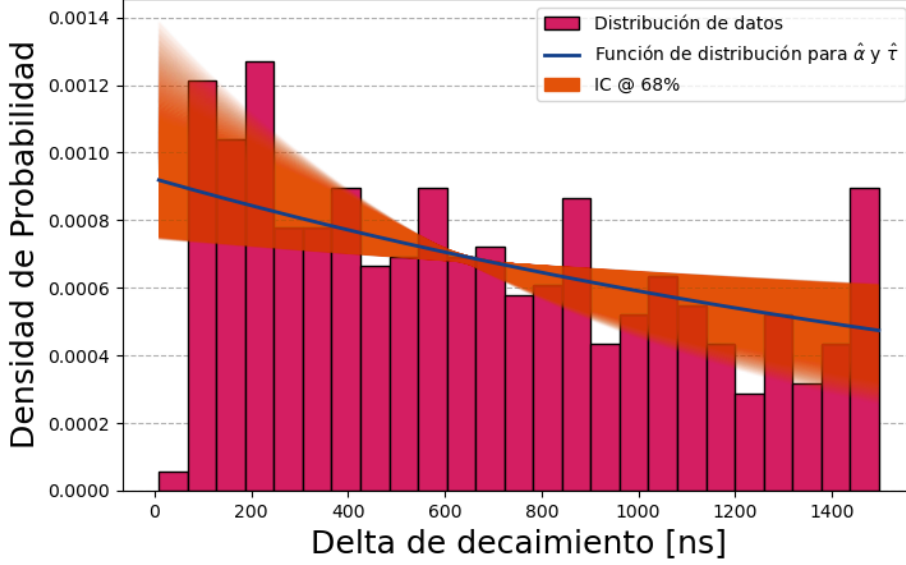


Figura 4: Función de distribución $f(t; \hat{\tau}, \hat{\alpha})$ junto con el intervalo de confianza del 68 % superpuestos a los datos experimentales.

Luego, se utilizó el Test de Wilks para analizar la mejora del modelo propuesto (2) con respecto al modelo de la exponencial truncada sin el término uniforme (3), con el objetivo de analizar si esta hipótesis era realmente significativa en nuestro set de datos. Para ello, se construyó el estadístico

$$\hat{\Lambda} = -2(\log L(1, \tau_0)) - \log L(\hat{\alpha}, \hat{\tau}), \quad (7)$$

donde $\alpha = 1$ representa una aproximación de que todos los datos obtenidos son efectivamente un decaimiento, la cual tomaremos como la hipótesis nula H_0 .

El estadístico alcanzó un valor $\hat{\Lambda} = 0,004231$, lo que para una distribución χ^2_1 representa un p-valor $p = 0,9481$. Esto implica que el valor observado $\hat{\Lambda}$ es altamente probable bajo H_0 , lo que implica que la adición de un término uniforme $U_{(t_{\min}, t_{\max})}$ en la distribución no aportó una mejora significativa a la calidad del ajuste. Esto podría deberse al tamaño del intervalo $t_{\max} - t_{\min} \simeq 1489$, el cual resulta comparable con el orden de $\hat{\tau} = 2200$. Esto provoca que la relación $g(t)/U$ nunca difiera en más de un 40 % para el rango $[t_{\min}, t_{\max}]$, lo cual podría implicar que la diferencia entre ambos términos no sea lo suficientemente significativa como para que sean distinguibles.

Por este motivo, se realizó una maximización de la verosimilitud para la distribución exponencial truncada (3) utilizando el mismo método numérico propuesto anteriormente. Se derivó un valor nominal de $\hat{\tau}$, mientras que para su error se utilizó el método de la matriz hessiana; a lo que se obtuvo un valor de vida media del muón de $\hat{\tau} = (2259 \pm 498)$ ns, como se observa en la figura 5.

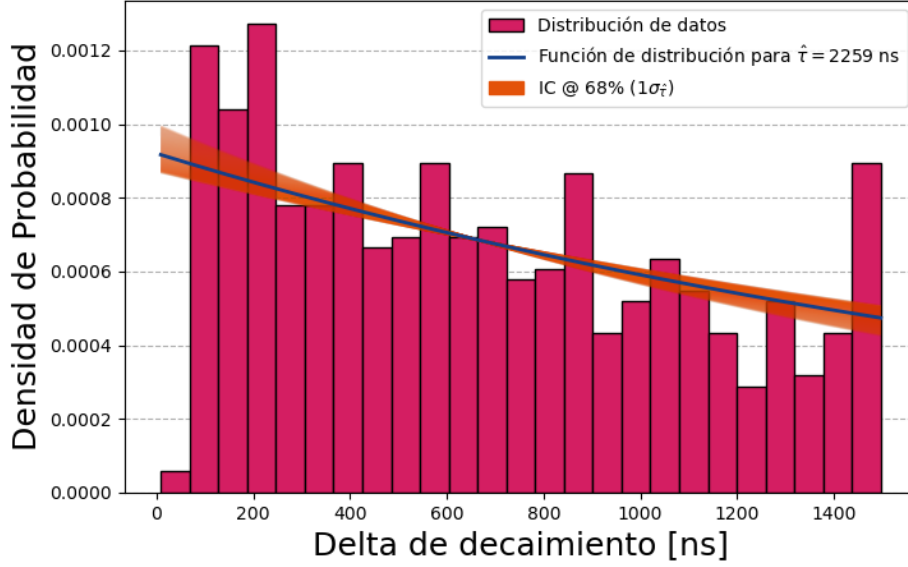


Figura 5: Función de distribución $g(t; \hat{\tau})$ junto con el intervalo de confianza del 68 % para $\hat{\tau}$ superpuestos a los datos experimentales.

4. Conclusiones

Se estudió la vida media del muón a partir de una distribución exponencial truncada junto a un término uniforme, ponderados por un factor α . Mediante la maximización del logaritmo de la verosimilitud, se obtuvo $\hat{\tau} = 2199,96$ ns y $\hat{\alpha} = 0,978$. Se realizaron dos enfoques diferentes para la asignación de incertezas mediante la matriz hessiana y el test de Wilks, comprobándose que el segundo es un método más confiable para el cálculo de intervalos de confianza, ya que la matriz hessiana estaba fuertemente mal condicionada. Con dicho método se obtuvo $\hat{\tau} = 2200^{+691}_{-1314}$ ns ($IC = 68\%$) y $\hat{\alpha} = (0,98^{+0,01}_{-0,42})$ ($IC = 68\%$), siendo el tiempo de vida medio coincidente con el tabulado $\tau_{tab} = (2196,98 \pm 0,04)$ ns.

Luego, se utilizó el test de Wilks para evaluar si el término uniforme $(1 - \alpha)$ efectivamente representaba una mejora relevante para el modelo. Para ello se compararon las verosimilitudes del modelo completo y del modelo reducido tomando $\alpha = 1$. Se comprobó que la diferencia entre los modelos no es significativa, y se especula que esto es debido al hecho de que el intervalo $[t_{min}, t_{max}]$ resulta comparable con $\hat{\tau}$, por lo que ambos términos en la distribución resultan poco distinguibles para el intervalo. Queda abierta una investigación a futuro con una ampliación en los posibles intervalos de tiempo registrados.

La reducción de nuestro modelo nos permitió calcular la vida media utilizando únicamente la exponencial truncada. Bajo esta hipótesis se obtuvo que $\hat{\tau} = (2259 \pm 498)$ ns, nuevamente mediante el análisis de la maximización de la log-verosimilitud y la matriz hessiana.

Referencias

- [1] Brian Wundheiler. Instrumentación en física de altas energías, aplicación a experimentos de detección de partículas. <https://materias.df.uba.ar/labo5a2013v/files/2013/02/curso-Fermi-Lab.pdf>. Accedido: 22-11-2025.
- [2] Mark Thomson. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013.

- [3] Particle Data Group. Review of particle physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(8):083C01, 2020.
- [4] Gary King. *Unifying Political Methodology: The Likelihood Theory of Statistical Inference*. Cambridge University Press, New York, 1989. p. 84.
- [5] D. M. Webber, V. Tishchenko, Q. Peng, and the MuLan Collaboration. Measurement of the positive muon lifetime and determination of the fermi constant to part-per-million precision. *Physical Review Letters*, 106(4), 2011. Erratum: Phys. Rev. Lett. 106, 079901 (2011).
- [6] G. Frodesen, A. O. Skjeggstad, and H. Tøfte. *Probability and Statistics in Particle Physics*. Universitetsforlaget, Bergen, Norway, 1979. Chapter 14.2.4-5.