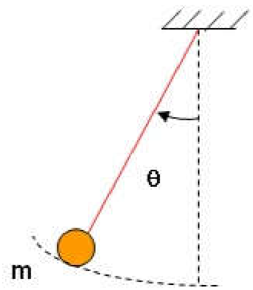
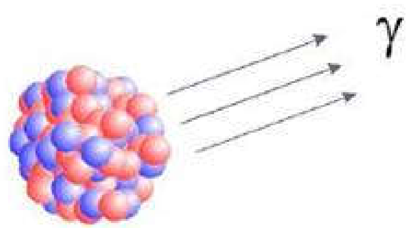
Procesos estocásticos y determinísticos en física experimental

Procesos estocásticos vs determinísticos

Proceso determinístico $x(t)$

Proceso estocástico $P(X(t) = x)$





- Angulo $\theta(t)$ de un pendulo.
- $I(t)$ en un circuito.

- Cantidad de "1" al tirar 4 dados.
- Numero de emisiones γ de una fuente en 1 segundo.

Son variables aleatoria

NO son variables aleatorias:

- Vida media de un isotopo radioactivo
- Numero medio de veces que sale el "1" al tirar 4 dados

Preguntas fundamentales interesantes

Proceso determinístico $x(t)$

Proceso estocástico $P(X(t) = x)$

Definicion no obvia

En muchos casos podemos asignar una incerteza y tratar el problema como deterministico.

Incapacidad de conocer o asignar condiciones que determinan $x(t)$, lo que genera valores aleatorios en $X(t)$.

Proceso intrinsicamente estocástico. X variable aleatoria. Ej: decaimiento radiactivo, fluctuación térmica

Definicion no obvia

Nos interesa aprender a medir y caracterizar estos procesos

“En el sentido más general todo proceso físico real se puede pensar como estocástico y toda variable como aleatoria. La cuestion es bajo que condiciones la denominacion de *determinista* es una buena aproximación”. *An Introduction to Stochastic Processes in Physics,* Don S. Lemos.

Preguntas fundamentales interesantes

- Qué significa la Probabilidad $P(X = x)$?
- Cómo se determina $P(X = x)$?

Proceso inductivo:
Las simetrias y la fisica del problema nos permiten deducir una $P(x)$

Proceso estadístico: estimamos $P(X = x)$ midiendo N veces la variable aleatoria X y estimando la frecuencia $f(X)$con la que cae en el valor x.

Deben coincidir en el limite de $N \rightarrow \infty$.

Son conceptualmente identicas ambas interpretaciones de la probabilidad?

PREGUNTA AUN NO RESUELTA!

Por suerte como físicos sólo nos interesa conocer las leyes que gobiernan las probabilidades y como aplicarlas, y estas son independientes del concepto subyacente.

Mediciones y observaciones

Llamamos **evento aleatorio** a todo posible resultado experimental que surja de una observacion en un proceso estocástico. Cuando es cuantificable, **se asocia a una variable aleatoria** X. Ejemplos: Decaimiento radioactivo en un determinado intervalo de tiempo. Numero de fotones en un determinado intervalo de tiempo. Ej: veces que sale el “1” .

Una **observacion** es la realización concreta de un evento, con valor x. Ej: salio 3 veces.

Una **medición** implica en cambio la estimación del **valor esperado** , mas en general de alguna característica de la distribución. Ejemplo: La vida media de un muon, la intensidad de la luz, la cantidad de pochoclo que explotan en promedio por unidad de tiempo, la desviación estandart de distribución estadística de los fotones, etc.

- En algunos experimentos (deterministas), la observación coincide con la medición dentro del error instrumental.
- Si mejoramos la resolución el mismo experimento puede arrojar distintas observaciones. En los casos mas simples basta con promediar los valores para tener el resultado de la medición. **AMPLIAREMOS**
- En otros tenemos que estimar la medicion a partir de **distribución de probabilidad** asociada a las observaciones.
  - En muchos casos es conveniente organizar los datos en un HISTOGRAMA.

Histograma

- Cómo elegimos el ancho de cada columna (bin) para organizar los datos adquiridos?
  - No hay una receta única, el criterio del experimentador es central. Hay algunas reglas que pueden ayudar:
  - Regla 1: la separación entre columnas tiene que ser mayor que la incerteza experimental de cada dato individual.
  - Regla 2: El numero de datos en cada columna debe ser significativo, para reducir la incerteza estadistica asociada (10 datos tienen una incerteza asociada de $\sim$30%)
  - Regla 3: El ajuste de la distribucion va a ser mejor cuanto mas columnas tenga el histograma, siempre y cuando se cumpla con las reglas 1 y 2.
  - Regla 4: Ninguna conclusion fisica deberia variar significativamente al cambiar la binarizacion del hitograma dentro de los rangos correctos.

  - Receta de Labo 1 (y lo que usan por default python y otros programas). Regla de Sturges:

$$M = int\left(1 + log_2(N)\right) = int(1 + 3{,}322 \ln(N)\ )$$

o bien $= int(2 + 3{,}322 \ln(N)\ )$

Distribución de probabilidad

Notacion simplificada: $P(X = x) \sim P(x)$

Una distibución de probabilidad $P(x)$ asigna probabilidades de tomar valores a la variable aleatoria X.

Se puede definir a partir de $P(x)$ una **Función de distribución (FDA o FD)**

$$F(t) = P\left\{x < t\right\}$$

En el caso de **variables continuas** definimos una **densidad de probabilidad**

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad P\left\{x_1 \leq x \leq x_2\right\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

Momentos de una distribucion

Valor medio o valor esperado:

$$E(x) \equiv \langle x \rangle = \mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

$$E(x) \equiv \langle x \rangle = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

Varianza: $\mathrm{var}(x) = \sigma^2 = E\left[(x-\mu)^2\right]$ $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \mu^2$

Momento de orden n:

$$\mu_n = E(x^n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n p(x_k)$$

$$\mu_n = E(x^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, \mathrm{d}x$$

En el caso de muchas variables: $C_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$

C_{ii} es la varianza de x_i, mientras que C_{ij} da cuenta de la correlacion entre las variables.

Ajustes

- Una vez que tenemos un histograma, el ajuste de los datos estadistico por una función de distribución es similar al ajuste de datos adquiridos en un experimento deterministas por una funcion $y(x)$. y_i es la altura normalizada de cada columna n_i/Ny x_i es el valor medio que identifica cada columna. Hay rutinas de python, mathlab, origin, que realizan este procedimiento en forma automatica. En todos los casos:

- Lo que sigue **es valido para cualquier ajuste**, **se trate de un experimento estocástico o "determinista".**
- Proponemos una función de ajuste, que puede ser una distribucion (por ejemplo Gaussiana) o una función cualquiera.
- El programa encuentra los parametros de la distribucion que minimizan la distancia de los datos experimentales con el ajuste propuesto.
- Esa minimización se hace encontrando los parámetros que minimizan χ^2_ν .

$$\chi^2 \equiv \sum \left\{ \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - y(x_i)]^2 \right\}$$

$$\chi^2_\nu = \frac{\chi^2}{\nu}$$

$\nu = N - m$ (N numero de datos, m cantidad de parámetros de ajuste) es el numero de grados de libertad.

Cómo sabemos si el ajuste es bueno?

Veamos un poco mas en detalle de que se trata este estimador

Ajustes

$$s^2 = \frac{1}{N-m}\frac{\Sigma\{(1/\sigma_i^2)[y_i - y(x_i)]^2\}}{(1/N)\Sigma(1/\sigma_i^2)} = \frac{1}{N-m}\sum w_i[y_i - y(x_i)]^2$$

Varianza del ajuste:Es una medida de la dispersion de los datos respecto de la funcion $y(x)$ propuesta, con m parametros libres a_k. **Aumenta si $y(x)$ no es un buen ajuste Y si los datos estan dispersos**.

$\nu = N - m$ grados de libertad.

$$\langle\sigma_i^2\rangle = \frac{(1/N)\Sigma((1/\sigma_i^2)\sigma_i^2)}{(1/N)\Sigma(1/\sigma_i^2)} = \left[\frac{1}{N}\sum\frac{1}{\sigma_i^2}\right]^{-1}$$

Varianza media de los datos: **Aumenta con la dispersion y/o la incerteza de los datos**. Es una caracteristica de la distribucion de los datos y es independiente del ajuste.

Si $y(a_k, x)$ es lineal en a_k hay una relacion matematica sencilla entre estos estimadores y χ^2_ν.

$$\chi^2 \equiv \sum\left\{\frac{1}{\sigma_i^2}[y_i - y(x_i)]^2\right\}$$

$$\chi_\nu^2 = \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{s^2}{\langle\sigma_i^2\rangle}$$

Es un estimador de la bondad del ajuste

Si las incertezas estan bien estimadas deberia ser independiente de las mismas. Para ajuste optimo $s^2 \sim \sigma^2$ y $\chi^2_\nu \sim 1$.

Si el ajuste no es bueno $\chi^2_\nu \gg 1$

Si $\chi^2_\nu < 1$ las incertezas estan subestimadas.

Bondad de ajuste y aceptacion de hipotesis

- Cuan cerca de 1 tiene que estar χ^2_ν para decir que el ajuste es “bueno”?
- Esto es un ejemplo de una situacion mas general: como decidir si una hipotesis (en este caso la funcion de ajuste propuesta) es razonable?
- Podemos cuantificar “la bondad” de un ajuste?