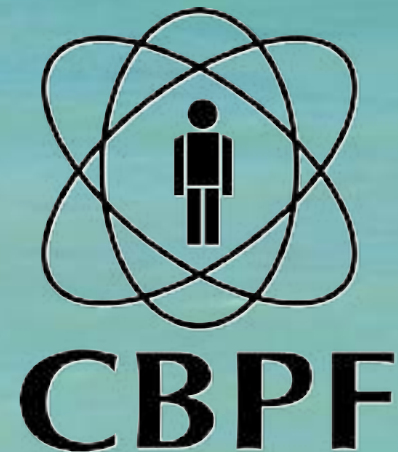
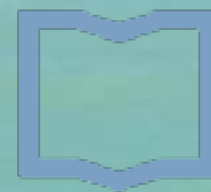


LENTES GRAVITACIONALES EN ASTROFÍSICA Y COSMOLOGÍA

MARTÍN MAKLER
CBPF & ICAS/IFICI/CONICET-UNSAM



MINISTRY OF
SCIENCE, TECHNOLOGY
AND INNOVATION



Instituto de
Ciencias Físicas
ICIFI-ECYT_UNSAM-CONICET



universidad de buenos aires - exactas
departamento de Física
Juan José Giombiagi



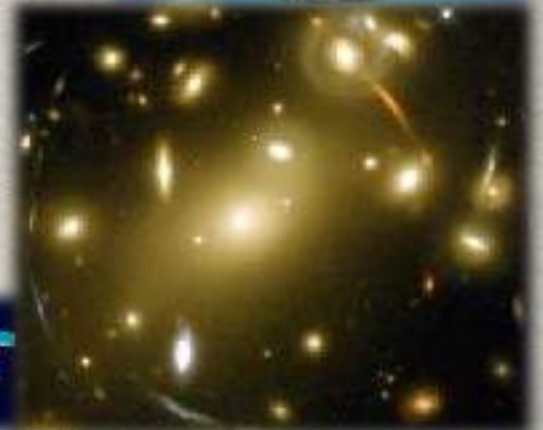
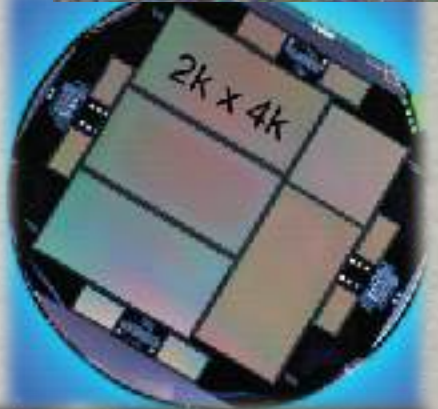
SOBRE EL CURSO

Formato del curso:

- clases teóricas: 9h a 13h (4 bloques)
- prácticas: guías de ejercicios + preguntas: 14h a 17h
- evaluación: trabajo práctico computacional

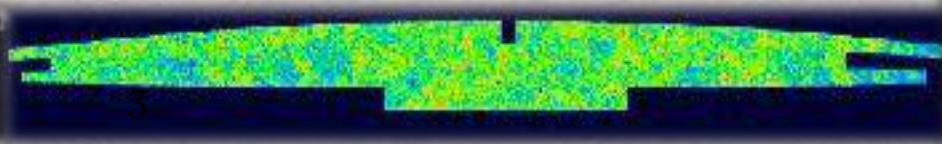
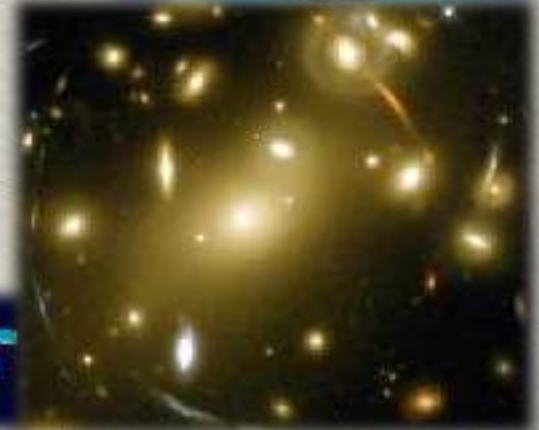
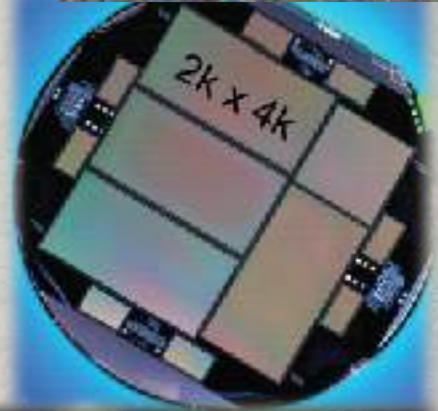
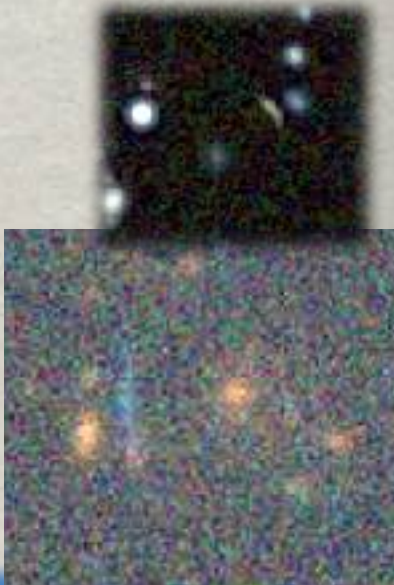
Materiales de las clases

- <https://asignaturas.df.uba.ar/lgeayc-makler/>



Bibliografia y referencias sugeridas

- Gravitational Lensing and Microlensing, Mollerach S., Roulet E., 2002, World Scientific
- Introduction to Gravitational Lensing Lecture scripts, Massimo Meneghetti, https://www.ita.uni-heidelberg.de/~jmerten/misc/meneghetti_lensing.pdf
- Introduction to Gravitational Lensing With Python Examples, Massimo Meneghetti, 2021, Springer-Verlag
- Lecture notes and slides, Massimo Meneghetti, 2017, <http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching.html>
- Gravitational Lensing, Dodelson S., 2017, Cambridge University Press
- Gravitational Lenses, Schneider P., Ehlers J., Falco E.E., 1992, Springer-Verlag
- Gravitational Lensing: Strong, Weak & Micro, Proceedings of the 33rd Saas-Fee Advanced Course, Schneider P., Kochanek C., Wambsganss J., 2004, Springer-Verlag
- Modern Cosmology, Dodelson S., 2003, Elsevier Academic Press
- Physical Foundations of Cosmology, Mukhanov V., 2005, Cambridge University Press
- The Early Universe, 1990, Kolb E., Turner M., Addison-Wesley
- Cosmological Physics, Peacock J., 1999, Cambridge University Press



Gravitational Lensing and Microlensing

Silvia Mollerach & Esteban Roulet

World Scientific



**“Cualquier pregunta es
un grito para conocer al
mundo, no hay preguntas
tontas”**

Carl Sagan

La luz no (siempre) anda en línea recta!

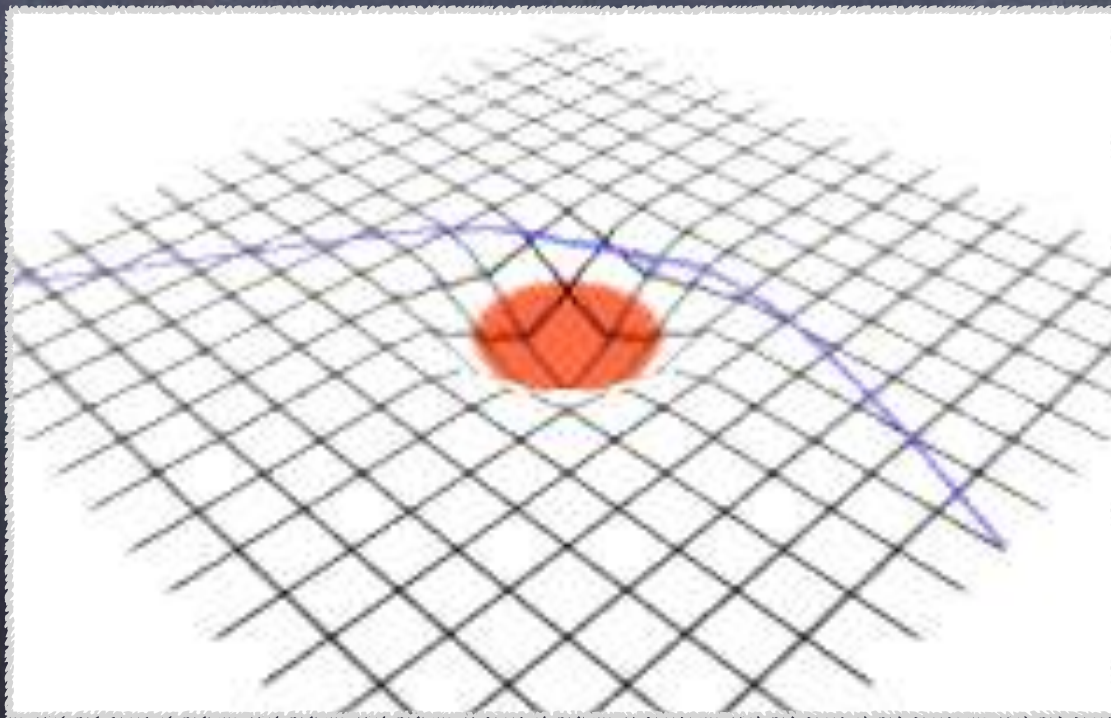
Propagación de la luz en la relatividad general

1907: principio de equivalencia

1911: Obtiene la desviación de la luz (igual al newtoniano)

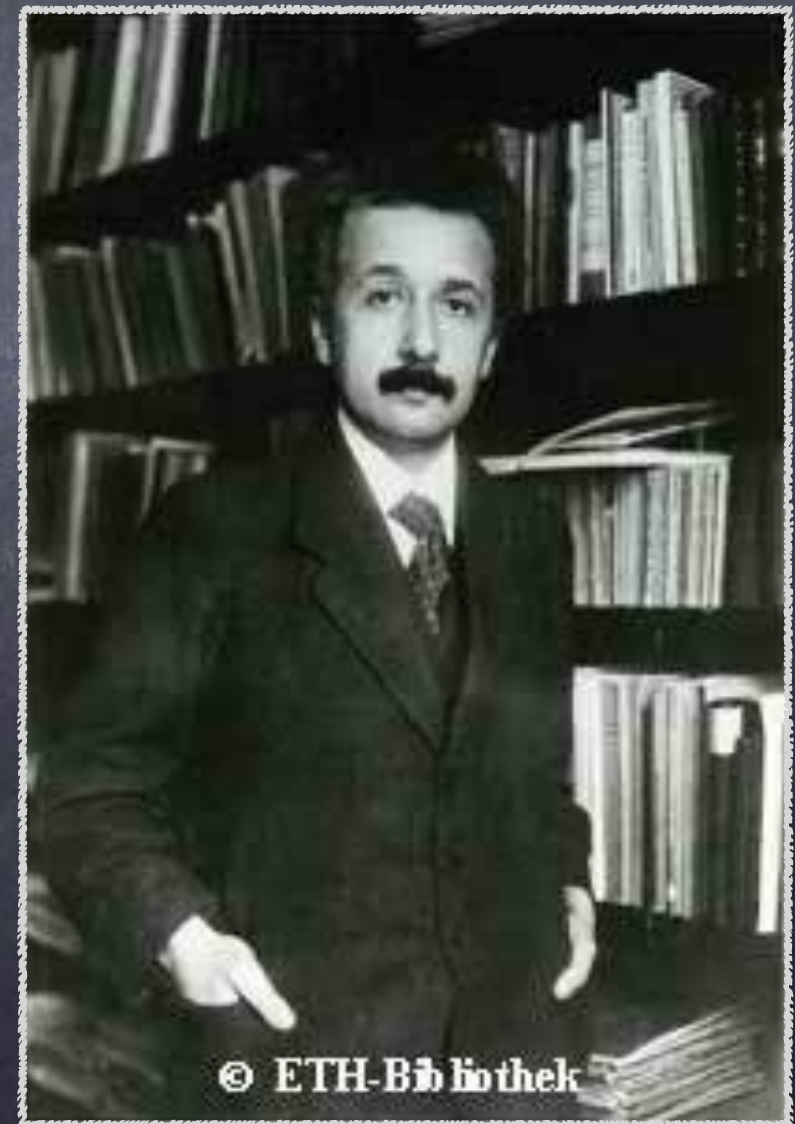
1915: Teoría de la relatividad general (doble del desvío!)

Espacio-tiempo curvo



Todo lo que existe “siente” la gravedad:
caigo luego existo

$$E = mc^2$$

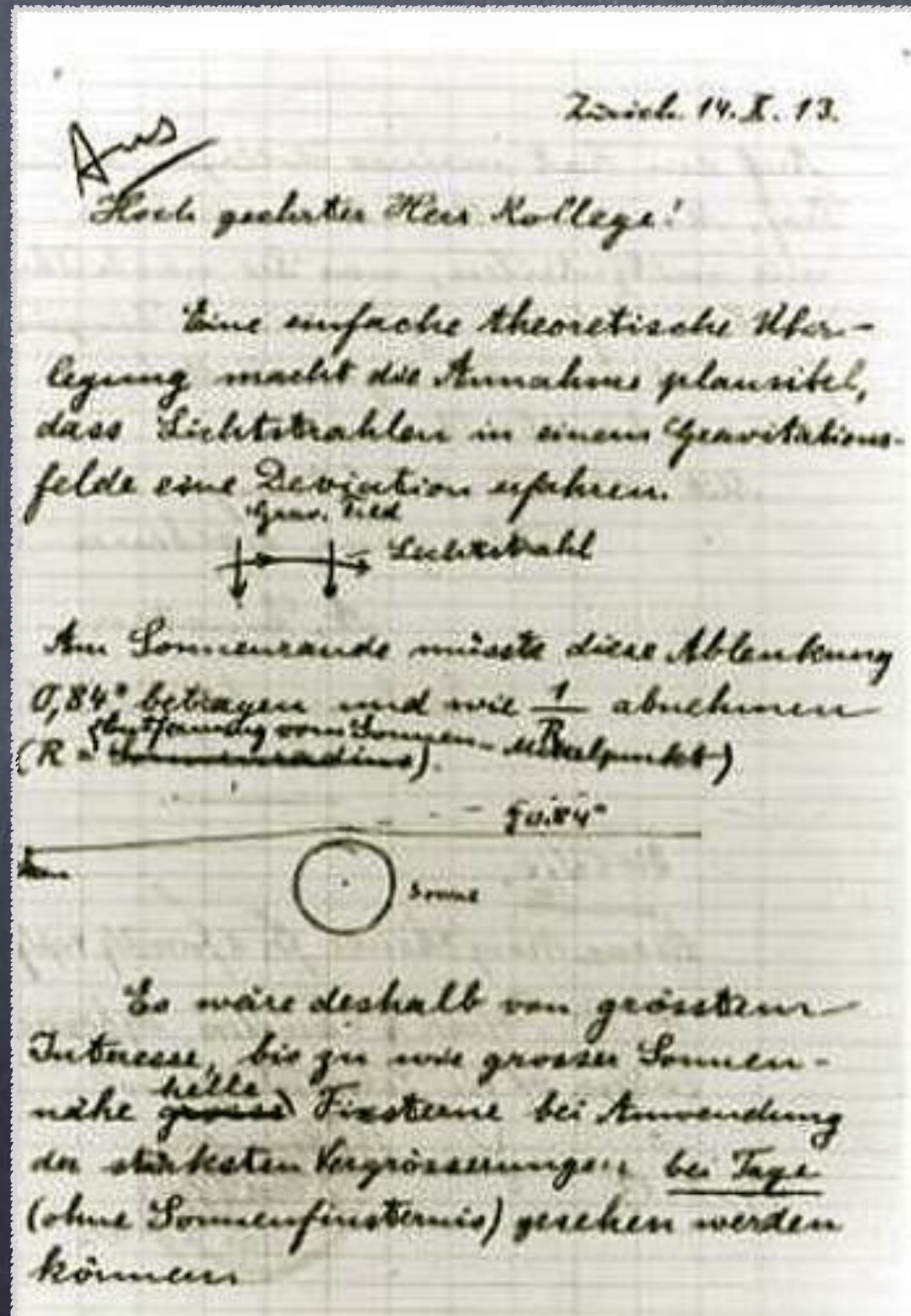


© ETH-Bibliothek

Breve historia de la deflexión de la luz

Detección

1912: Einstein sugiere
que astrónomos midan la
desviación

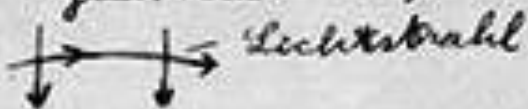


Zürich. 14. X. 13.

Aus

Hoch geehrter Herr Kollege!

Eine einfache theoretische Überlegung macht die Annahme plausibel, dass Lichtstrahlen in einem Gravitationsfeld eine Deviation erfahren.



MOUNT WILSON
ARCHIVES
OBSERVATORY

An Sonnenrande müsste diese Ablenkung $0,84''$ betragen und wie $\frac{1}{R}$ abnehmen ($R = \text{Entfernung vom Sonnen-Mittelpunkt}$).



Es wäre deshalb von grösstem Interesse, bis zu wie grosser Sonnen-nähe ^{helle} ~~grosse~~ Fixsterne bei Anwendung der stärksten Vergrösserungen bei Tage (ohne Sonnenfinsternis) gesehen werden können.

Auf den Rat meines Kollegen, d. Herrn Prof. Maurer bitte ich Sie deshalb, mir mitzuteilen, was Sie nach Ihrer reichen Erfahrung in diesen Dingen für mit den heutigen Mitteln erreichbar halten.

Mit aller Hochachtung

Ihr ganz ergebener

A. Einstein

Technische Hochschule
Zürich.

Dear Sir,

Many, many thanks for a friendly reply to Mr Professor Dr. Einstein, Mhonorable College of the Polytechnical School.

14. X. 13

Yours truly,
Maurer



Breve historia de la deflexión de la luz

Detección

1912: Einstein sugiere que astrónomos midan la desviación

1912: Perrine/QAC, expedición para observar el eclipse en Brasil



Breve historia de la deflexión de la luz

Detección

1912: Einstein sugiere que astrónomos midan la desviación

1912: Perrine/QAC, expedición para observar el eclipse en Brasil (Cristina)

“sufrimos un eclipse, en lugar de observar uno”



Breve historia de la deflexión de la luz

Detección

1912: Expedición Argentina para observar el eclipse en Brasil

Llovió

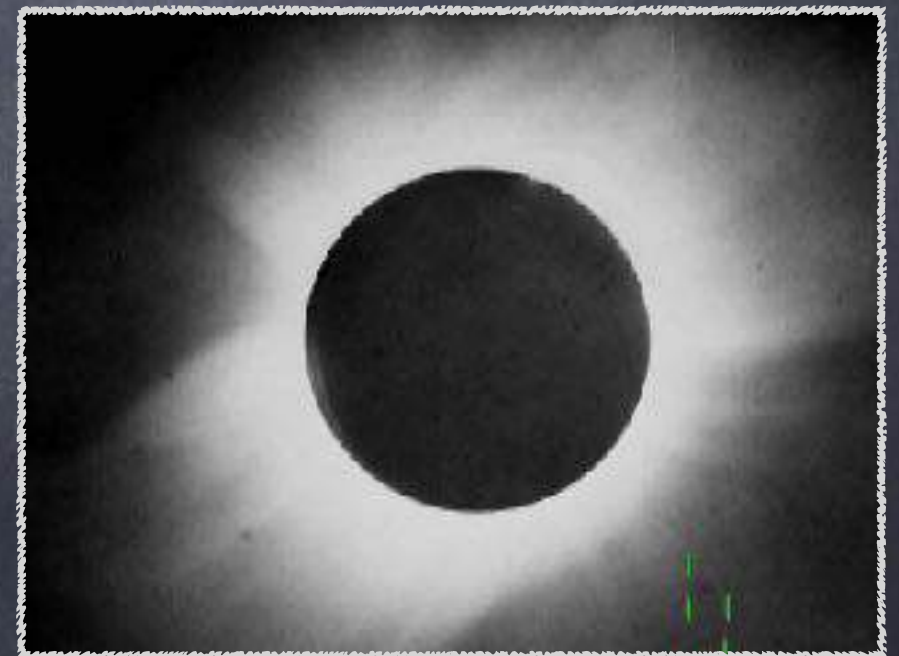
1914: Expedición de Erwin Freundlich para observar eclipse en Crimea

Terminaron presos por la primer guerra mundial

1919: Sobral

Prerrine: sin fondos

Detección del desvío de luz por la gravedad
(tiempo mejor que en la Isla de Príncipe)



*"La pregunta que mi mente formuló fue
respondida por el cielo soleado de Brasil"*

A. Einstein

A wide-angle photograph of a beach. The foreground is a sandy beach with some small rocks and debris. The middle ground is the turquoise ocean with gentle waves. The background is a clear blue sky. The text "LENTE GRAVITACIONALES" is overlaid in the center in a large, white, serif font.

LENTE GRAVITACIONALES

VISIONES DIFERENTES

- Einstein 1912: descubre el efecto de lente, pero no lo publica
- Sobral 1919: deflexión de la luz por la gravedad
- Chwolson 1924: primer artículo científico sobre lentes
- Einstein 1936: “forzado” a publicar un artículo

“No es muy probable que se pueda observar este fenómeno”



Therefore, there is no great chance of observing this phenomenon, even if dazzling by the light of the much nearer star B is disregarded. This apparent amplification of q by the lens-like action of the star B is a most curious effect, not so much for its becoming infinite, with x vanishing, but since with increasing distance D of the observer not only does it not decrease, but even increases proportionally to $\sqrt{D}$.

ALBERT EINSTEIN

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,
PRINCETON, N. J.

VISIONES DIFERENTES

- Einstein 1912: descubre el efecto de lente, pero no lo publica
- Sobral 1919: deflexión de la luz por la gravedad
- Chwolson 1924: primer artículo científico sobre lentes
- Einstein 1936: “forzado” a publicar un artículo

“No es muy probable que se pueda observar este fenómeno”

- Zwicky 1937: optimista

“La probabilidad de que se encuentren nebulosas actuando como lentes gravitacionales es prácticamente una certeza”



- Walsh, Carswell, Weymann 1979: Descubierta del primer quasar lenteado (imagen doble de QSO 0957+561)

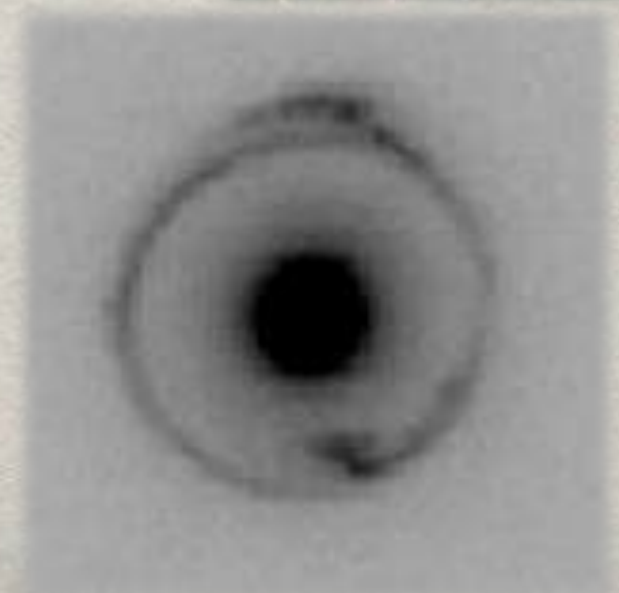
DESCUBRIMIENTOS

- Roger Lynds e Vahe Petrosian 1986, Soucail, Fort, & Picat 1987: Descubrimiento de los arcos gravitacionales:

arcos em A370, A2218, CL2244-02

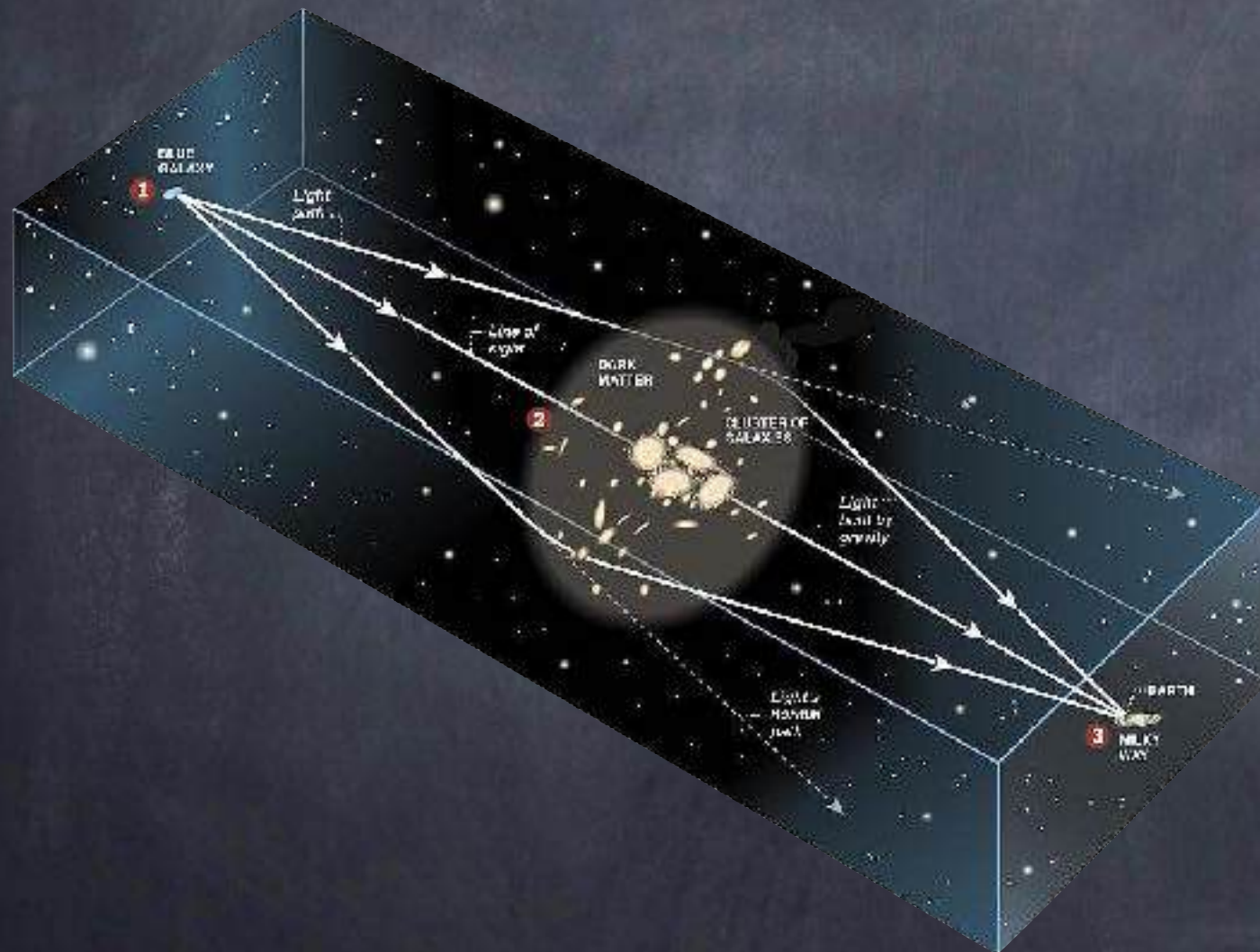
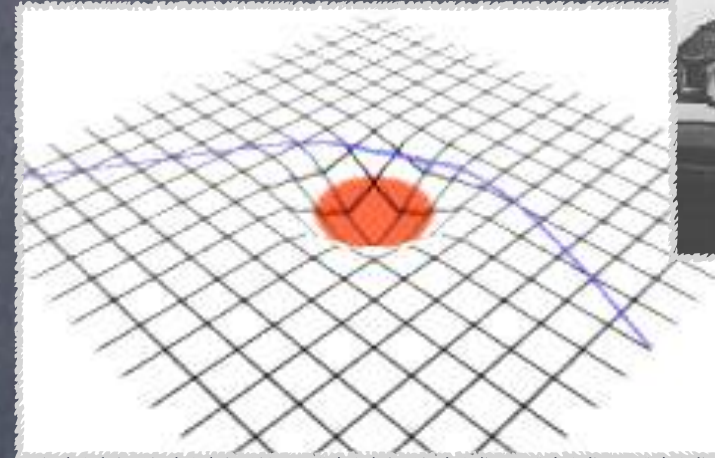
Nadie los había predicho...

- ✻ Hewitt, et al. 1988: anillo de Einstein (radio)
- ✻ Irwin et al. 1989: efecto microlentes en cuasares
- ✻ Colaboraciones EROS & MACHO, 1993: primeras detecciones del efecto de microlentes por estrellas
- ✻ Bond et al., 2003: primer detección de planetas!
 - ✻ ~2 planetas con masa de Júpiter a ~3 AU



Lentes Gravitacionales

“deformación” de la trayectoria de la luz por el espacio-tiempo curvo



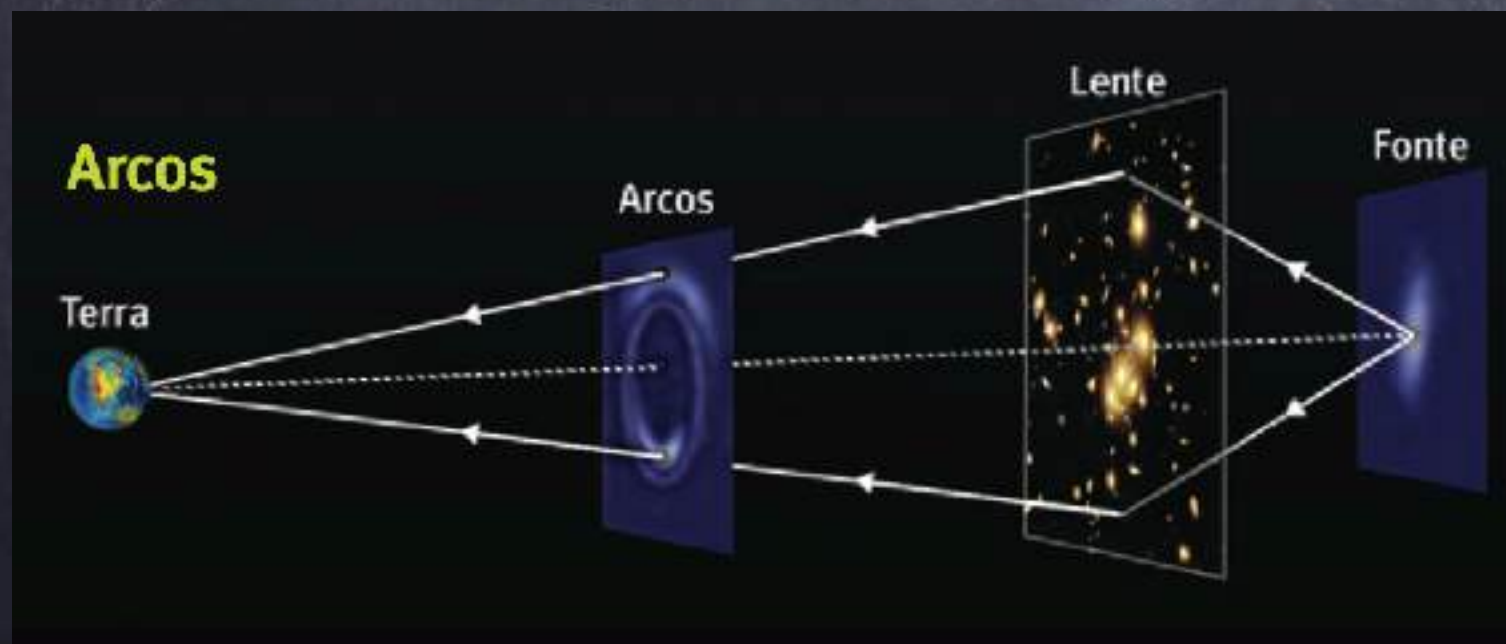
Imágenes múltiples
Mirages gravitacionales



Efecto fuerte de lentes

- Imágenes múltiples, grandes deformaciones, magnificación, retraso temporal
- Imágenes múltiples permiten reconstruir la distribución de masa de la lente y la forma de las fuentes!
- Trayectoria de la luz en el espacio curvo
 - brillo superficial conservado
 - acromático
- estructura de galaxias y cúmulos → materia oscura y bariones
- informaciones complementares sobre la cosmología y tests de la gravedad

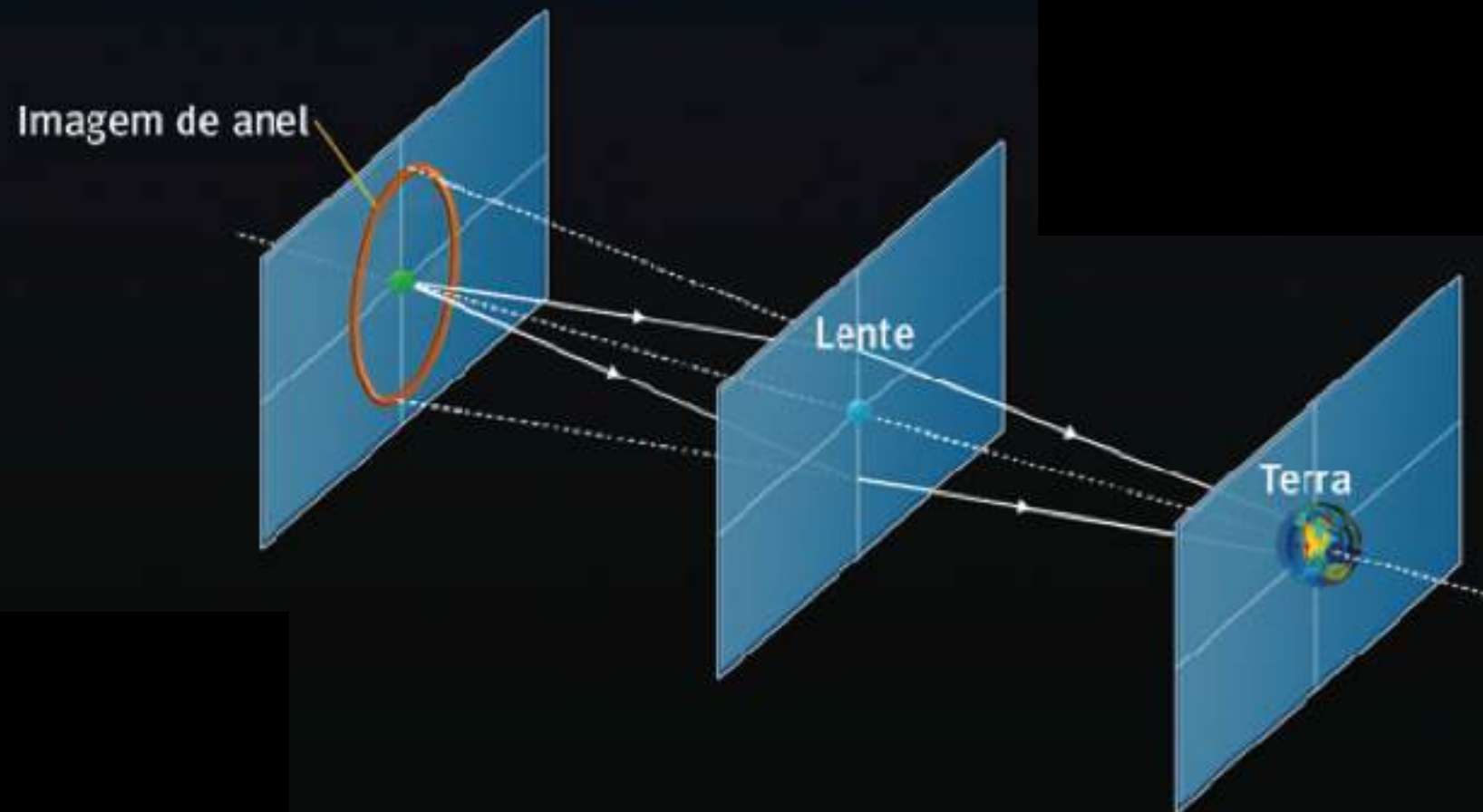
Telescópios gravitacionales



efecto fuerte de lentes, **gravedad débil**



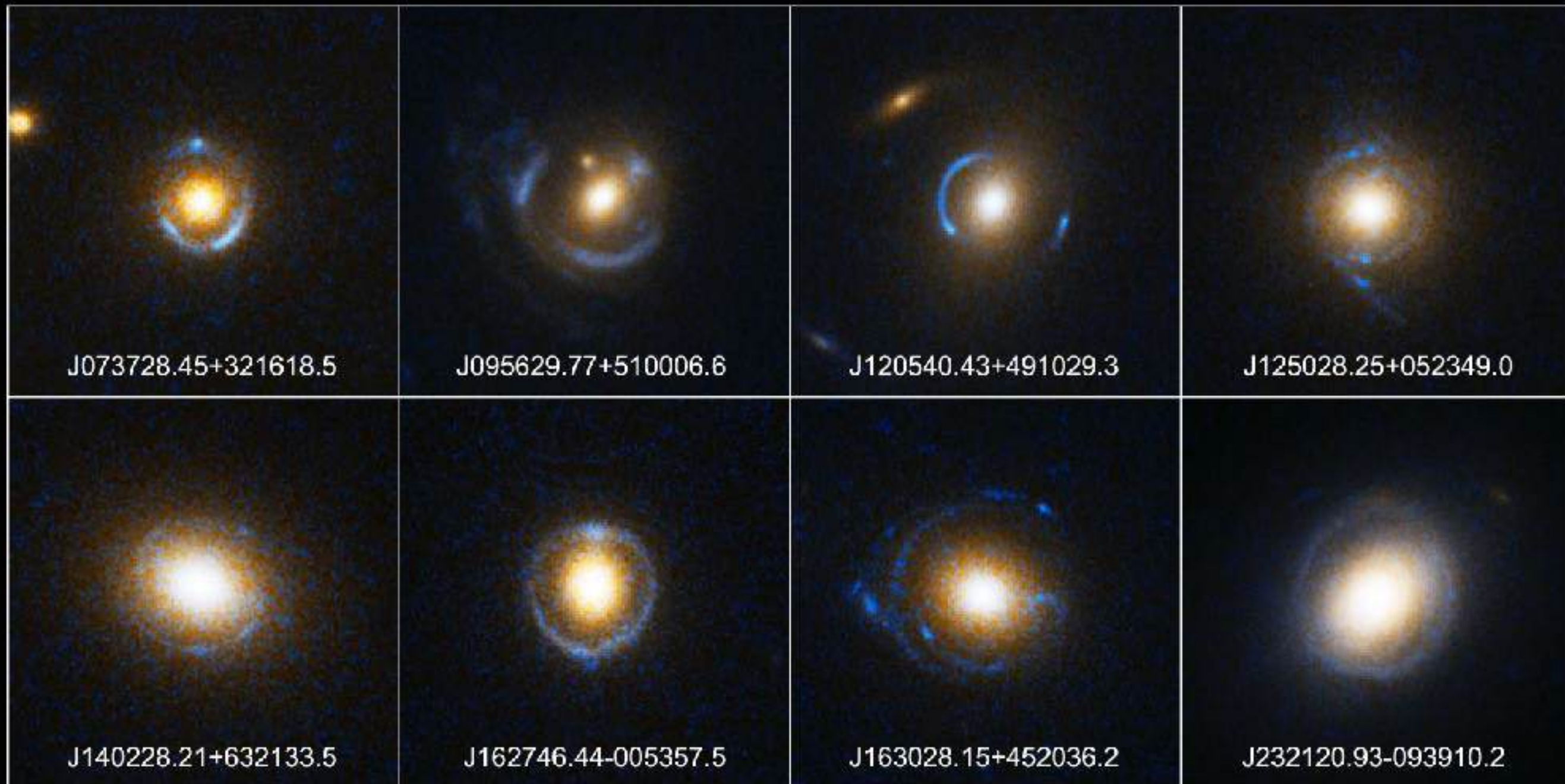
“Anillos de Chwolson-Einstein”



Anéis de Chwolson-Einstein
observados pelo telescópio
espacial Hubble

- Cuando una galáxia hace de lente para otra galáxia más distante
Si hay alineamiento aproximado, se produce la imagen de un anillo

“Anillos de Chwolson-Einstein”

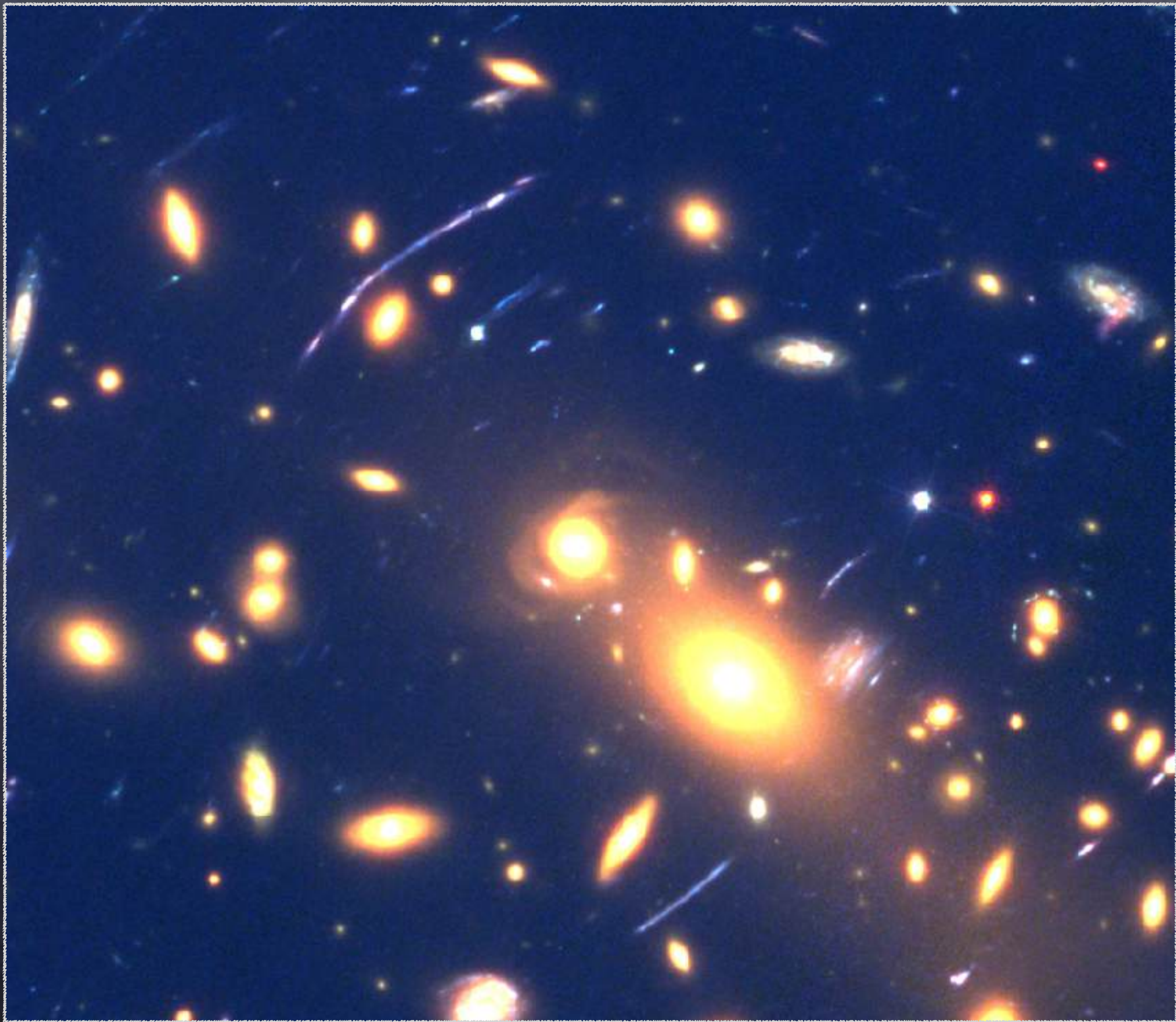


Einstein Ring Gravitational Lenses
Hubble Space Telescope • Advanced Camera for Surveys

Macrolenteamiento – Efecto Fuerte



Arcos Gravitacionales



Una miríada de fenómenos

Intensidad

● Efecto fuerte

- Grandes magnificaciones
- Imágenes múltiples
- Distorsiones
 - Anillos
 - Arcos

● Efecto débil

- Pequeña “rotación”
- Pequeña magnificación
- Detectado estadísticamente

Escala angular

● Mili-lentes

- Escala galáctica
- Matéria oscura
- Búsqueda de planetas

● Micro-lentes

- Quasares

● “Macro-lentes”

- Galaxias
- Cúmulos
- Estructuras en grandes escalas

+ sombra de agujeros negros, *femtolensing*, ondas gravitacionales....

Una miríada de fenómenos

Int

● E

■

■

■

● Efe

■ Pe

■ Pe

■ De

Las lentes gravitacionales

son un fenómeno físico

que permite

desarrollar herramientas

para hacer física

muy interesante

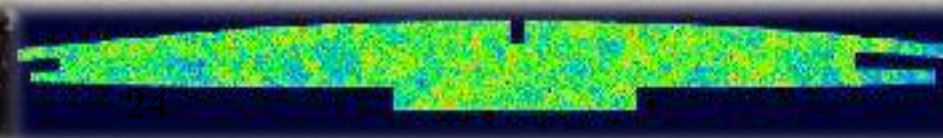
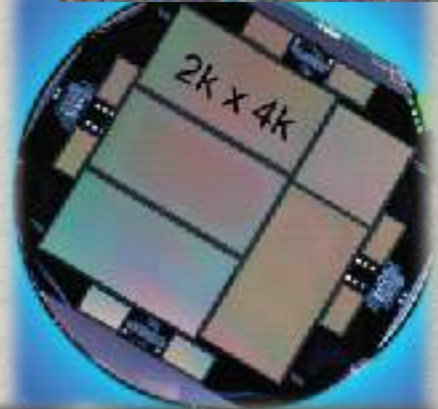
+ sombra de agujeros negros, *femtolensing*, ondas gravitacionales....

ESTRUCTURA GENERAL DE LA MATERIA

Parte I: Introducción, visión general y microlentes gravitacionales

[GR, SL][lentes puntuales, astrofísica, materia oscura]

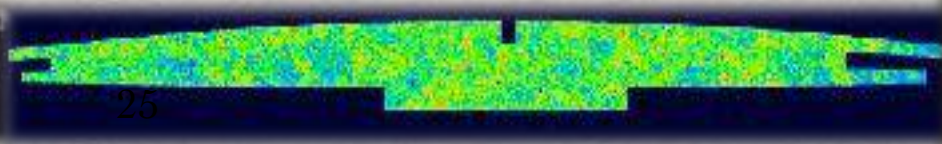
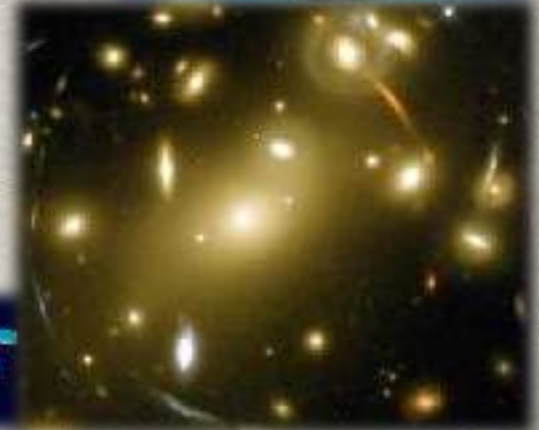
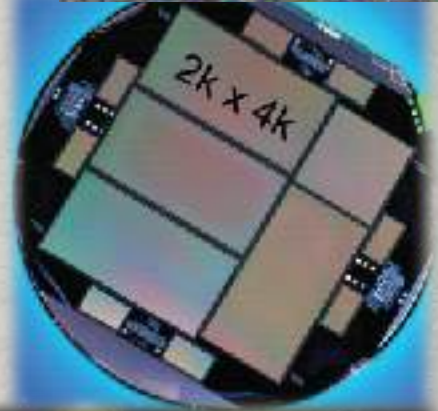
- ☐ Introducción a las lentes gravitacionales y sus aplicaciones actuales
- ☐ Deflexión de la luz y ecuación de la lente
- ☐ Lentes puntuales
- ☐ Mapeo de lentes, magnificación, cáusticas y curvas críticas
- ☐ Lentes binarias
- ☐ Curvas de luz de microlentes y microlentes por astrometria
- ☐ Mas allá de la lente puntual y movimientos uniformes (efectos de segunda orden)
- ☐ Estadística de lentes



ESTRUCTURA GENERAL DE LA MATERIA

Parte II: lentes por galáxias y cúmulos de galáxias
[cosmología, *weak & strong*][objetos astrofísicos +
cosmología]

- ☐ Ecuación de la lente en un universo en expansión
- ☐ Modelos de lentes extensas
- ☐ Retraso temporal
- ☐ Efecto débil de lentes (fundamentos de *weak lensing*, regímenes y métodos)

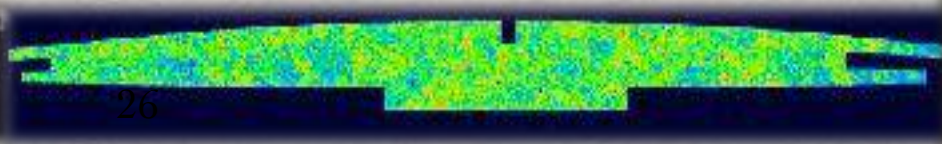
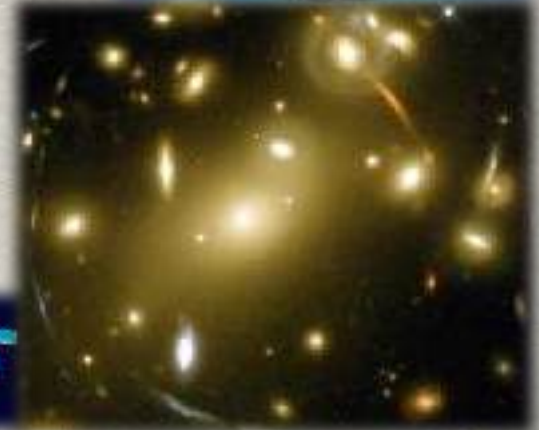
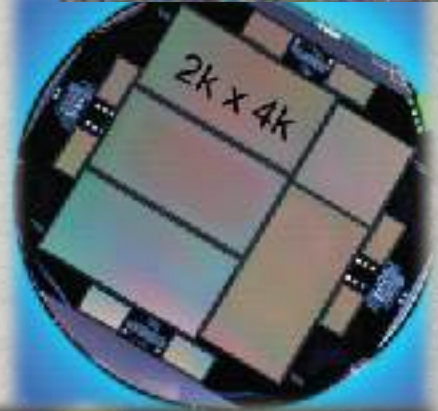


ESTRUCTURA GENERAL DE LA MATERIA

Parte III: lensing a nivel cosmológico y tópicos avanzados

[perturbaciones, *weak lensing*][gravedad fuerte, ondas gravitacionales, Maxwell]

- ☐ Mas allá del plano único: lentes y estructura en gran escala
- ☐ *Lensing* de la radiación cósmica de fondo
- ☐ Lentes en gravedad modificada
- ☐ Gravedad fuerte: “sombras de agujeros negros”
- ☐ *Lensing* de ondas gravitacionales
- ☐ Lentes en la óptica ondulatoria



A wide-angle photograph of a beach. The foreground is a sandy beach with some small rocks and debris. The middle ground is the turquoise ocean with gentle waves. The background is a clear blue sky. The text "ECUACIÓN DE LA LENTE Y LENTE PUNTUAL" is overlaid in the center of the image.

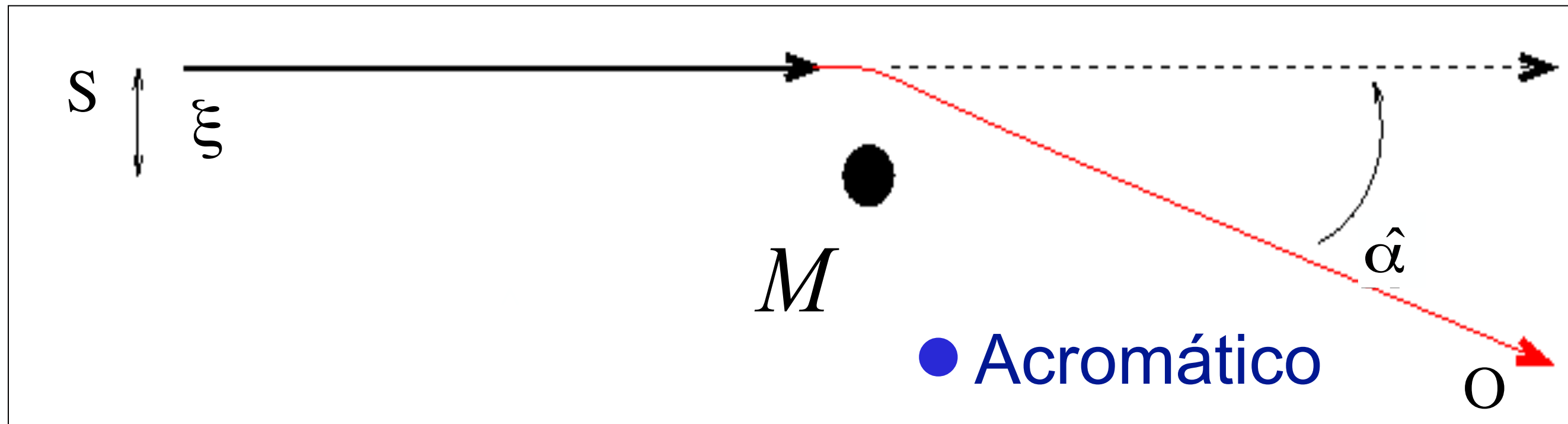
ECUACIÓN DE LA LENTE Y LENTE PUNTUAL

DESVIACIÓN DE LA LUZ POR LA GRAVEDAD

Geodésica nula,
Principio de Fermat

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) d\sigma^2$$

$$\frac{d\sigma}{dt} := c' = \sqrt{\frac{1 + 2\phi/c^2}{1 - 2\phi/c^2}} \simeq c \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$$



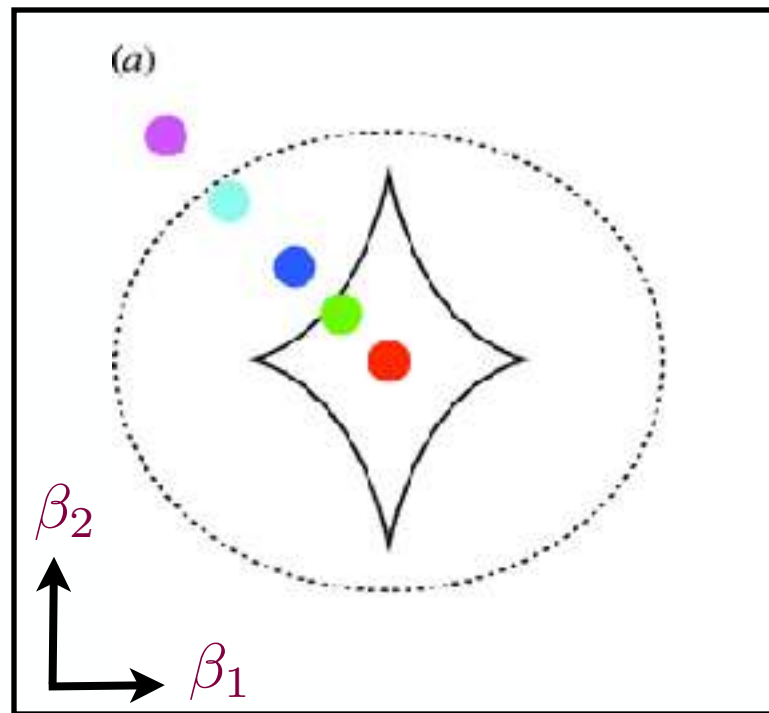
Desvío causado
por una lente
puntual:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{\xi}$$

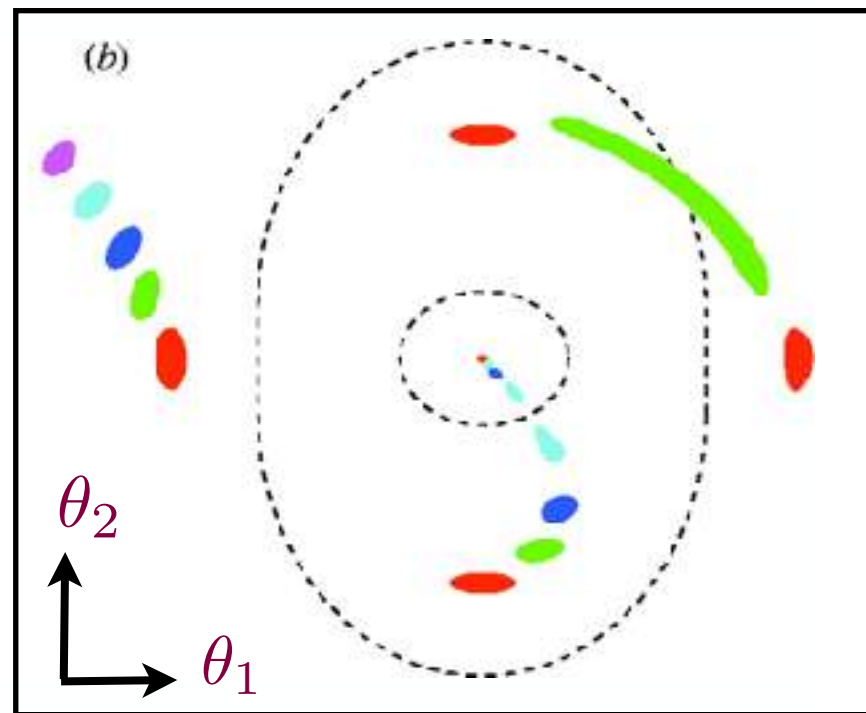
(factor 2 en
comparación con
“Newton”)

Geometría del efecto de lentes por plano único

(condiciones: campo débil, único plano, óptica geométrica)



plano de las fuentes



plano de la lente/imágenes

coordenadas físicas
(distancia)

η

ξ

coordenadas
angulares

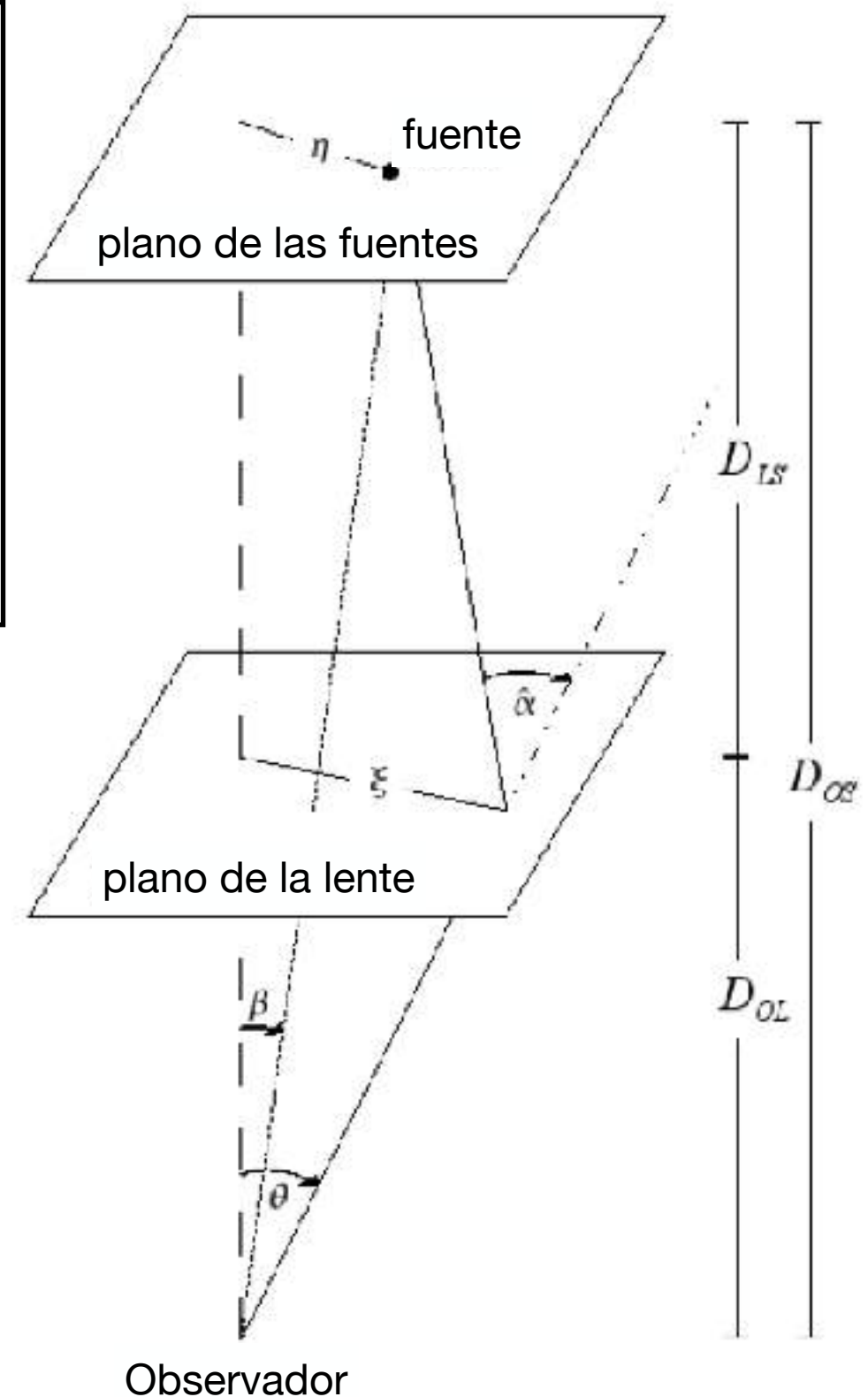
β

θ

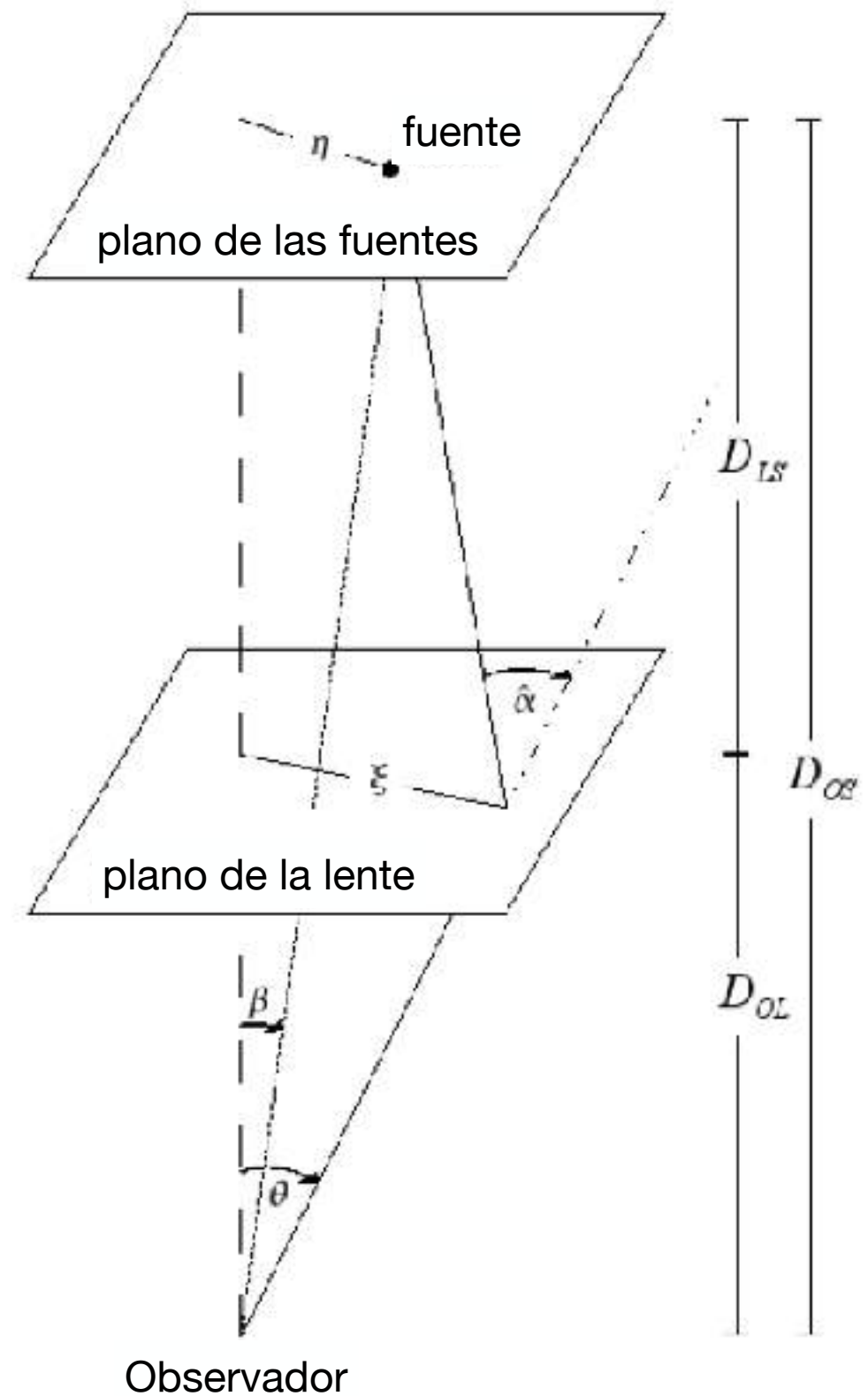
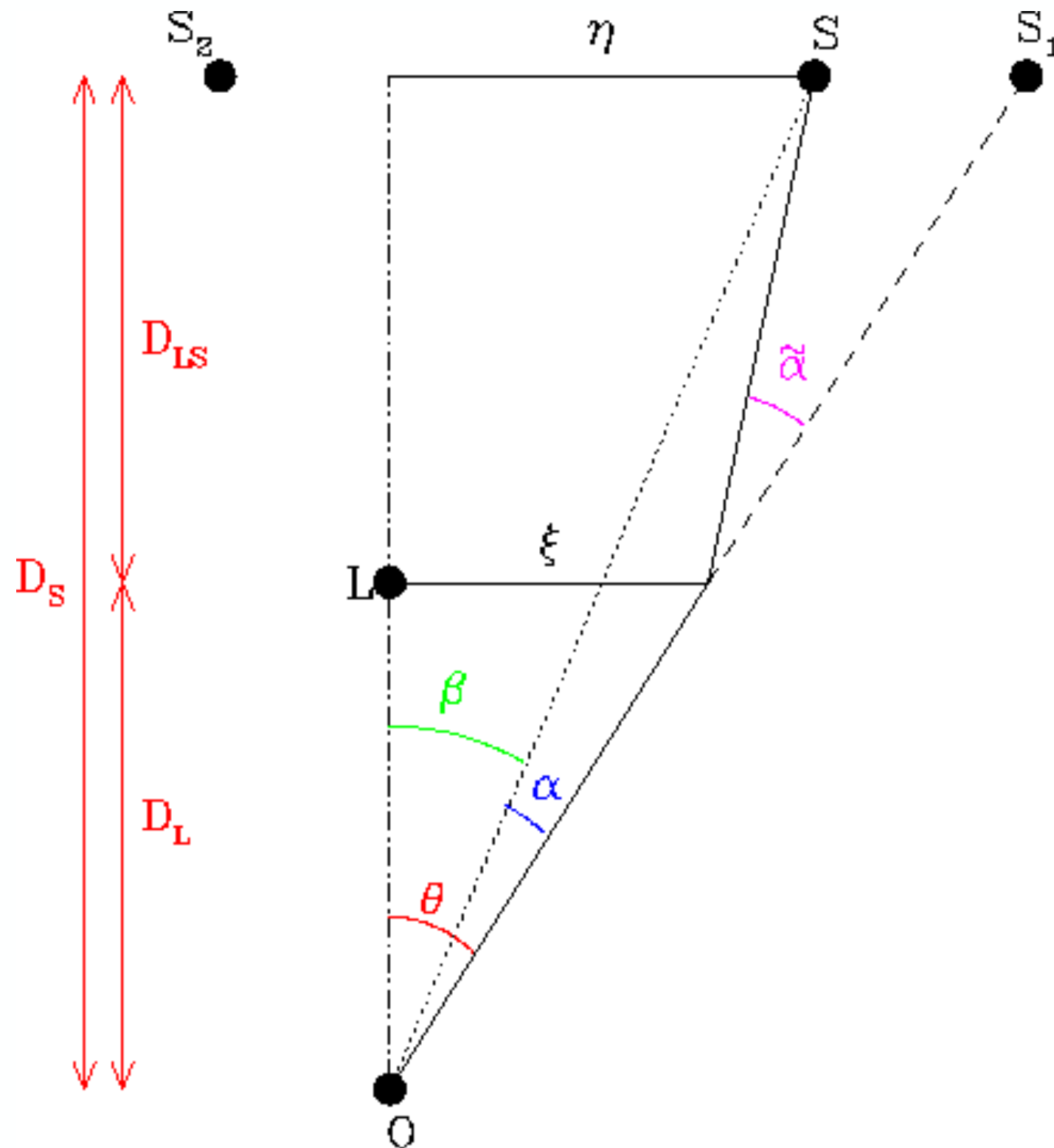
coordenadas
adimensionales

y

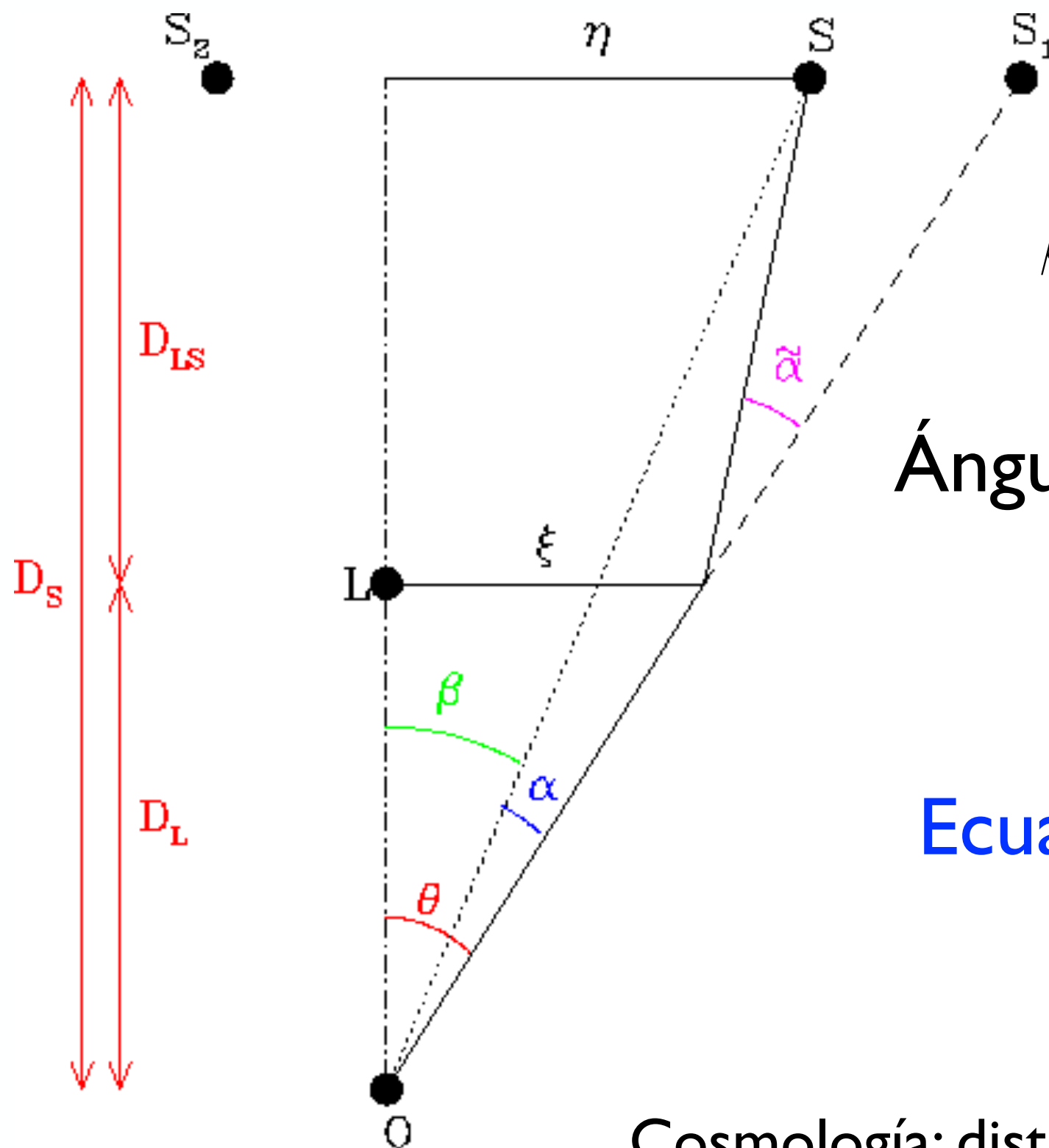
x



Geometría del efecto de lentes por plano único



La ecuación de la lente



$$\vec{\beta} D_{OS} = \vec{\theta} D_{OS} - \hat{\vec{\alpha}} D_{LS} \left(\vec{\theta} \right)$$

Ángulo de deflexión reducido

$$\vec{\alpha} = \hat{\vec{\alpha}} \frac{D_{LS}}{D_{OS}}$$

Ecuación de la lente

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha} \left(\vec{\theta} \right)$$

Cosmología: distancias de diámetro angular

Lente puntual

Lente puntual $\hat{\vec{\alpha}} = \frac{4GM}{c^2 \xi} \hat{\xi} \leftarrow D_{OL} \theta$

Angulo de deflexión reducido $\vec{\alpha} = \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}} \frac{4GM}{c^2 \theta} \hat{\theta}$

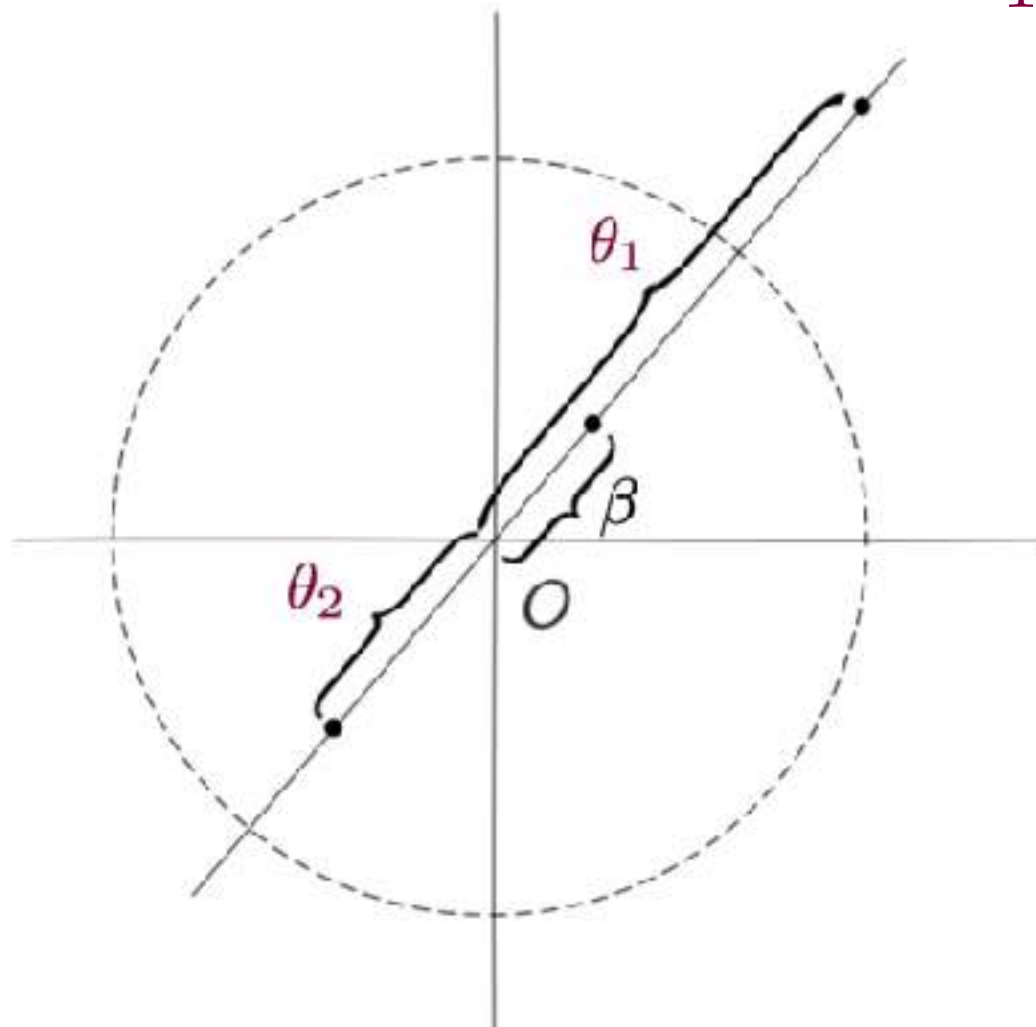
Ecuación de la Lente $\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{\theta_E^2}{\theta} \hat{\theta}$

Ángulo de Einstein $\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}$

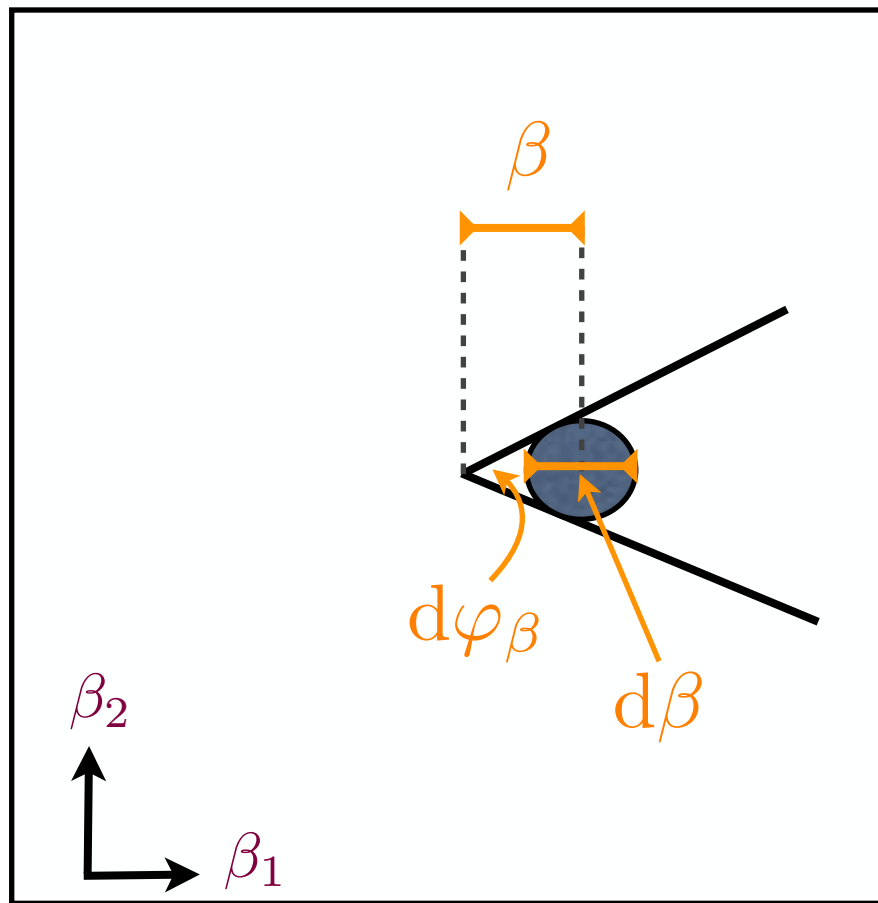
Imágenes y Magnificación

Ecuación de la Lente $\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$

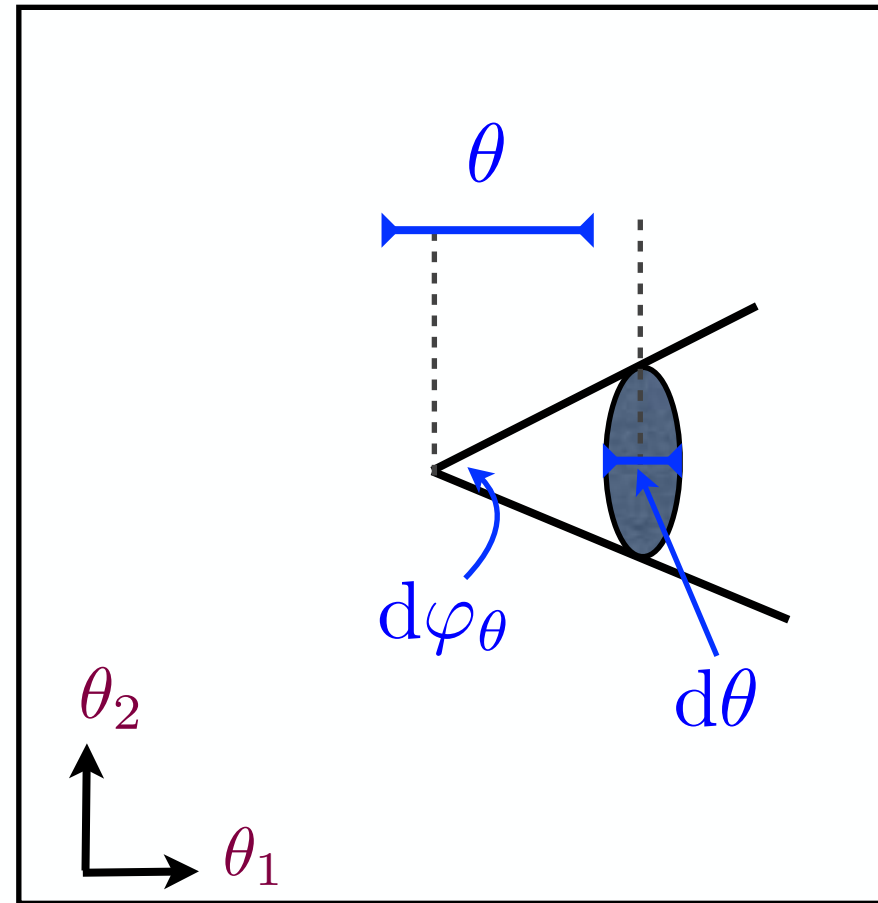
Soluciones $\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$



Magnificación



Plano de las fuentes



plano de la lente/imágenes

Longitud radial

$d\beta$

$d\theta$

Magnificación
radial

$$\frac{d\theta}{d\beta}$$

Longitud tangencial

$\beta d\varphi_\beta$

$\theta d\varphi_\theta$

Magnificación
tangencial

$$\frac{d\varphi_\theta}{d\varphi_\beta} \frac{\theta}{\beta}$$

$= 1$

Imágenes y Magnificación

Ecuación de la Lente $\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$

Soluciones $\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$

Magnificación $\mu = \frac{\theta}{\beta} \frac{d\theta}{d\beta}$

Imágenes y Magnificación

Ecuación de la Lente $\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$

Soluciones $\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$

Magnificación $\mu_{1,2} = \left(1 - \left[\frac{\theta_E}{\theta_{1,2}} \right]^4 \right)^{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{y^2 + 2}{2y\sqrt{y^2 + 4}}$

Distancia en unidades del ángulo de Einstein $y = \beta/\theta_E$

Magnificación total $\mu = |\mu_1| + |\mu_2| = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}}$

Imágenes y Magnificación

Ecuación de la Lente $\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \rightarrow y = x - \frac{1}{x}$

Soluciones $x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right)$

Recordando las variables:

coordenadas físicas
(distancia)

η

ξ

coordenadas
angulares

β

θ

$$\mu = \frac{y^2 + 2}{y \sqrt{y^2 + 4}}$$

coordenadas
adimensionales

$$y = \beta / \theta_E$$

$$x = \theta / \theta_E$$

Solución de la ecuación de la lente

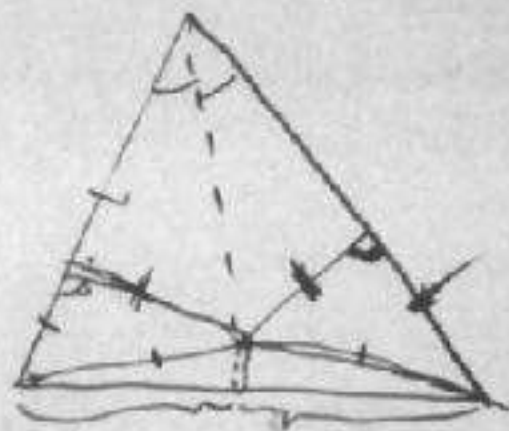
Ecuación de la Lente $\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \rightarrow y = x - \frac{1}{x}$

Soluciones $x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right)$

En forma vectorial

$$\vec{x}_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{y^2 + 4}}{y} \right) \vec{y}$$

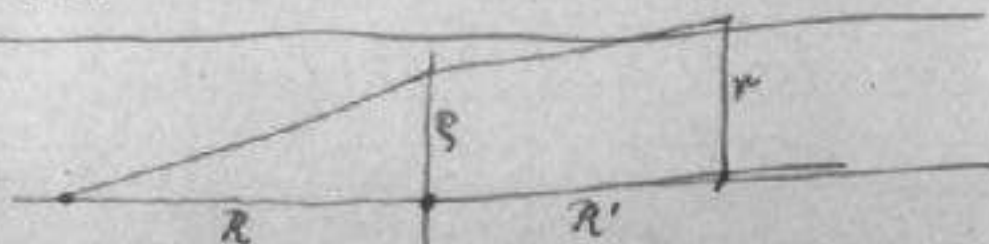
Alle Dreiecke sind gleichschenkelig.



Heckersteinberg

Berlin-Halensee,

Machin Friedrichstr. 33.



$$r = s \frac{R+R'}{R} - \frac{R'\alpha}{s}$$

$$r_0 = s_0 - \frac{1}{s_0} \quad \dots (1)$$

$$s_0^2 = s^2 \frac{R+R'}{R R' \alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{Einsetz. } r &= - \frac{R\alpha}{s} = - \frac{R\alpha}{s_0} \sqrt{\frac{R+R'}{R R' \alpha}} \\ &= - \frac{1}{s_0} \sqrt{\frac{R}{R'} (R+R') \alpha} \end{aligned}$$

≠

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= r \sqrt{\frac{R+R'}{R R' \alpha}} \\ s_0 &= s \sqrt{\frac{R+R'}{R R' \alpha}} \end{aligned} \right\} (2)$$

1) geht zwei Wurzeln für s_0 .

Von hier an Index α weglassen.

$$2 + r^2 = s^2 + \frac{1}{s^2}$$

$$f = \varphi + \frac{\pi^2}{\varphi}$$

$$df = \left(1 - \frac{\pi^2}{\varphi^2}\right) d\varphi = \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) d\varphi$$

$$R df = \pm H d\varphi$$

$$R = \pm \frac{H}{1 - \frac{1}{s^2}}$$

$$R_{tot} = H \left\{ \frac{1}{1 - \frac{1}{s_1^2}} + \frac{1}{\frac{1}{s_2^2} - 1} \right\} \dots (3)$$

Klammer gibt relative Stellung.

$$r = \frac{1}{x} - x$$

$$\left\{ \right\} = \frac{1}{1 - x_1^2} + \frac{1}{x_2^2 - 1}$$

DISCUSSION

LENS-LIKE ACTION OF A STAR BY THE
DEVIATION OF LIGHT IN THE
GRAVITATIONAL FIELD

SOME time ago, R. W. Mandl paid me a visit and asked me to publish the results of a little calculation, which I had made at his request. This note complies with his wish.

The light coming from a star A traverses the gravitational field of another star B , whose radius is R_0 . Let there be an observer at a distance D from B and at a distance x , small compared with D , from the extended central line $\overline{AB}$. According to the general theory of relativity, let α_0 be the deviation of the light ray passing the star B at a distance R_0 from its center.

For the sake of simplicity, let us assume that $\overline{AB}$ is large, compared with the distance D of the observer from the deviating star B . We also neglect the eclipse (geometrical obscuration) by the star B , which indeed is negligible in all practically important cases. To permit this, D has to be very large compared to the radius R_0 of the deviating star.

It follows from the law of deviation that an observer situated exactly on the extension of the central line $\overline{AB}$ will perceive, instead of a point-like star A , a luminous circle of the angular radius β around the center of B , where

$$\beta = \sqrt{\alpha_0 \frac{R_0}{D}}.$$

It should be noted that this angular diameter β does

not decrease like $1/D$, but like $1/\sqrt{D}$, as the distance D increases.

Of course, there is no hope of observing this phenomenon directly. First, we shall scarcely ever approach closely enough to such a central line. Second, the angle β will defy the resolving power of our instruments. For, α_0 being of the order of magnitude of one second of arc, the angle R_0/D , under which the deviating star B is seen, is much smaller. Therefore, the light coming from the luminous circle can not be distinguished by an observer as geometrically different from that coming from the star B , but simply will manifest itself as increased apparent brightness of B .

The same will happen, if the observer is situated at a small distance x from the extended central line $\overline{AB}$. But then the observer will see A as two point-like light-sources, which are deviated from the true geometrical position of A by the angle β , approximately.

The apparent brightness of A will be increased by the lens-like action of the gravitational field of B in the ratio q . This q will be considerably larger than unity only if x is so small that the observed positions of A and B coincide, within the resolving power of our instruments. Simple geometric considerations lead to the expression

$$q = \frac{l}{x} \cdot \frac{1 + \frac{x^2}{2l^2}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4l^2}}},$$

where

$$l = \sqrt{\alpha_0 D R_0}.$$

BRIEF HISTORY

- Einstein 1911-12: Einstein's predictions and the first intent of observation
- Sobral 1919: light deflection by gravity
- Chwolson 1924: first paper on gravitational lensing
- Einstein 1936: lensing by stars

“Of course, there is not much hope of observing this phenomenon directly”

Therefore, there is no great chance of observing this phenomenon, even if dazzling by the light of the much nearer star B is disregarded. This apparent amplification of q by the lens-like action of the star B is a most curious effect, not so much for its becoming infinite, with x vanishing, but since with increasing distance D of the observer not only does it not decrease, but even increases proportionally to $\sqrt{D}$.

ALBERT EINSTEIN

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,
PRINCETON, N. J.

Curva de luz de microlente

Trayectoria relativa lente-fuente:

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{\beta}(t)}{\theta_E}$$

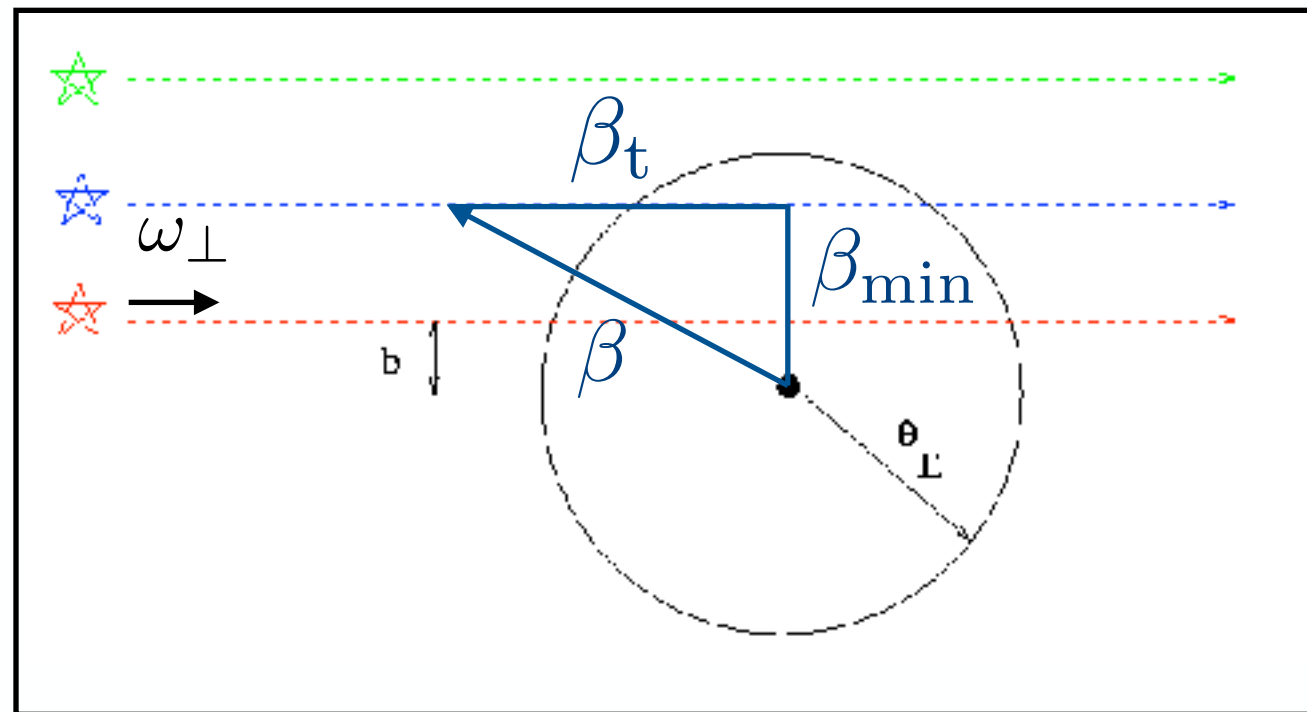
Magnificación de lente puntual:

$$\mu = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}$$

Radio (angular) de Einstein:

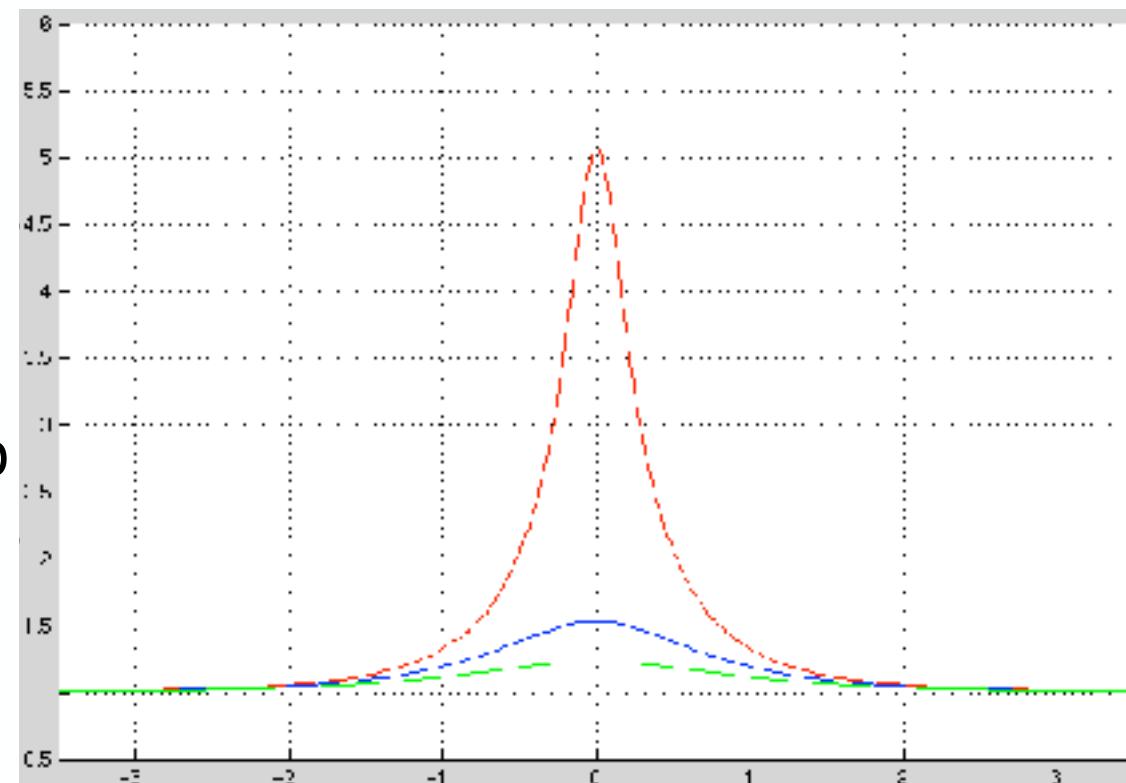
$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}$$

$\omega_{\perp}$: velocidad angular entre lente y fuente (relativa al observador)



Plano de las fuentes

magnificación



Tiempo en unidades del tiempo de Einstein

Movimiento rectilíneo uniforme:

$$\beta_t = \omega_{\perp} t = \frac{v_{\perp}}{D_{OL}} t$$

$$u(t) = \sqrt{u_{\min}^2 + \left(\frac{v_{\perp} t}{\theta_E D_{OL}} \right)^2} = \sqrt{u_{\min}^2 + \left(\frac{t}{t_E} \right)^2}$$

$$t_E = \frac{\theta_E D_{OL}}{v_{\perp}}$$

Para un tiempo con origen arbitraria $t \rightarrow (t - t_0)$

Curva de luz de microlente

- Astrónomos (ópticos) usan magnitudes

$$m = m_{\text{ref}} - 2.5 \log_{10} \frac{f}{f_{\text{ref}}}$$

- Mostrar que la variación de magnitud de una fuente magnificada es dada por

$$\Delta m = -2.5 \log_{10}(\mu)$$

- Hacer gráficas de la curva de luz, $\Delta m \times \frac{t - t_0}{t_E}$
- ¿Qué se puede medir a partir de la curva de luz de un evento de lente y fuente puntuales?

Curva de luz de microlente

- Astrónomos (ópticos) usan magnitudes

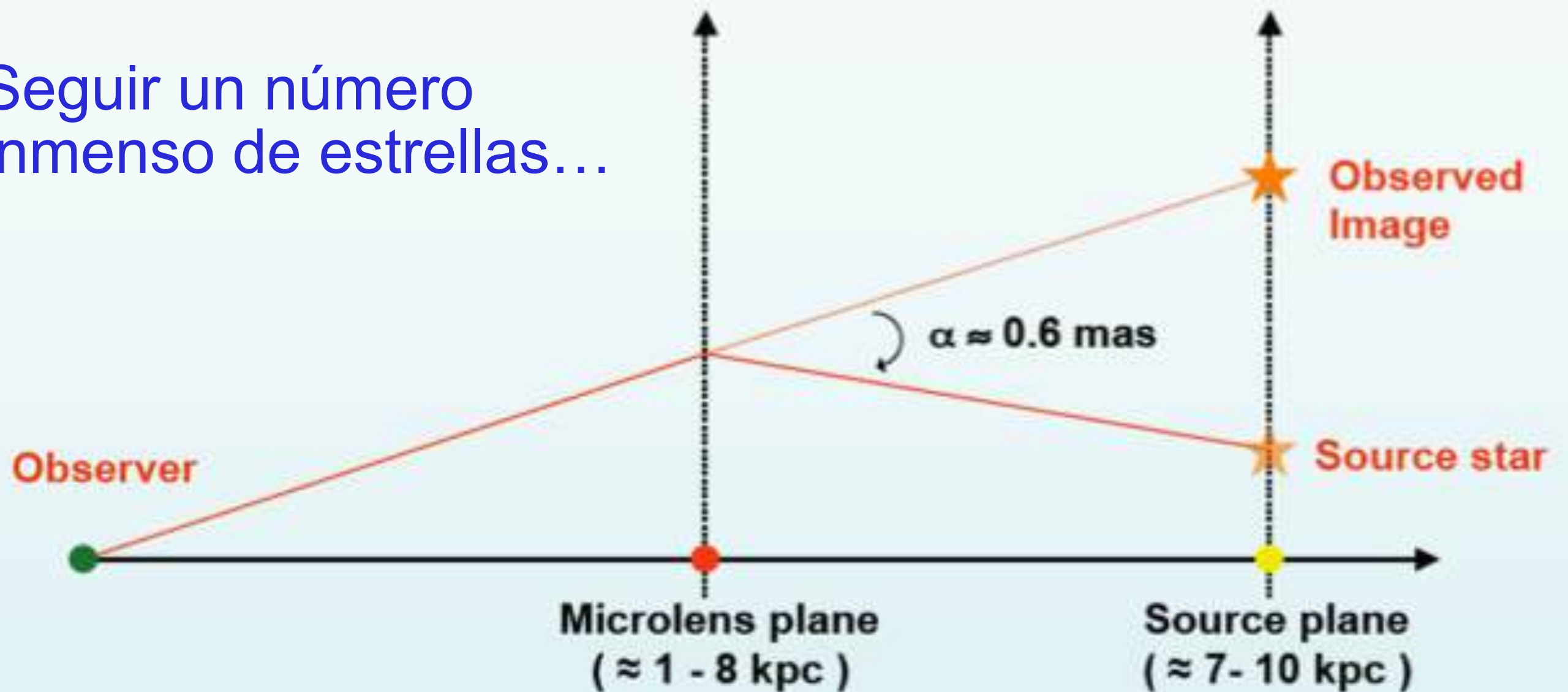
$$m = m_{\text{ref}} - 2.5 \log_{10} \frac{f}{f_{\text{ref}}}$$

- Observación: en una curva de luz real, además de considerar los errores de medida y demás, es importante tomar en cuenta que el flujo de la fuente f_s suele estar contaminado por el flujo de la lente o estrellas próximas, lo que hace un *background*, constante f_b de forma que:

$$f(t) = f_s \mu(t) + f_b$$

Microlentes en la Galaxia

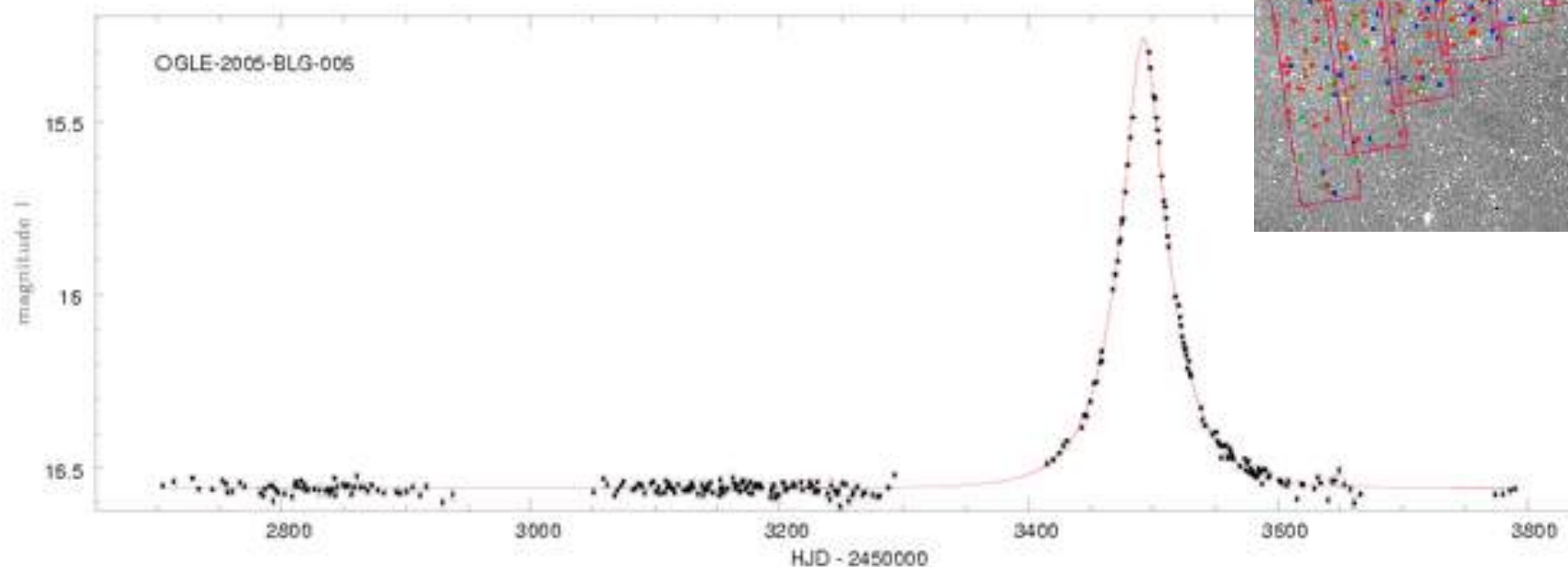
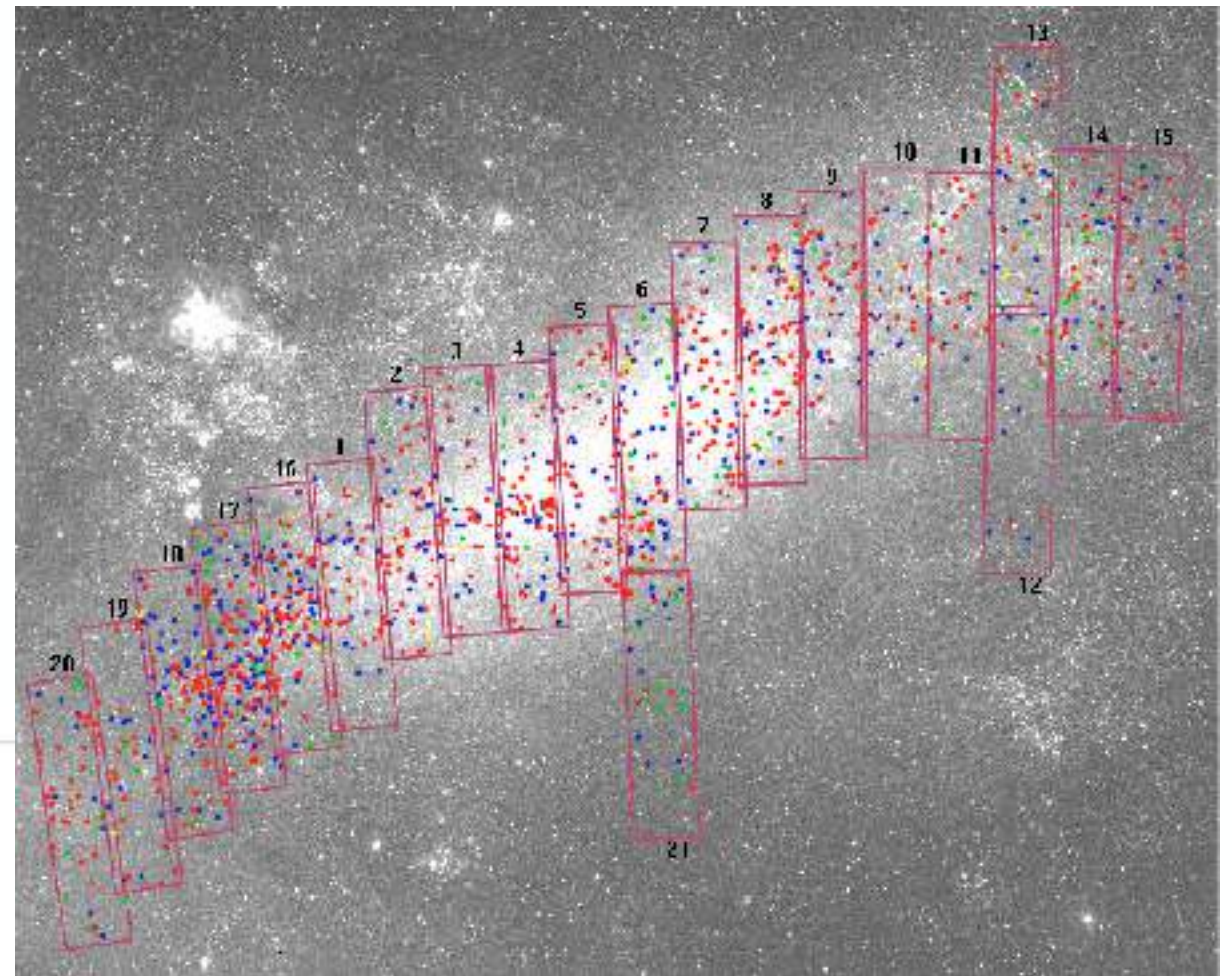
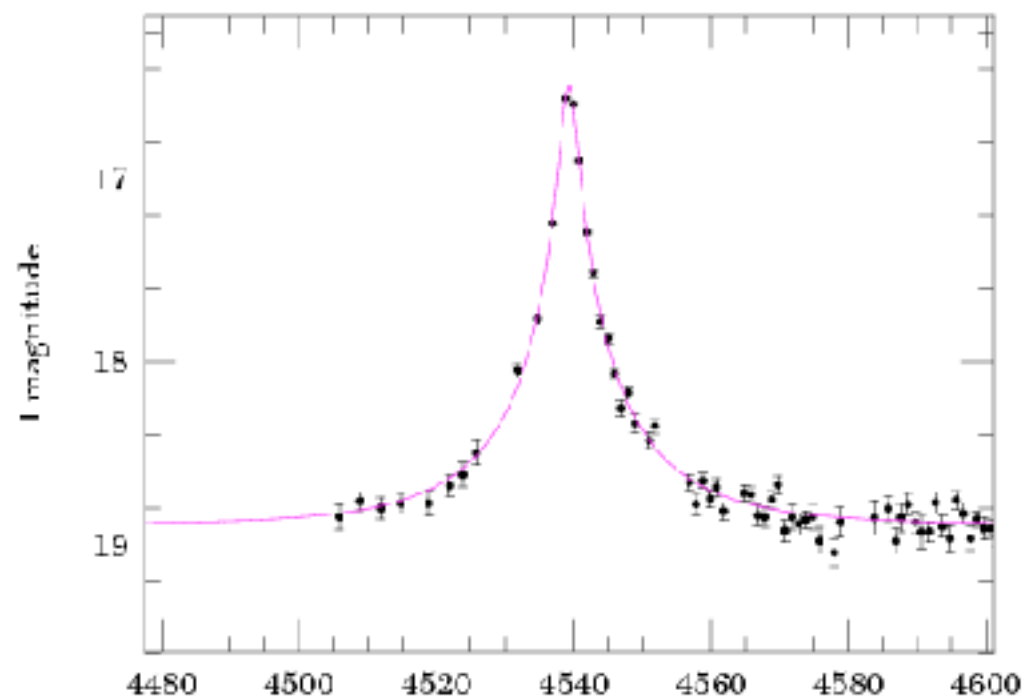
Seguir un número inmenso de estrellas...



Einstein estaba equivocado: observaciones de *microlensing*

Proyectos MACHO, EROS, OGLE...

OGLE-2008-BLG-060



$$t_E \equiv D_d \theta_E / v_{\perp}$$

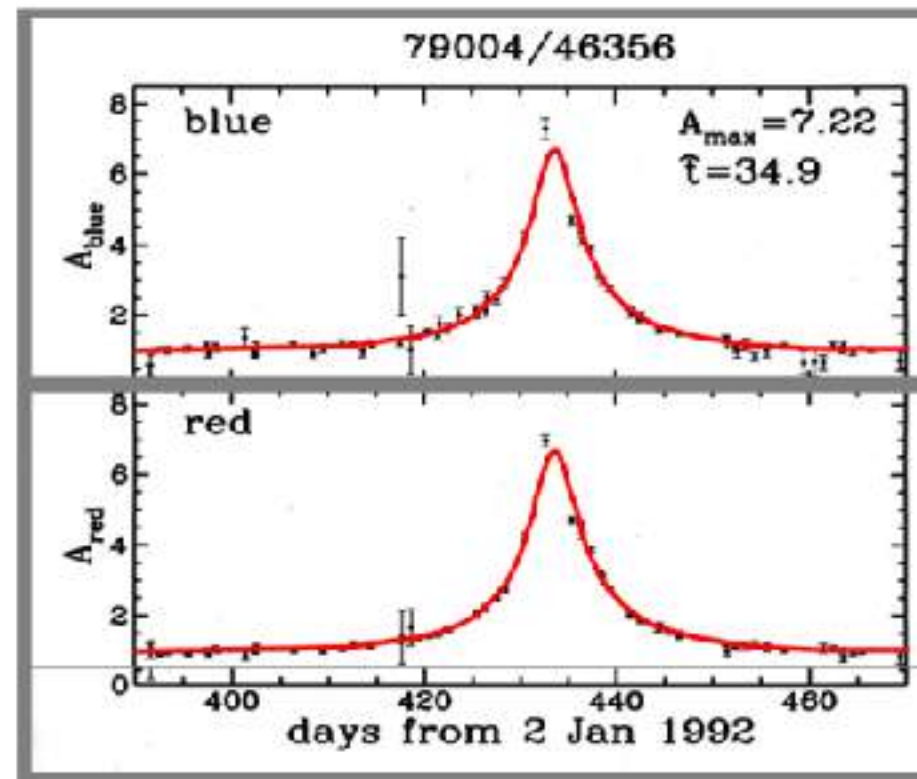
degeneraciones

Primer detección de microlensing

ROMAN 1993: First Microlensing Events

Alcock started the MACHO Project, including me, and the competing French EROS project was started based on a talk given by Alcock. In MACHO, we thought that OGLE was also started in response to discussions between Alcock and Paczyński.

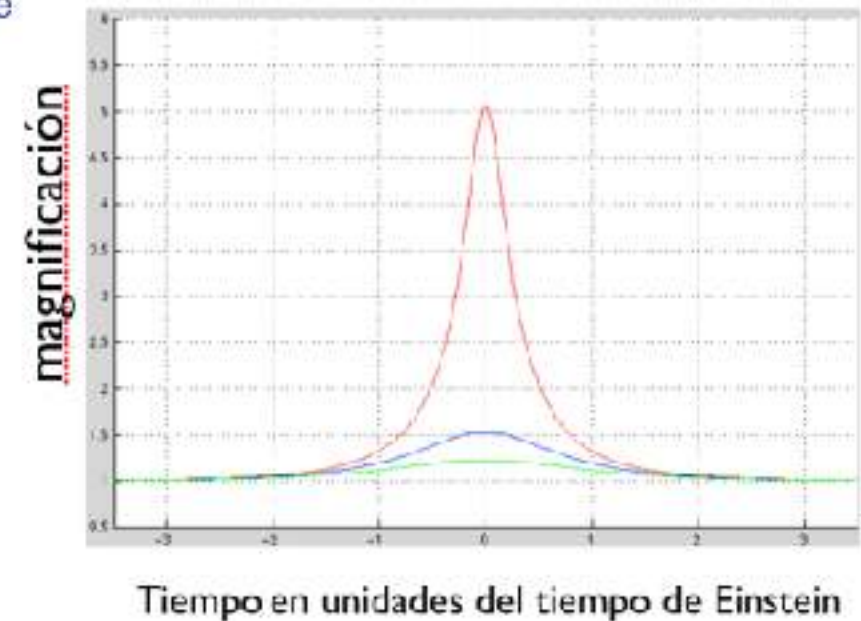
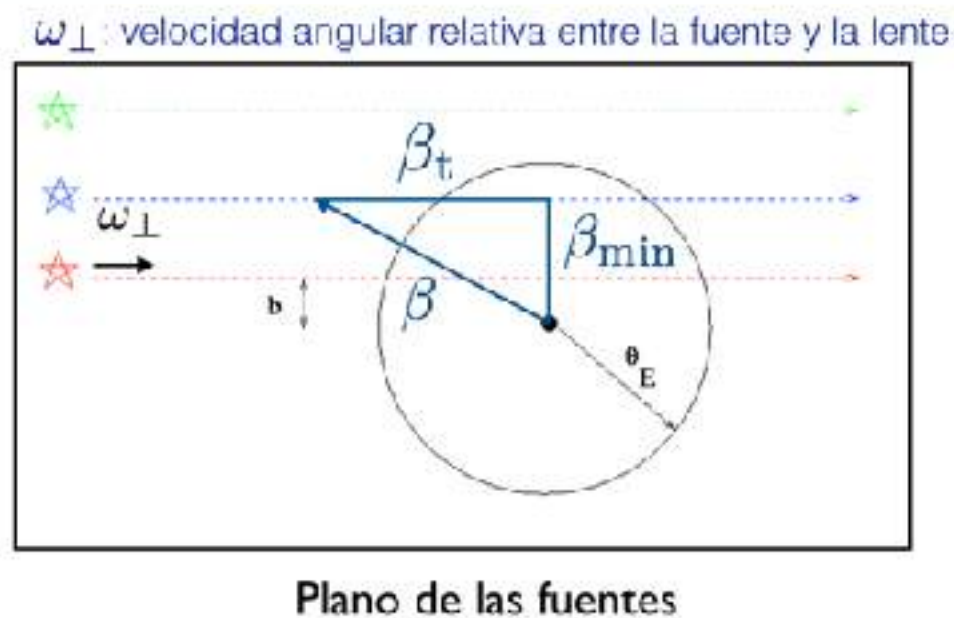
- MACHO: LMC-1 event
 - Nature paper (and cover)
- OGLE: 1st bulge event
 - Acta Astronomica paper
- EROS: 2 microlensing “candidates”
 - (both later retracted)
- Discoveries came in the face of wide-spread skepticism of microlensing



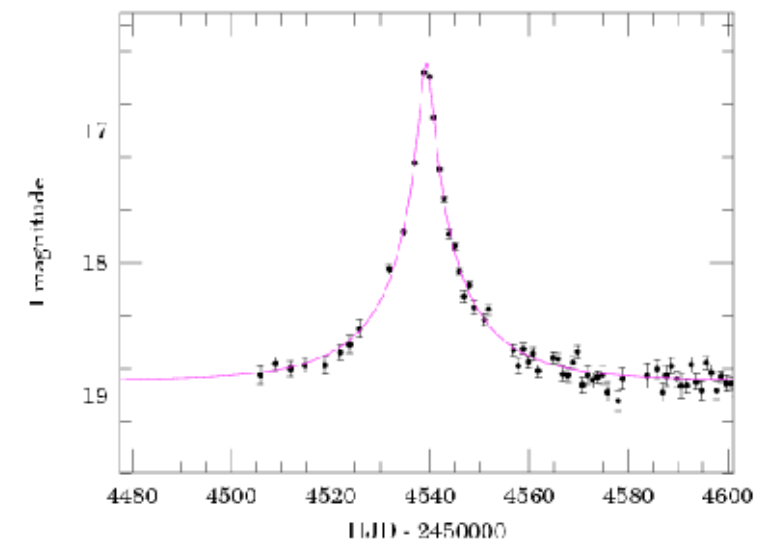
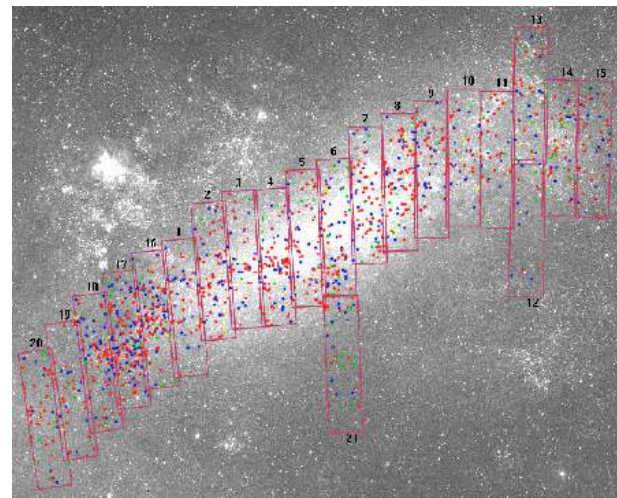
Qué es el *microlensing* (galáctico)?

$$\mu = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}} \quad u = \beta/\theta_E \quad \text{Angulo de Einstein} \quad \theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}$$

- Magnificación de la luz de una estrella distante causada por el efecto fuerte de lente gravitacional de una masa más próxima



- Por el movimiento relativo, se observa la variación de la magnitud de la estrella en función del tiempo
- Requiere monitorear un gran número de estrellas (Einstein pensó que era imposible medir ese efecto)



También microlensing de cuásares por estrellas en galáxias lentes

*Micro*lensing astronómico

Ecuación de la Lente

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

Soluciones

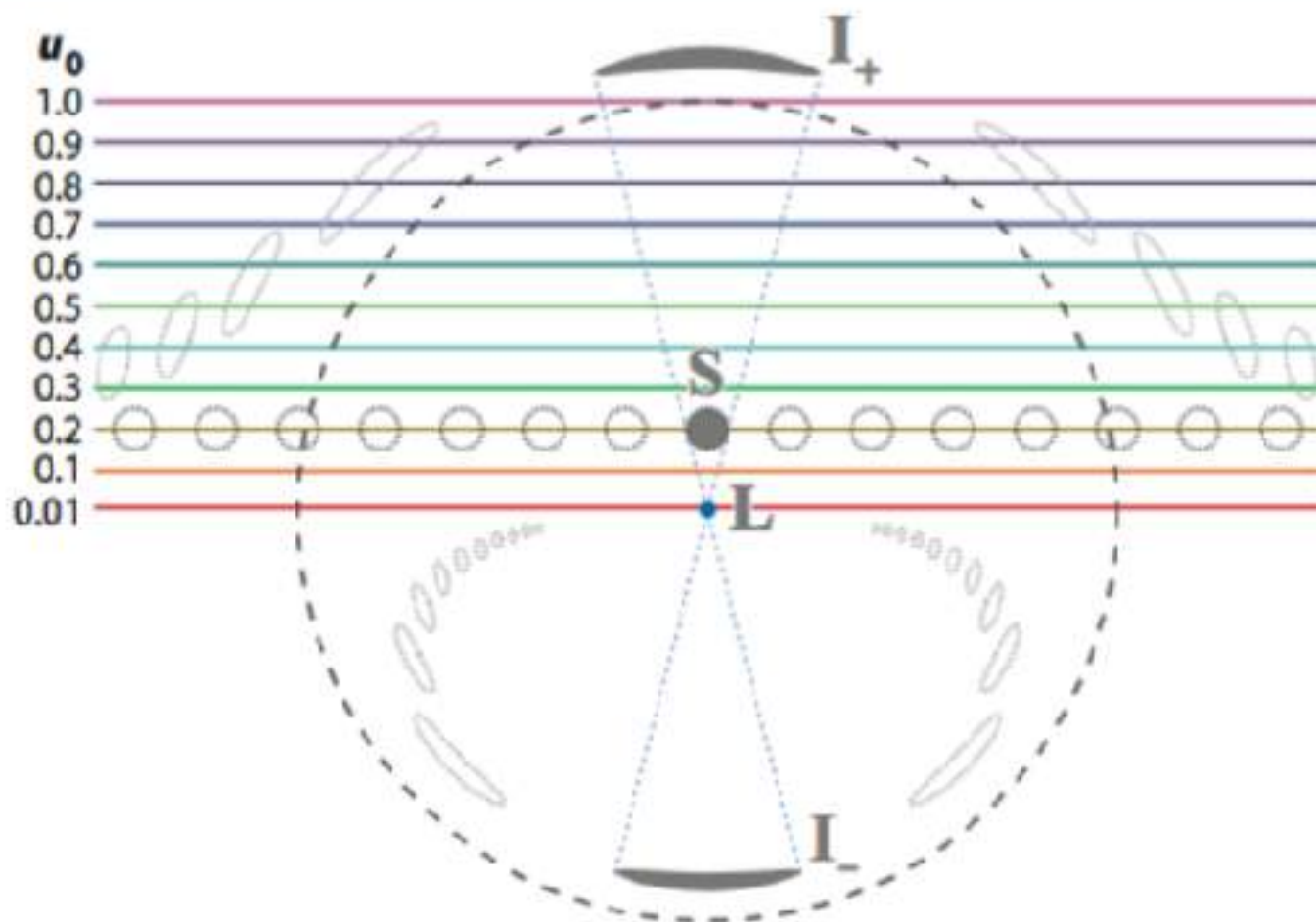
$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$

No se resuelven
 (separan) las imágenes,
 pero se podría ver la
 variación de la posición
 del **centroide**!

$$\delta \vec{\theta} = \frac{\vec{u}}{u^2 + 2} \theta_E$$

$$\delta \theta_{\max} = \frac{\theta_E}{2\sqrt{2}} = 0.35 \theta_E$$

$$\theta_E \approx 1 \text{ mas} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{10 \text{ kpc}} \right)^{-1/2}$$

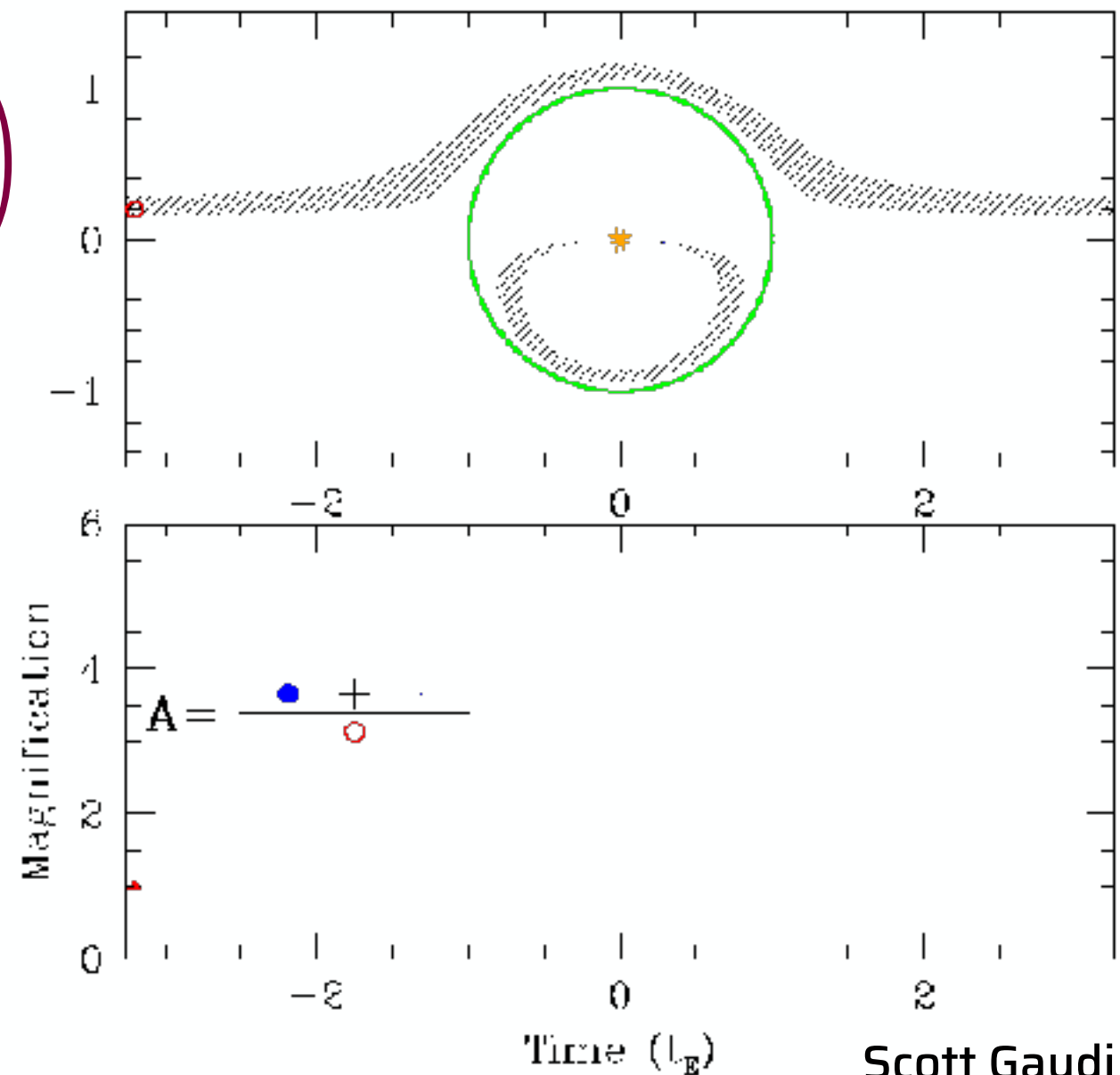
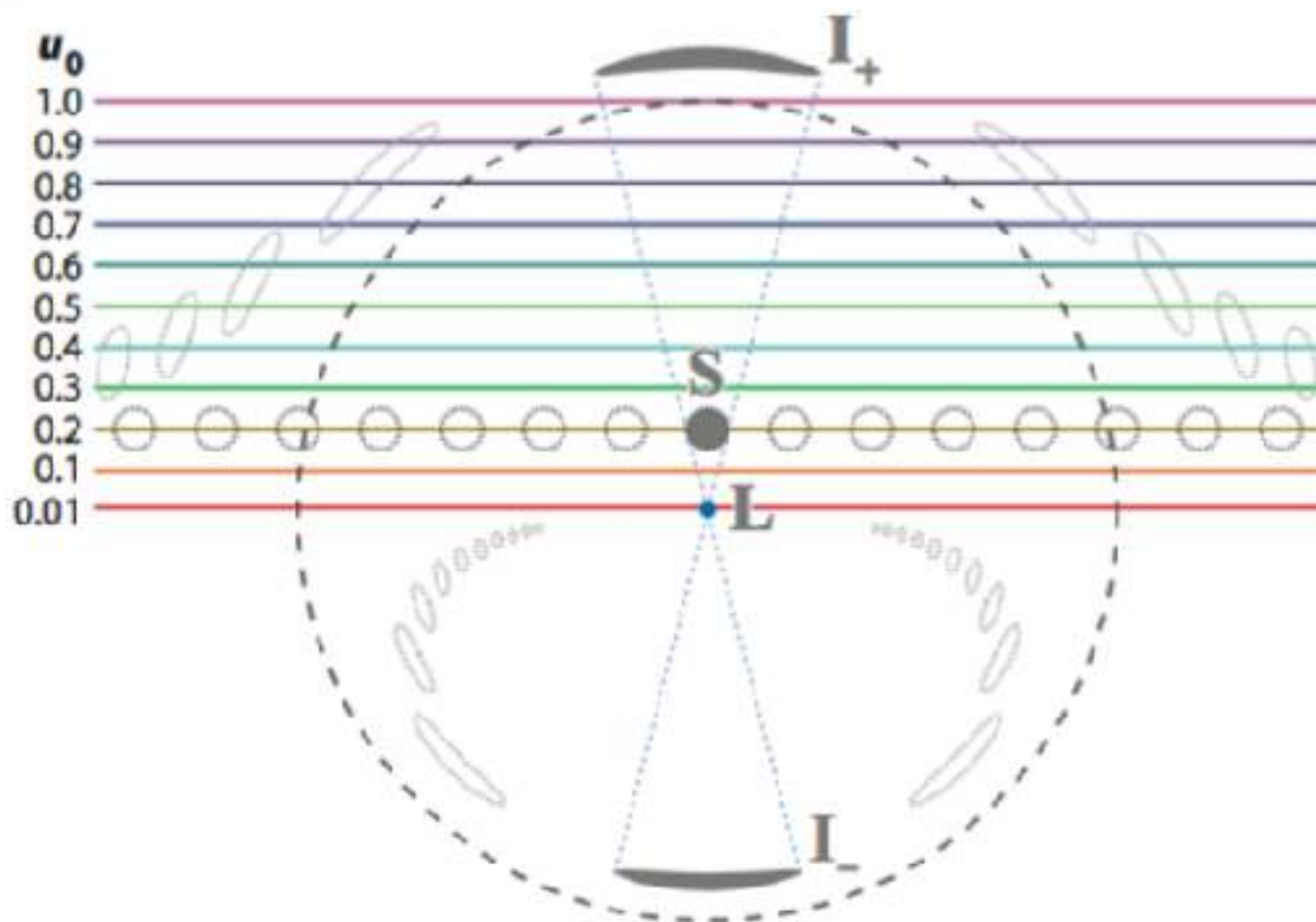


Microlensing astronómico

Ecuación de la Lente $\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$

Soluciones

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$



*Micro*lensing astronómico

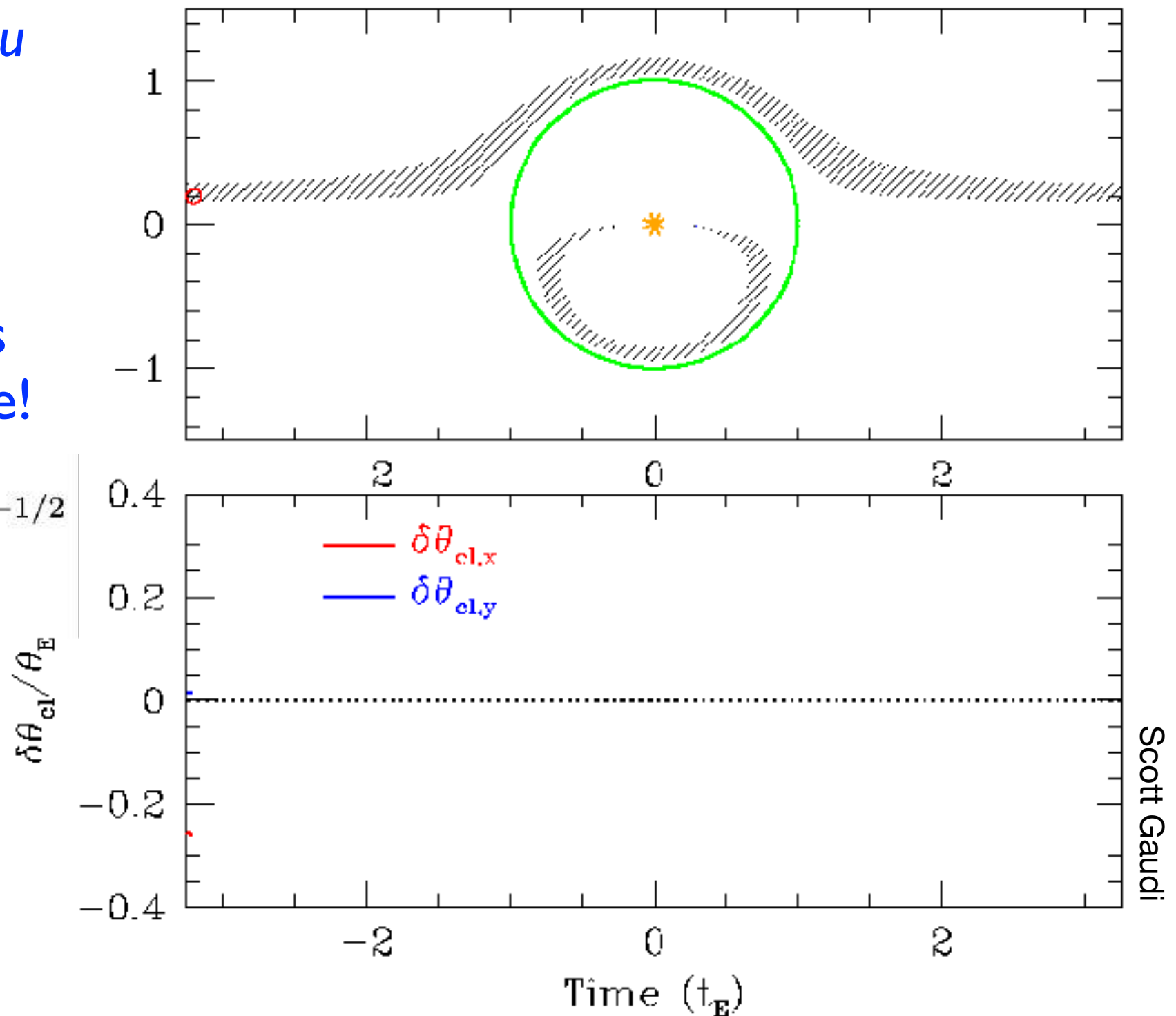
Dependencia distinta en u

$$\vec{\delta\theta} = \frac{\vec{u}}{u^2 + 2} \theta_E$$

Identificable para mayores valores de u : más probable!

$$\theta_E \approx 1 \text{ mas} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{10 \text{ kpc}} \right)^{-1/2}$$

Medido recientemente con Gaia y HST!



*Micro*lensing astronómico

Dependencia distinta en u

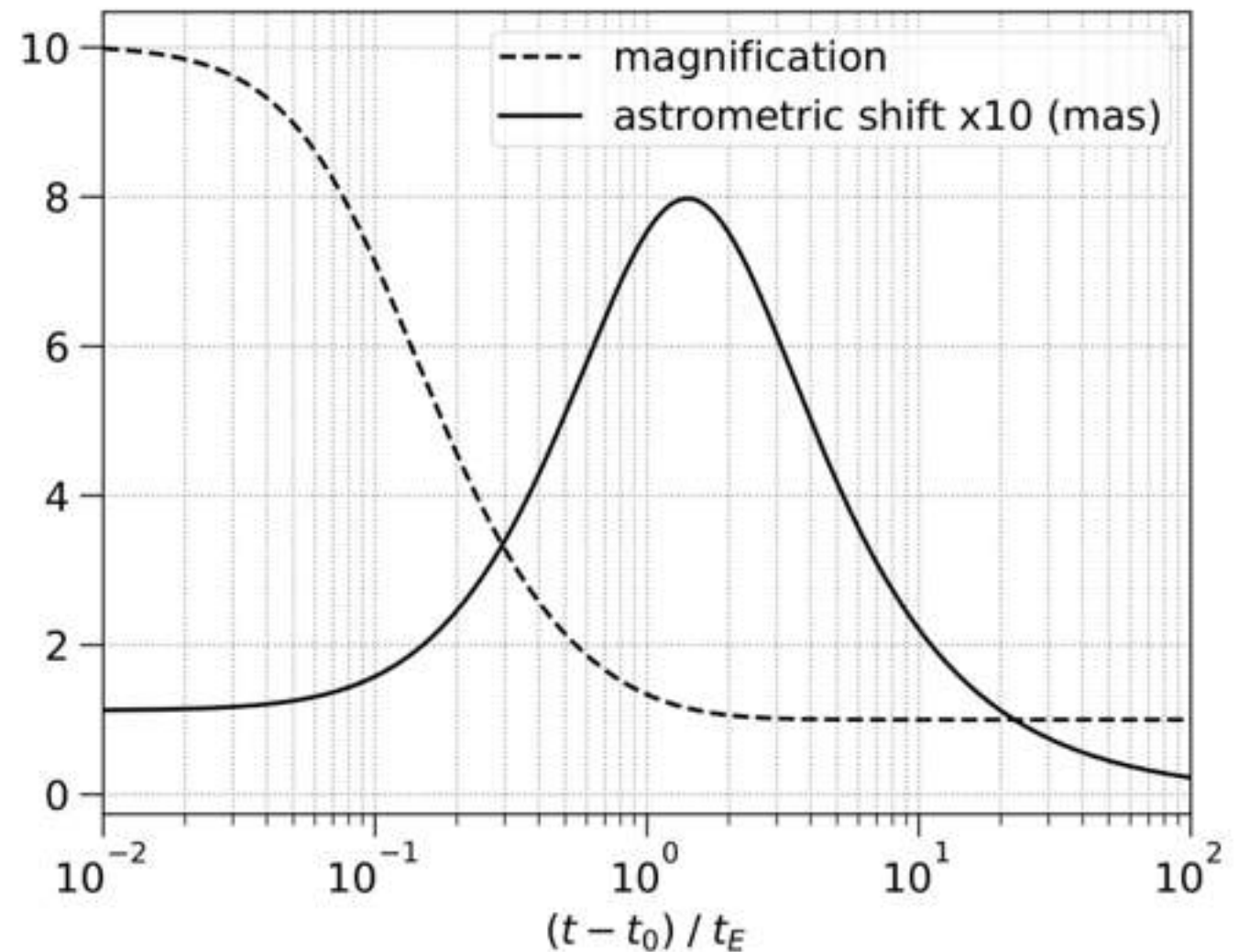
$$\delta\vec{\theta} = \frac{\vec{u}}{u^2 + 2} \theta_E$$

Identificable para mayores valores de u : más probable!

$$\theta_E \approx 1 \text{ mas} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{10 \text{ kpc}} \right)^{-1/2}$$

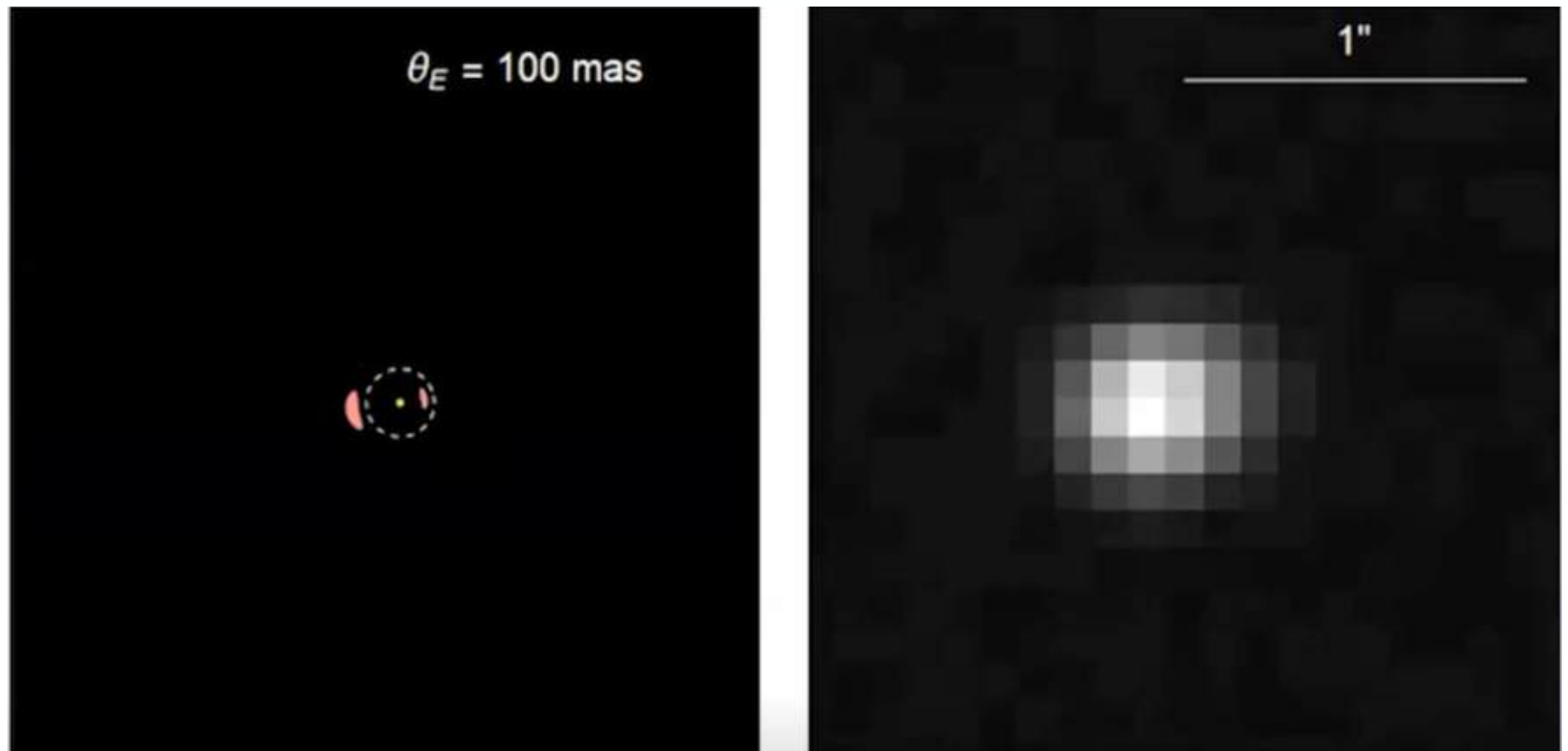
Medido recientemente con Gaia y HST!

$$u(t) = \sqrt{u_{\min}^2 + \left(\frac{t}{t_E} \right)^2}$$



$$\mu = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}$$

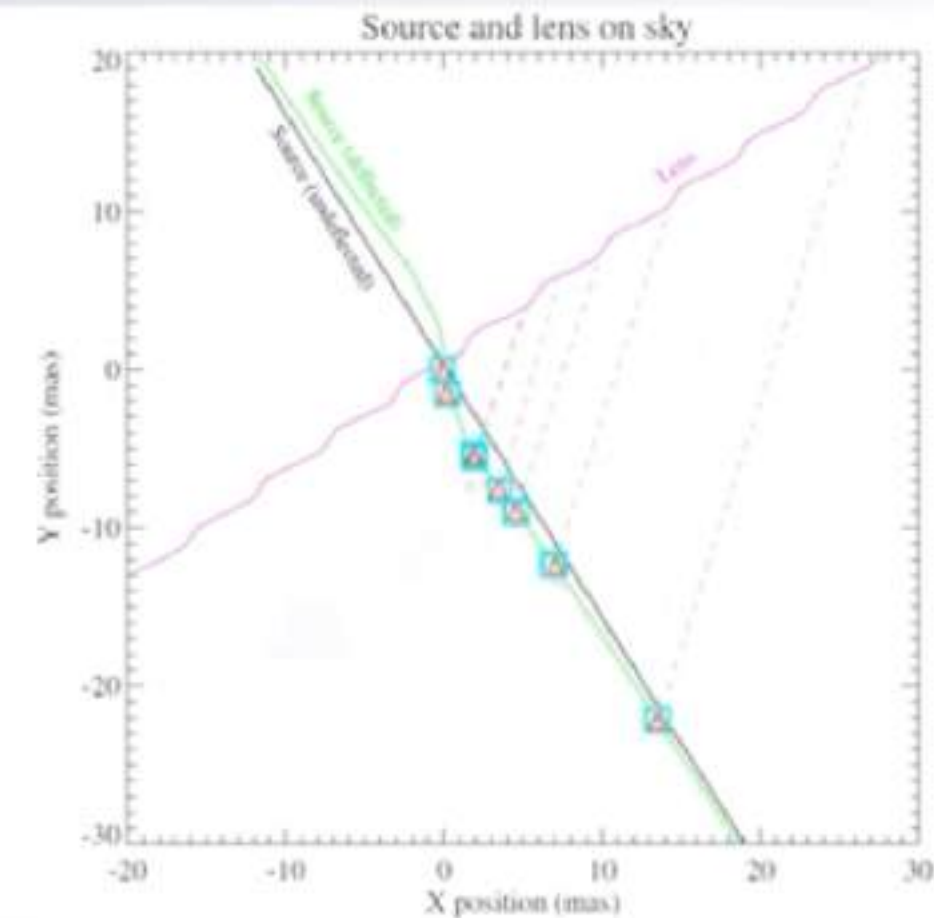
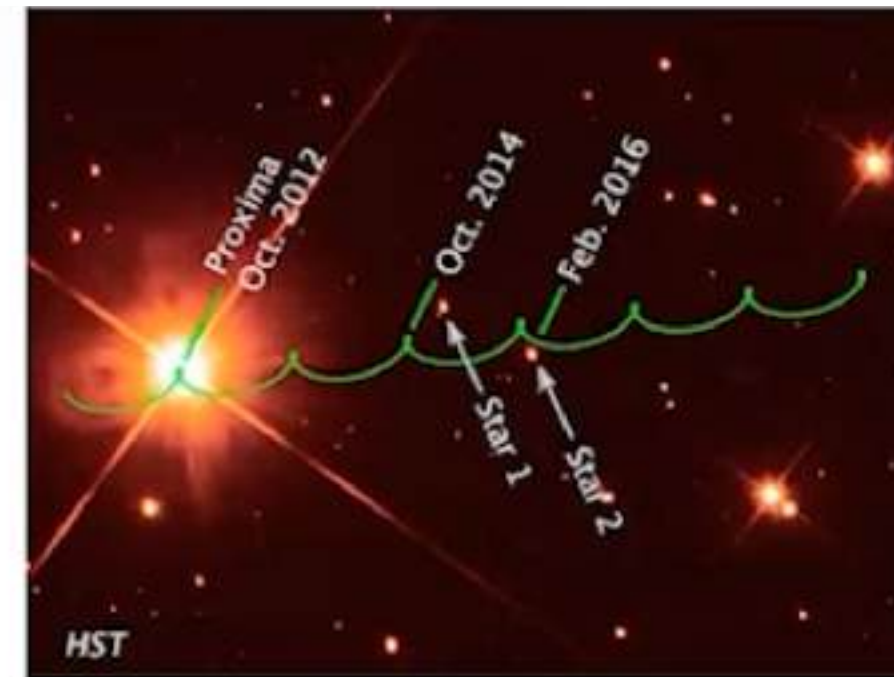
Microensing astronómico



Ejemplo de sistema típico ($\times 100!$) y la PSF del telescopio
(en este caso, Roman!)
Milagro de la estadística: se puede medir!

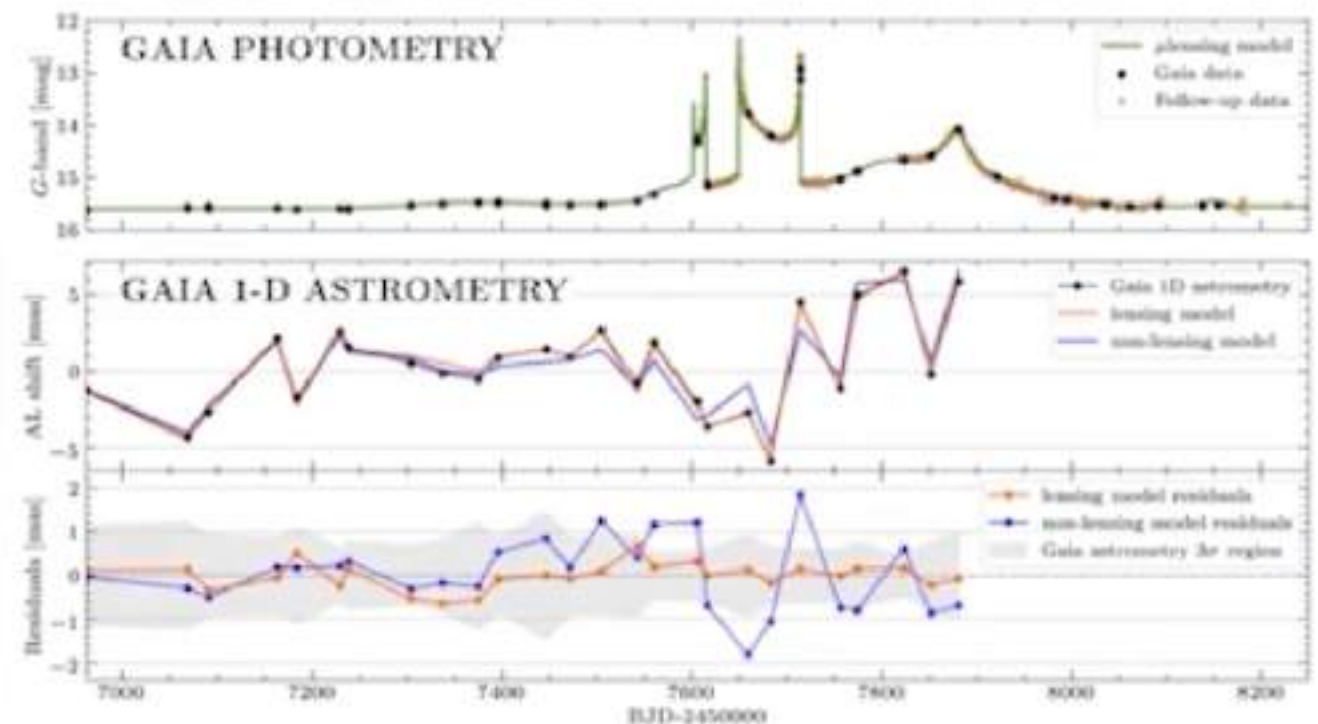
Detecciones de *microlensing* astrometrico

- White dwarfs by *HST*
(Sahu et al. 2017, McGill et al. 2022)
- Proxima Centauri by VLT (Zurlo et al. 2018)



- MOA-2011-BLG-191/OGLE-2011-BLG-0462:
an isolated BH of $7 M_{\odot}$ by *HST*
Sahu et al. (2022), Lam et al. (2022)

- Binary system in Gaia transient
Gaia16aye (Rybicki 2022)



The dawn of astrometric microlensing From cold exoplanets to black-holes

25th International Microlensing Conference

New dates of the conference August 31, September 1 and 2

<https://www.cold-worlds.com/nouvelles-scientifiques/workshops-2022/>

<https://clementranc.github.io/microlensing25/schedule/Schedule.htm>

Astrometric microlensing
Interferometric microlensing
Detection of free-floating planets, exoplanets, brown dwarfs,
stars and binaries, compact objects, including white dwarfs and black holes
Cold planet demographics (observational constraints and theory)
Stellar populations and their properties in the Milky Way (and other galaxies)
Search for electromagnetic signatures of gravitational-wave sources through microlensing
Synergies between ground-based facilities and/or space missions
(Gaia, Roman, Euclid, PRIME, Rubin, ELTs)
Data mining, numerical tools and techniques

Scientific Organizing Committee

Clement Ranc, co-chair (IAP, Sorbonne University)
Jessica Lu, co-chair (UC Berkeley)
David Bennett (NASA Goddard)
Aparna Bhattacharya (NASA Goddard)
Sun-Ju Chung (Korea Astronomy and Space Science Institute)
Somayeh Khakpash (University of Delaware)
Przemek Mróz (Caltech)
Matthew Penny (Louisiana State University)
Takahiro Sumi (University of Osaka)
Andrzej Udalski (University of Warsaw)
Joachim Wambsganss (AIf/ZAH, University of Heidelberg)

Local Organizing Committee

Jean-Philippe Beaulieu (IAP)



**COLD
WORLDS**

MAS ALLÁ DE LA CURVA DE PACZYNSKI

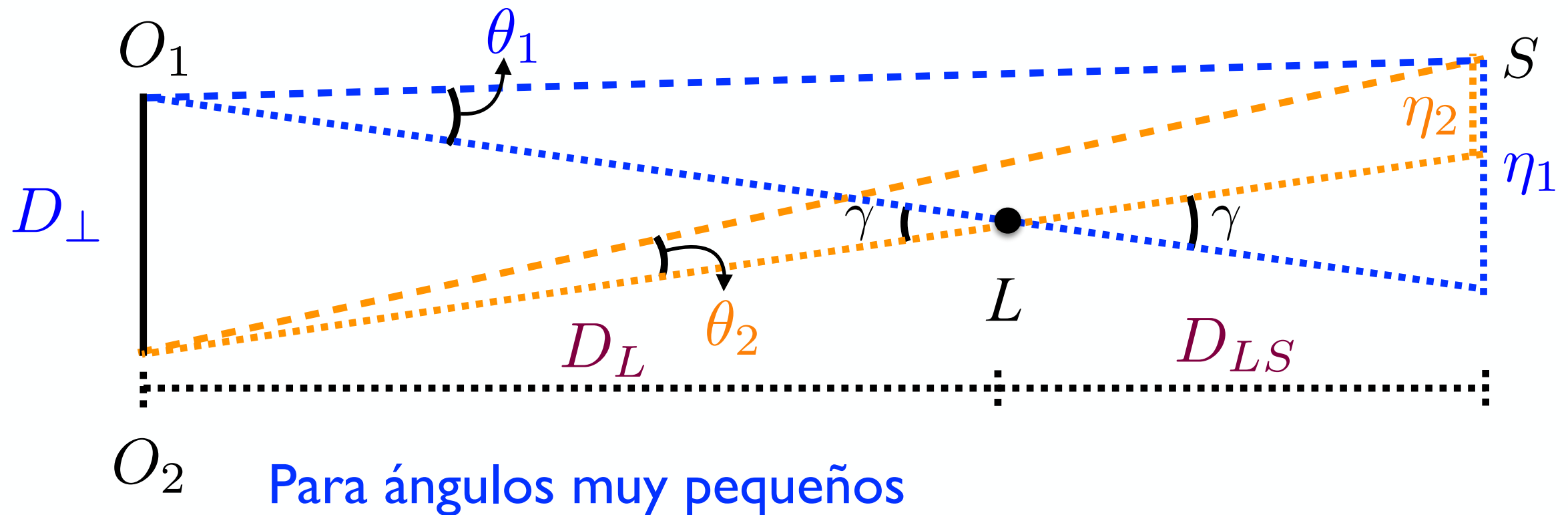
Paralaje

Fuentes finitas y limb darkening

Agujeros Negros y planetas libres

Paralaje (geometría)

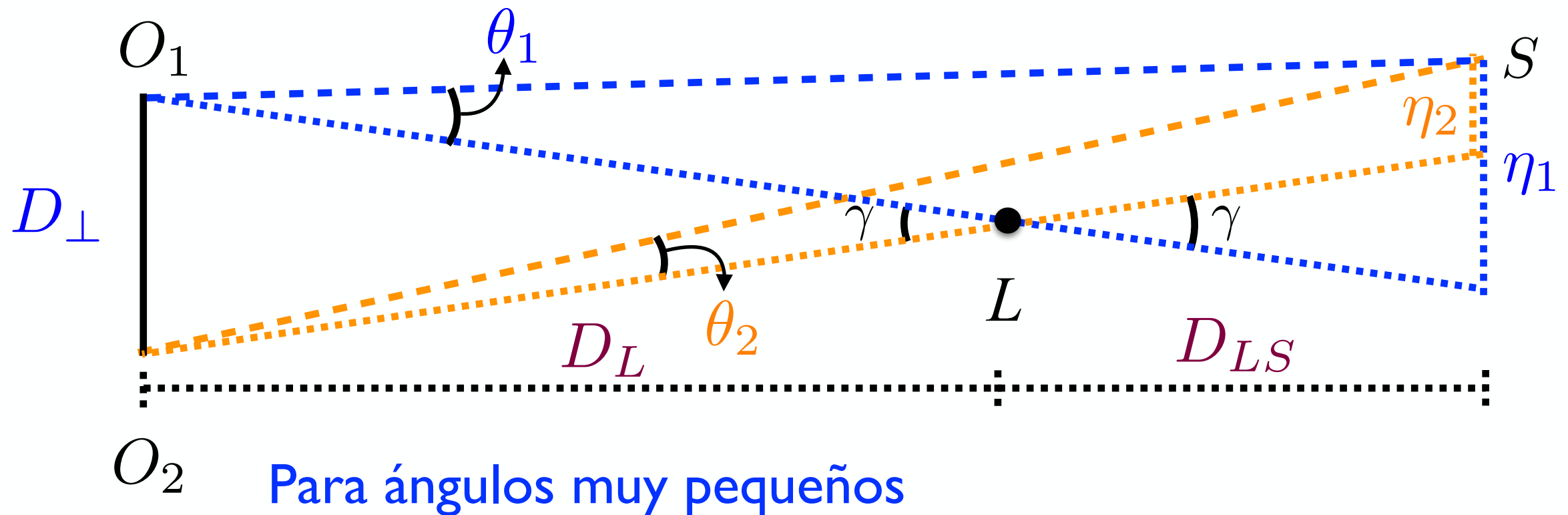
- Variación de la posición angular de una fuente S relativa a un objeto L por el desplazamiento de un observador O :



$$\begin{aligned}
 |\theta_1 - \theta_2| &= \frac{|\eta_1 - \eta_2|}{D_S} = \frac{\gamma D_{LS}}{D_S} = \frac{(D_{\perp}/D_L) D_{LS}}{D_S} \\
 &= D_{\perp} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}
 \end{aligned}$$

Paralaje (geometría)

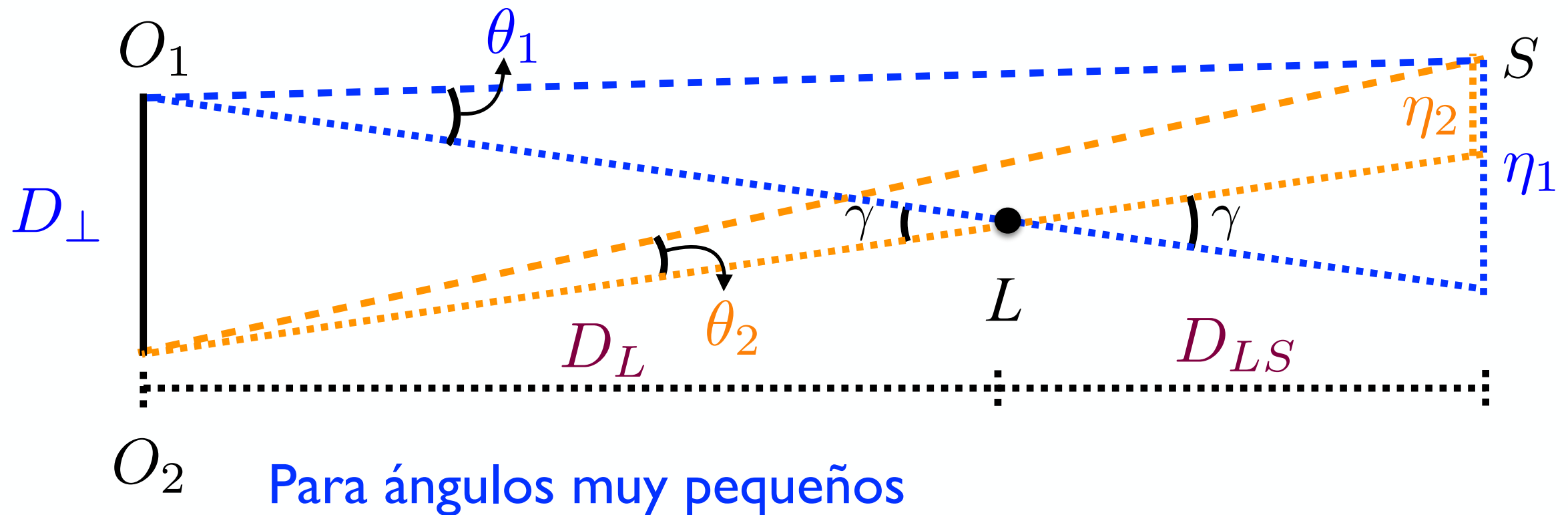
- Variación de la posición angular de una fuente S relativa a un objeto L por el desplazamiento de un observador O :



$$\begin{aligned}
 |\theta_1 - \theta_2| &= \frac{|\eta_1 - \eta_2|}{D_S} = \frac{\gamma D_{LS}}{D_S} = \frac{(D_{\perp}/D_L) D_{LS}}{D_S} \\
 &= D_{\perp} \frac{D_{LS}}{D_L D_S} = \frac{D_{\perp}}{1 \text{ UA}} \left(\frac{\text{UA}}{D_L} - \frac{\text{UA}}{D_S} \right) = \frac{D_{\perp}}{1 \text{ UA}} \pi_{\text{rel}}
 \end{aligned}$$

Paralaje (geometría)

- Variación de la posición angular de una fuente S relativa a un objeto L por el desplazamiento de un observador O :



Para ángulos muy pequeños

$$\Delta\theta = |\theta_1 - \theta_2| = \frac{D_{\perp}}{1 \text{ UA}} \pi_{\text{rel}} = \frac{D_{\perp}}{1 \text{ UA}} (\pi_L - \pi_S)$$

Definiendo:

$$\pi_L = \frac{1 \text{ UA}}{D_L}, \quad \pi_S = \frac{1 \text{ UA}}{D_S}$$

$$\Delta\theta = \frac{D_{\perp}}{1 \text{ UA}} \pi_{\text{rel}} = \frac{D_{\perp}}{1 \text{ UA}} (\pi_L - \pi_S)$$

Paralaje I

- Movimiento uniforme: $u_{\odot}(t) = u_0 + \omega_E(t - t_0)$
- Desplazamiento adicional por el movimiento orbital de la tierra (en unidades de θ_E):

$$u_1(t) = -\pi_E \sin \beta \cos \zeta(t) \quad u_2(t) = \pi_E \sin \zeta(t)$$

con $\zeta(t) = \Omega t - \varphi$

β : inclinación de la órbita de la Tierra con relación a la línea de visión

$$\Omega = \frac{2\pi}{\text{año}}$$

Paralaje relativo entre la fuente y la lente normalizado por θ_E

$$\pi_E = \frac{1\text{U.A.}}{\theta_E} \left(\frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right)$$

Paralaje I

- Movimiento uniforme: $u_{\odot}(t) = u_0 + \omega_E(t - t_0)$
- Desplazamiento adicional por el movimiento orbital de la tierra (en unidades de θ_E):

$$\begin{aligned}
 |\vec{u}_{\oplus}(t)|^2 &= |\vec{u}_{\odot}(t) + \vec{u}(t)|^2 = \\
 &= u_0^2 + \omega_E^2 (t - t_0)^2 + 2 \pi_E \{ \sin \zeta(t) [u_0 \cos \psi + \omega_E (t - t_0) \sin \psi] + \\
 &+ \sin \beta \cos \zeta(t) [u_0 \sin \psi - \omega_E (t - t_0) \cos \psi] \} + \\
 &+ \pi_E^2 [\sin^2 \zeta(t) + \sin^2 \beta \cos^2 \zeta(t)] .
 \end{aligned}$$

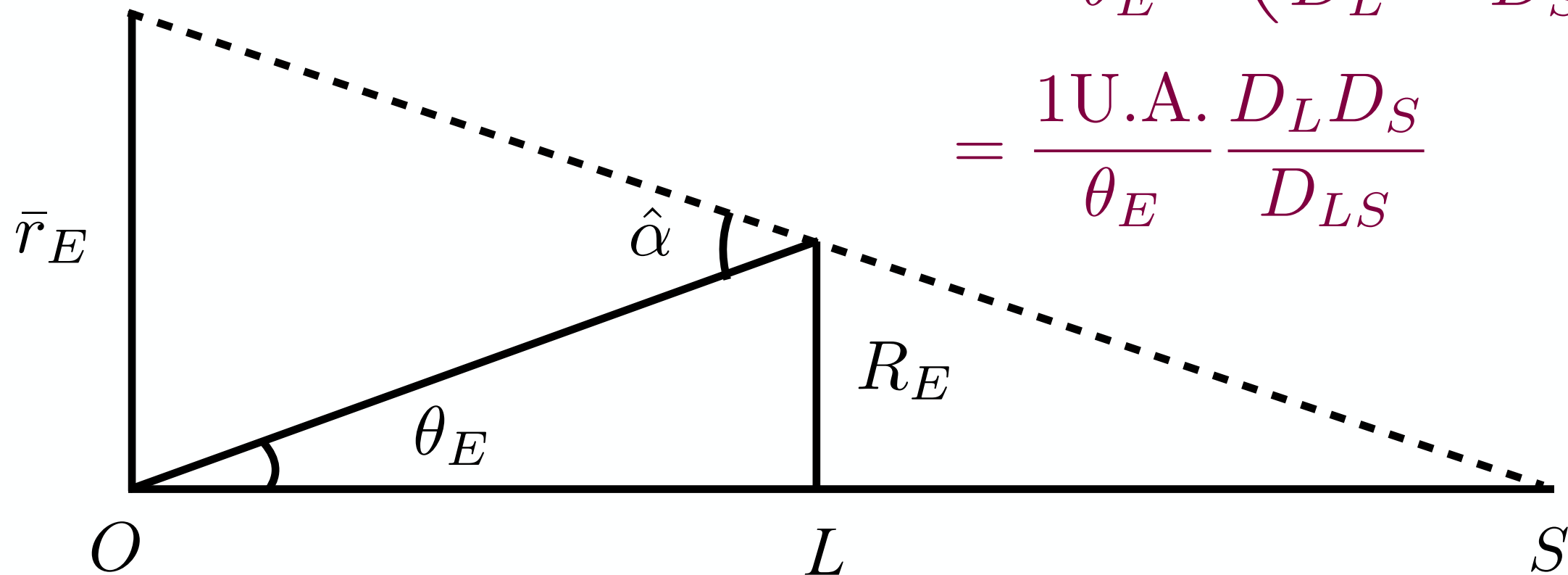
ψ : ángulo de la trayectoria de la fuente sin considerar el movimiento de la Tierra (en el mismo sistema en que se define u_1, u_2)

Observación: los ángulos y fase son conocidos (medidos). Considerar el paralaje solo agrega dos variables desconocidas, π_E y ψ (o $\vec{\pi}_E$)

Observación

Paralaje relativo entre la fuente
y la lente normalizado por θ_E

$$\begin{aligned}\pi_E &= \frac{1\text{U.A.}}{\theta_E} \left(\frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right) \\ &= \frac{1\text{U.A.}}{\theta_E} \frac{D_L D_S}{D_{LS}}\end{aligned}$$



Radio de Einstein
proyectado en el plano
del observador

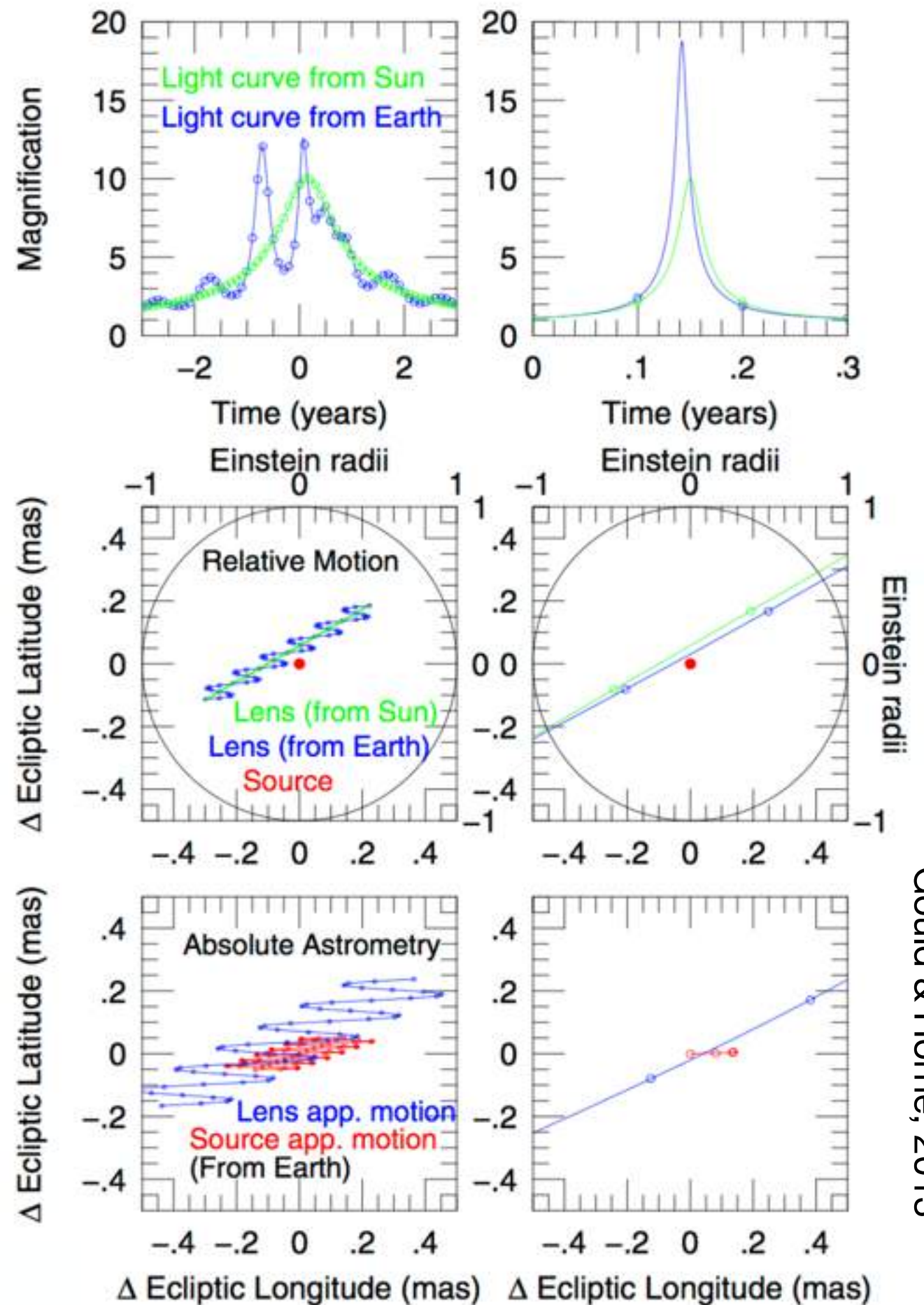
$$\bar{r}_E = \theta_E \frac{D_L D_S}{D_{LS}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{1}{1/D_L - 1/D_S}}$$

Parámetro de
paralaje

$$\pi_E = \frac{1\text{U.A.}}{\bar{r}_E}$$

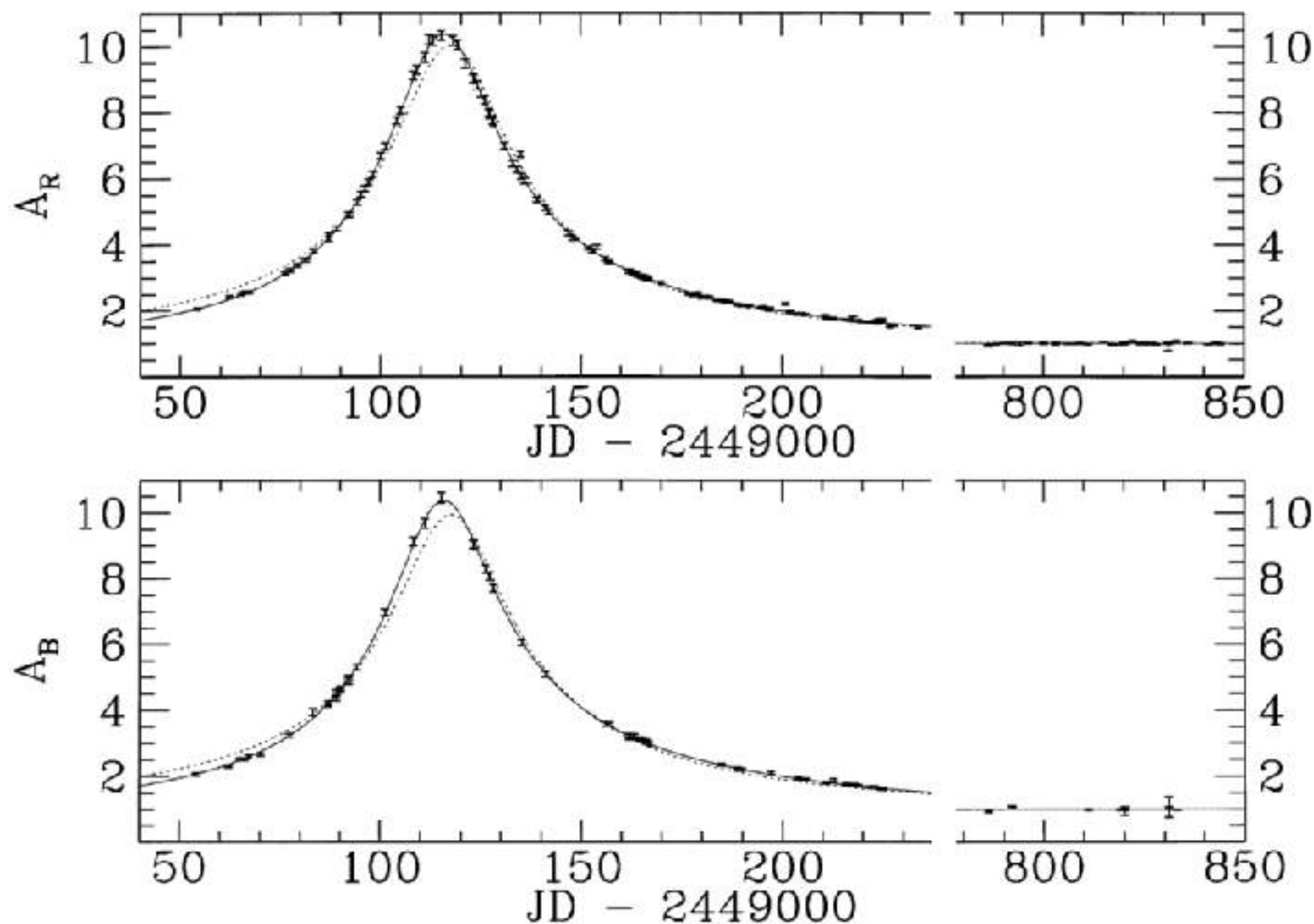
Paralaje por el movimiento de la Tierra

magnitud del efecto depende de la relación entre el tiempo de Einstein, la duración del año y el valor del parámetro de paralaje



FIRST OBSERVATION OF PARALLAX IN A GRAVITATIONAL MICROLENSING EVENT

C. ALCOCK,^{1,2} R. A. ALLSMAN,³ D. ALVES,^{1,4} T. S. AXELROD,^{1,5} D. P. BENNETT,^{1,2} K. H. COOK,^{1,2} K. C. FREEMAN,⁴ K. GRIEST,^{2,6}
 J. GUERN,^{2,6} M. J. LEHNER,^{2,6} S. L. MARSHALL,^{2,7} B. A. PETERSON,⁵ M. R. PRATT,^{2,7} P. J. QUINN,⁵ A. W. RODGERS,⁵
 C. W. STUBBS,^{2,7,8} AND W. SUTHERLAND^{2,9} (THE MACHO COLLABORATION)



Xallarap

- Causado por el movimiento de rotación de la **fente**. Ejemplo: sistema planeta-estrella
- Expresión casi idéntica a la de paralaje:

$$[u(t)]^2 = u_0^2 + \omega_E^2 (t - t_0)^2 - 2\chi_E \{ \sin \zeta(t) [u_0 \cos \psi + \omega_E (t - t_0) \sin \psi] + \\ + \sin i \cos \zeta(t) [u_0 \sin \psi - \omega_E (t - t_0) \cos \psi] \} + \\ + \chi_E^2 [\sin^2 \zeta(t) + \sin^2 \beta \cos^2 \zeta(t)] . \quad \zeta(t) = \Omega t - \varphi$$

i : período orbital del planeta

← período orbital del planeta

Parámetro de
xallarap

$$\chi_E = \frac{m_p}{m} \frac{a}{D_S \theta_E}$$

← radio de la órbita del planeta

Razón entre la masa del planeta
y de la estrella (lo que se observa
es el movimiento de la estrella)

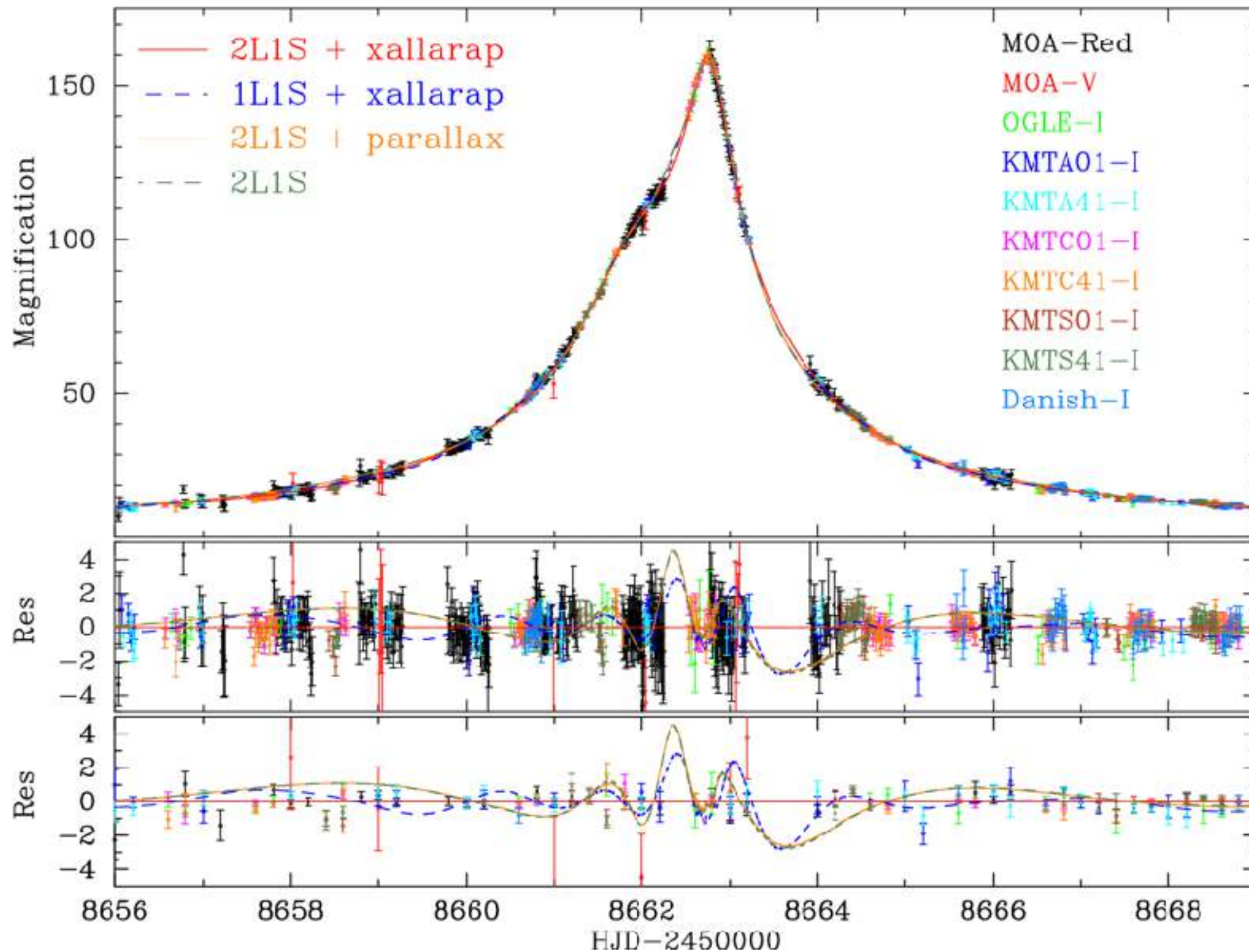
← ángulo de Einstein proyectado en el plano de la fuente

En este caso son 7 nuevos parámetros



OPEN ACCESS

OGLE-2019-BLG-0825: Constraints on the Source System and Effect on Binary-lens Parameters Arising from a Five-day Xallarap Effect in a Candidate Planetary Microlensing Event



Paralaje por diferentes puntos de observación

- Un mismo evento observado desde dos puntos será visto con diferentes ángulos
- Mostrar que la paralaje se puede calcular como $\pi_E = |\boldsymbol{\pi}_E|$ con

$$\boldsymbol{\pi}_E = \frac{1}{D_{\perp}} \left(\frac{\Delta t_0}{t_E}, \Delta u_0 \right)$$

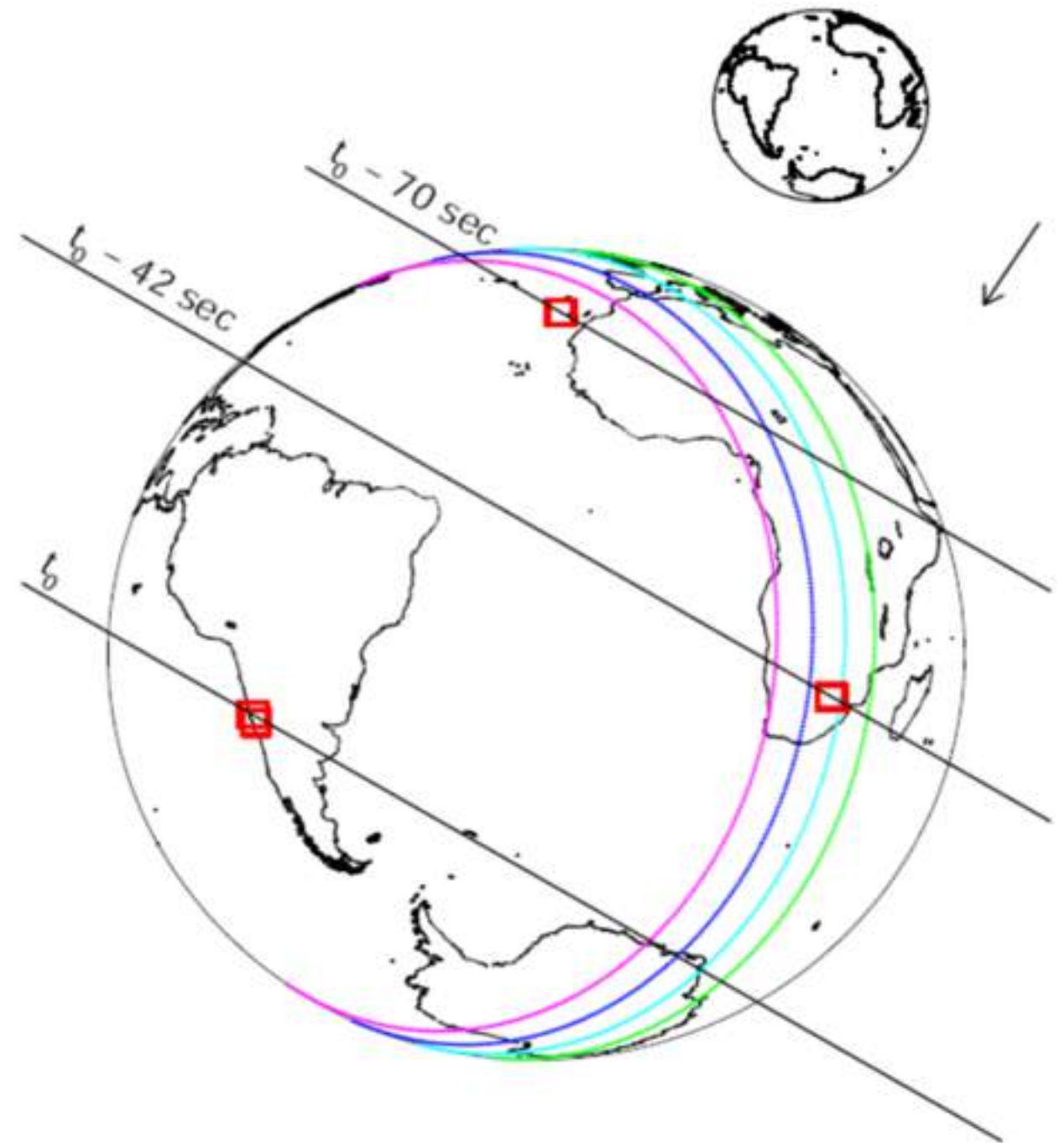
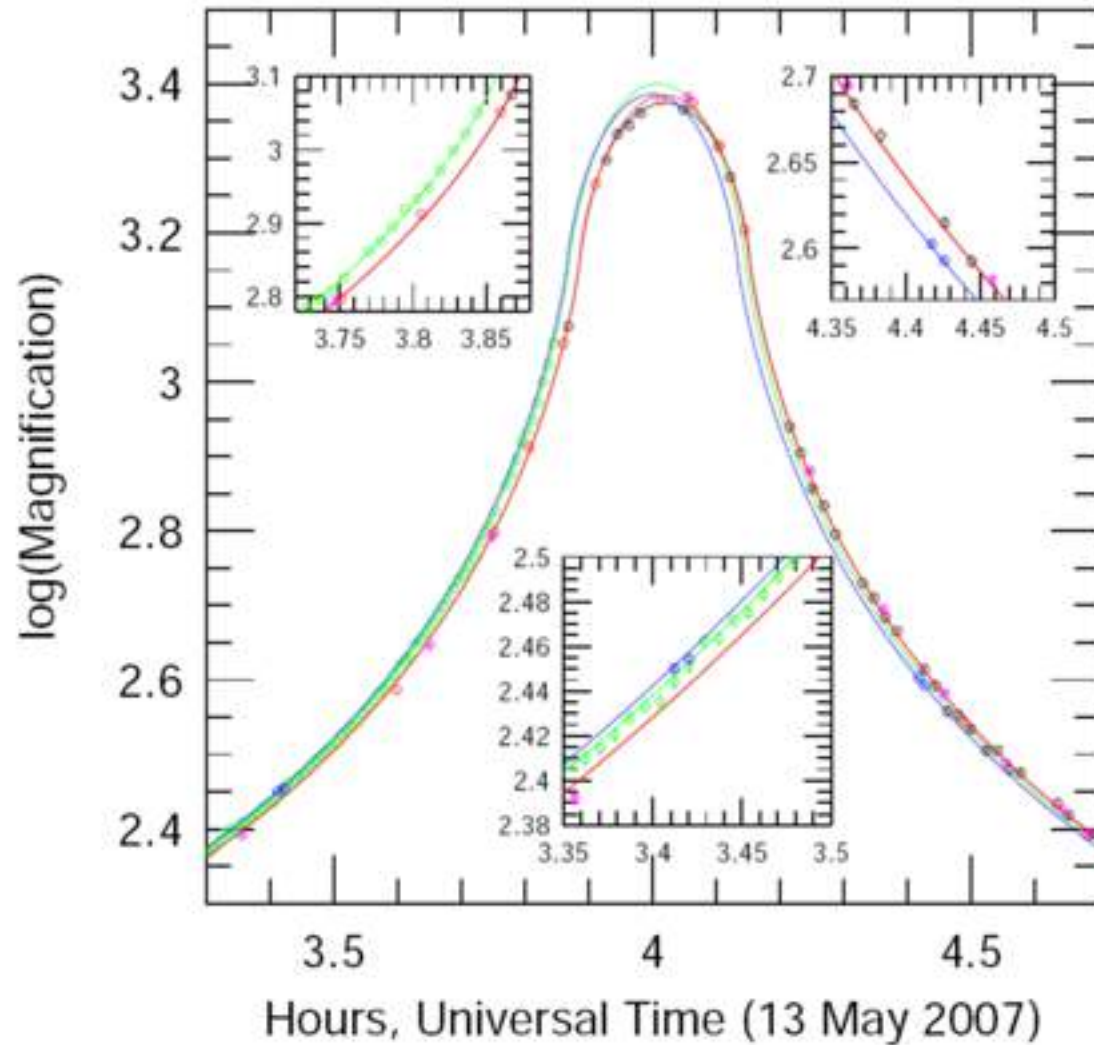
$D_{\perp}$: separación entre los observatorios en la dirección perpendicular a la línea de visión

$\Delta t_0, \Delta u_0$: diferencias entre los parámetros medidos de las dos curvas de luz

Paralaje por diferentes puntos de observación

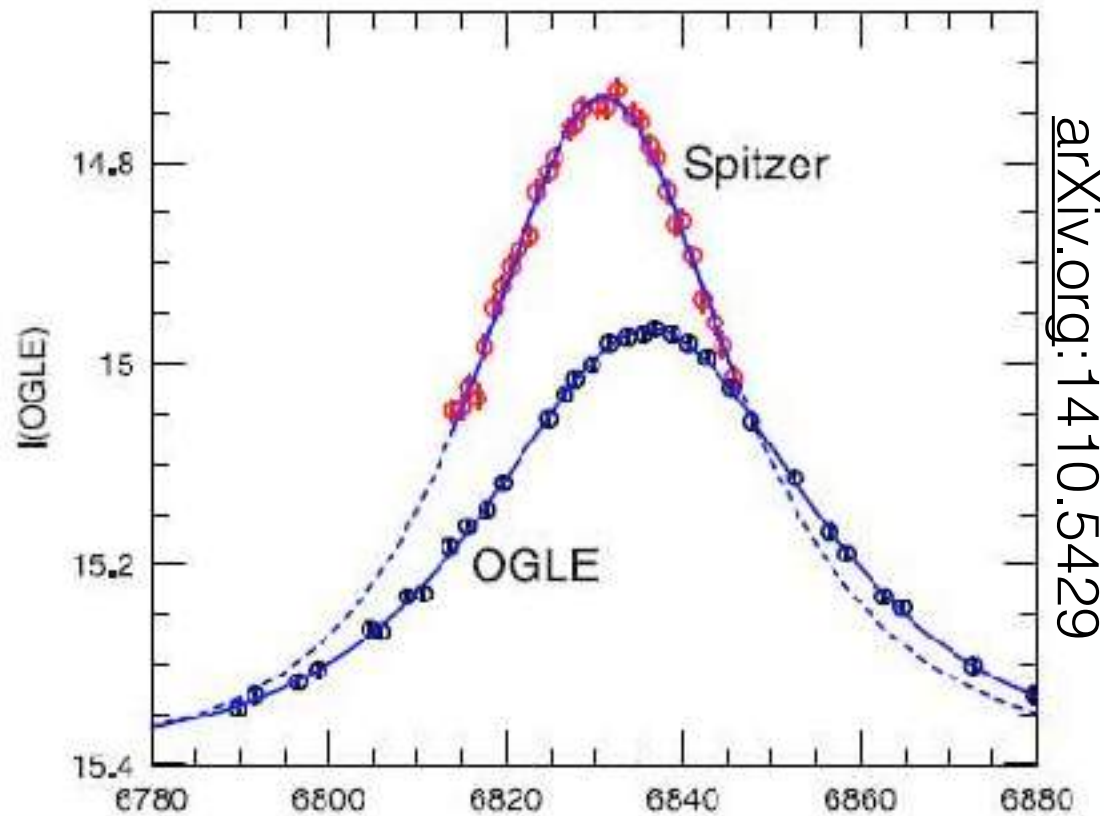
OGLE-2007-BLG-224

Canaries South Africa Chile



Gould & Horne, 2013

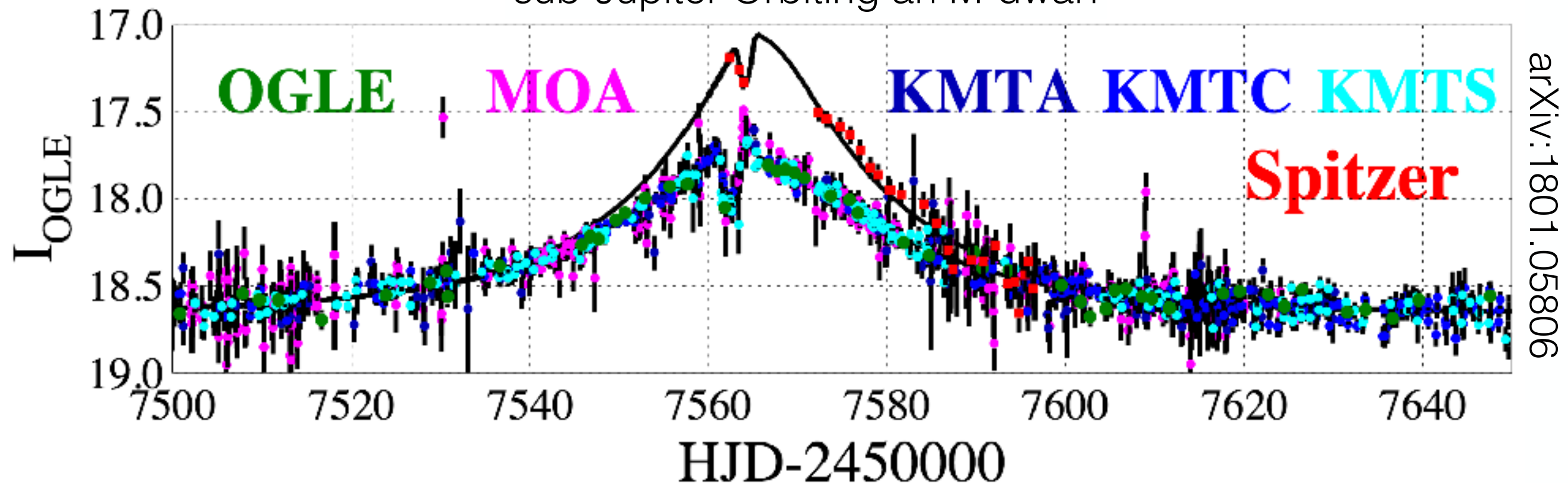
Paralaje satelital



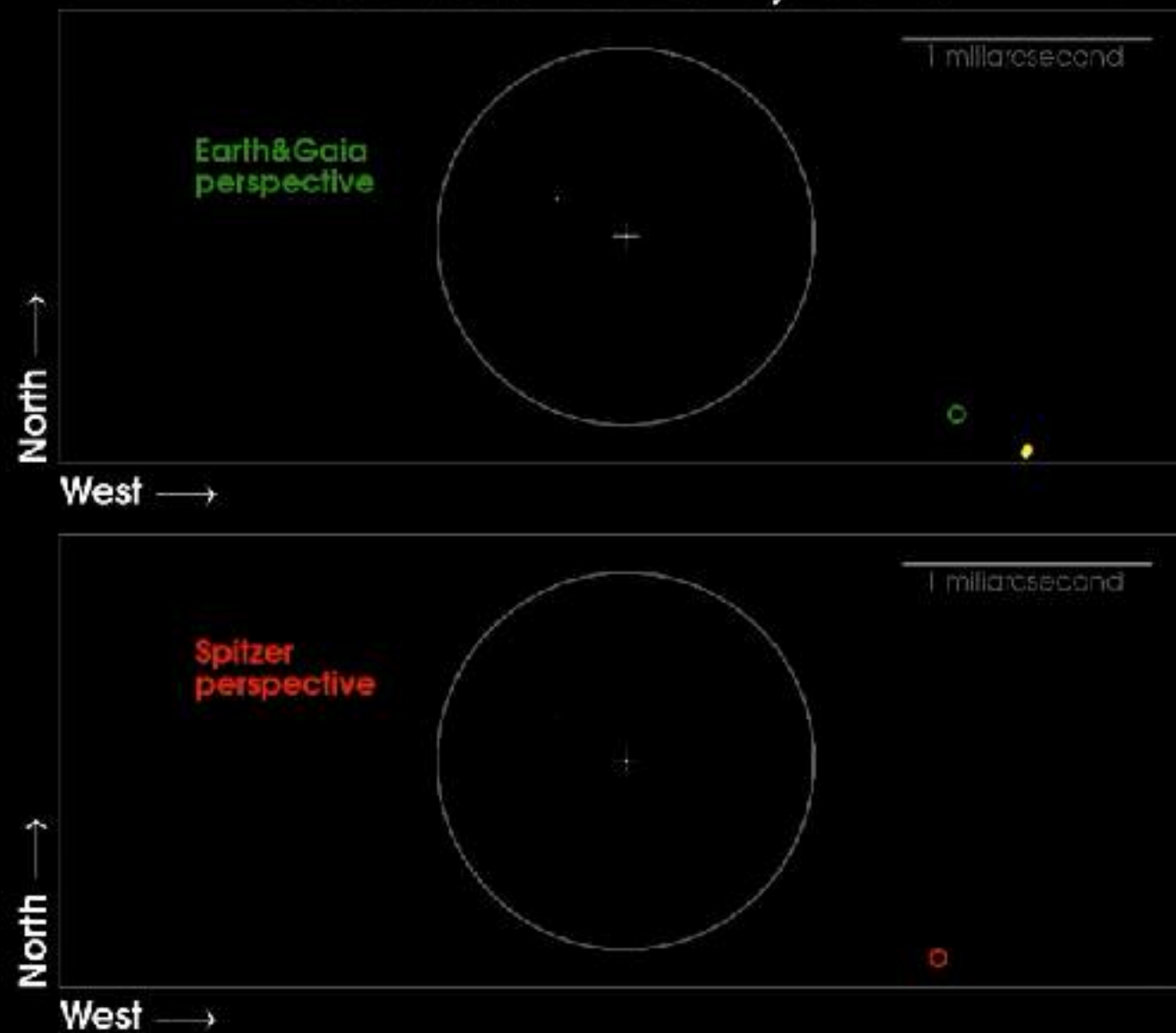
$$\pi_E = \frac{1}{D_{\perp}} \left(\frac{\Delta t_0}{t_E}, \Delta u_0 \right)$$

$\Delta t_0, \Delta u_0$: se pueden medir directamente a partir de las curvas de luz

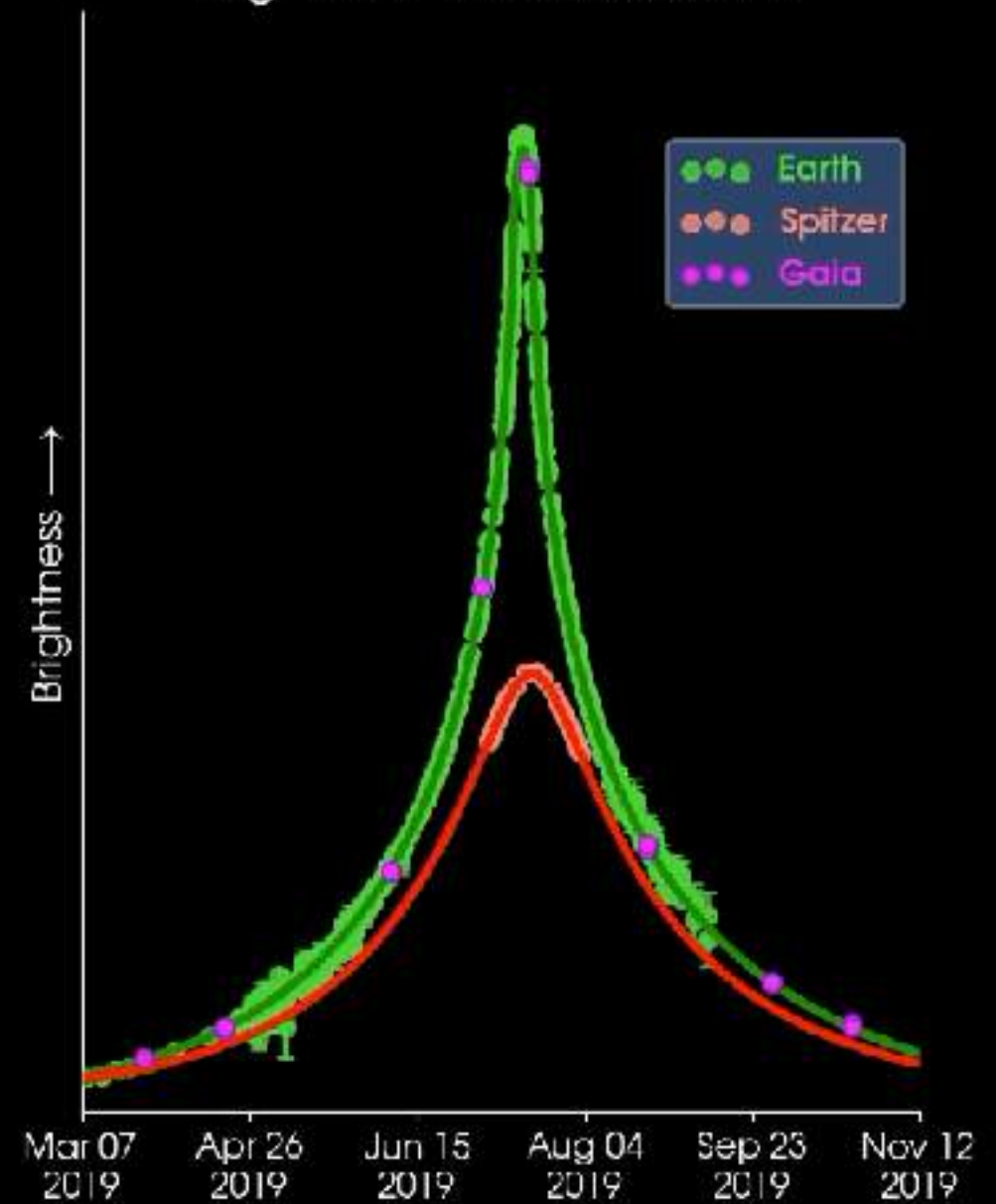
sub-Jupiter Orbiting an M-dwarf



Source-lens relative trajectories



Brightness time evolution



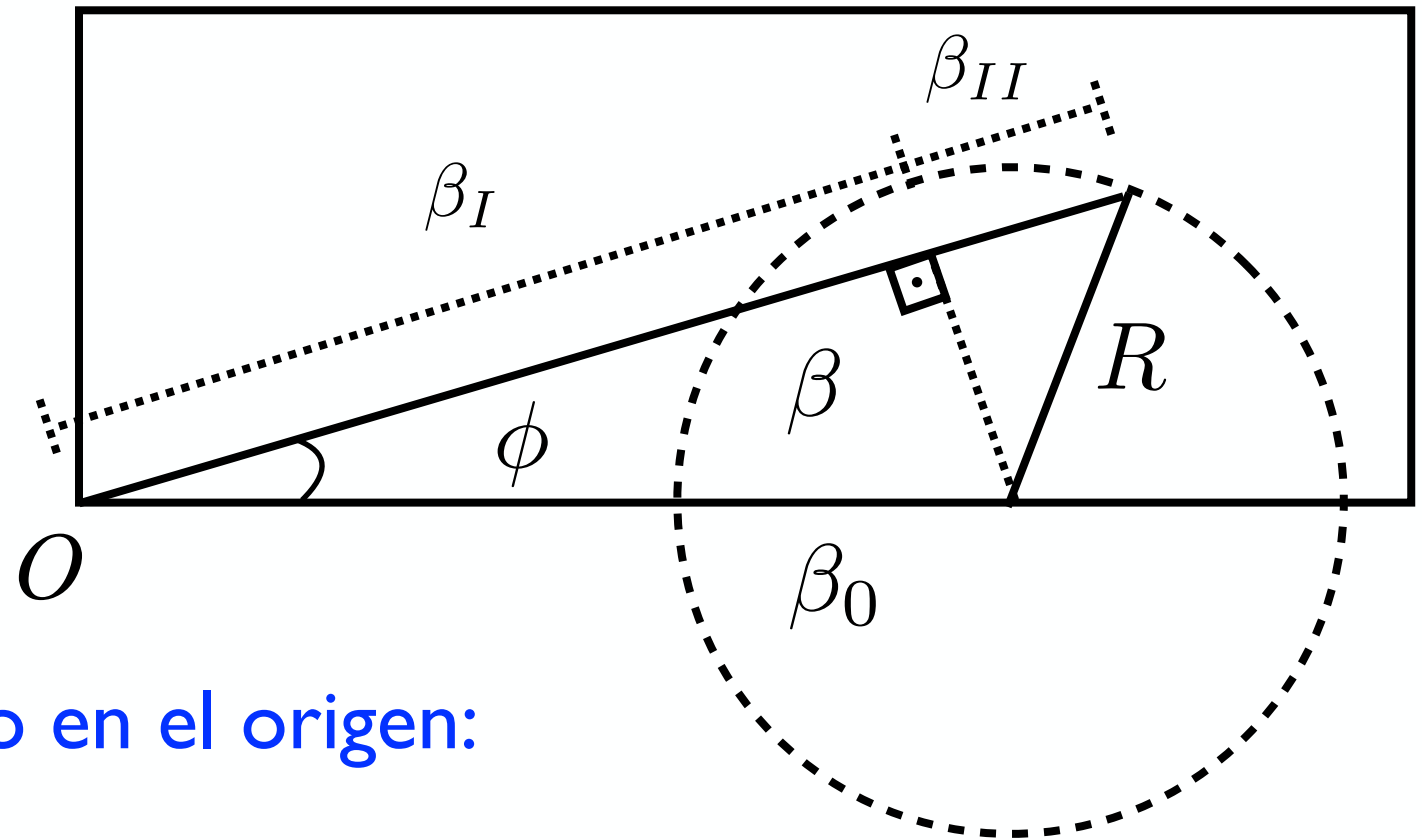
Fuente circular

Fuente circular de radio R a una distancia β de la lente en el eje x

$$\beta = \beta_I + \beta_{II}$$

$$\beta_I = \beta_0 \cos \phi$$

$$\beta_{II}^2 + (\beta_0 \sin \phi)^2 = R^2$$



Ecuación del círculo no centrado en el origen:

$$\beta = \beta_0 \cos \phi \pm \sqrt{R^2 - \beta_0^2 \sin^2 \phi}$$

Valores extremos de ϕ :

$$\phi_{\min, \max} = \pm \arcsin \left(\frac{R}{\beta_0} \right)$$

Fuente circular

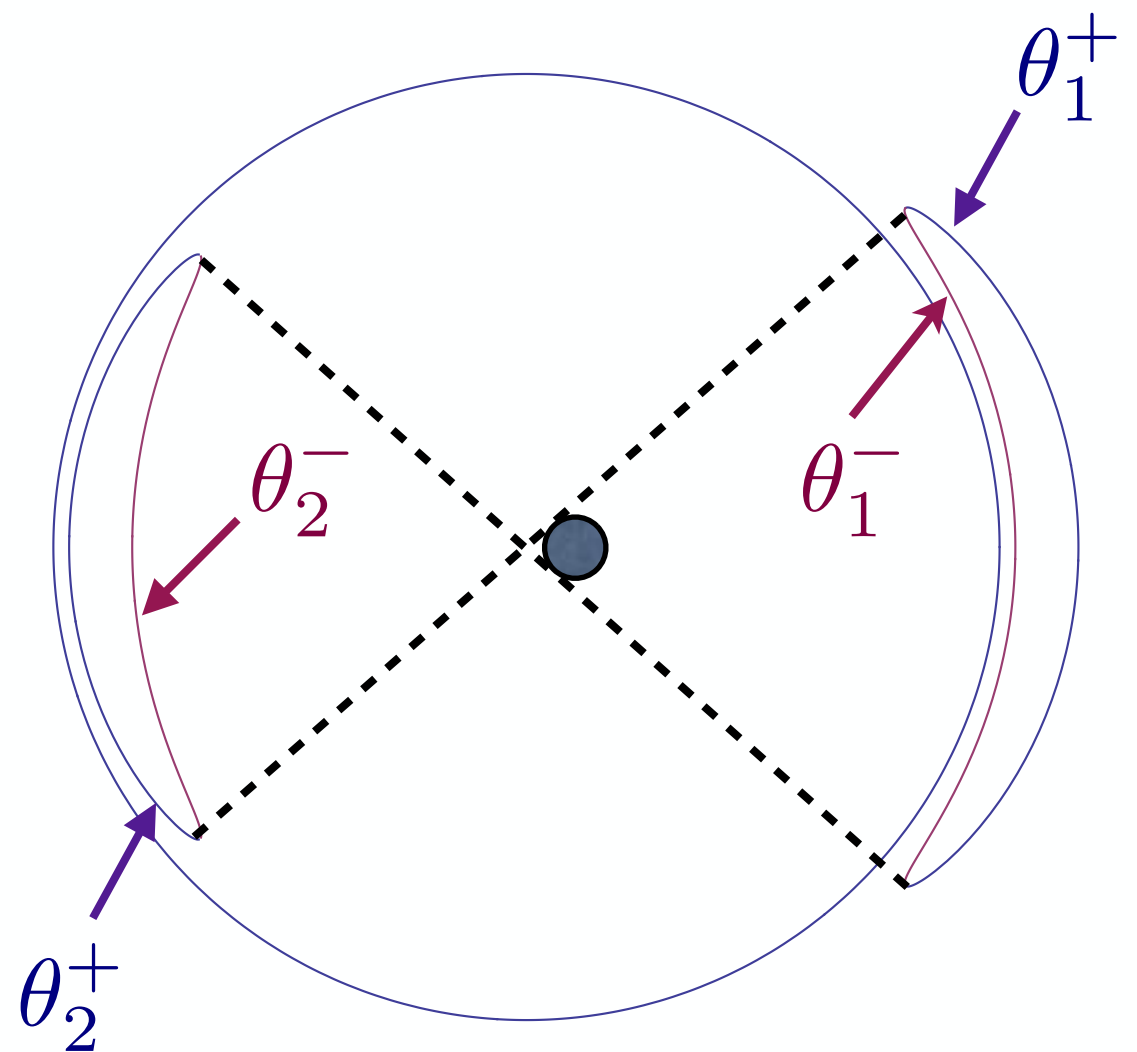
Soluciones de la lente puntual (mapeo de las coordenadas)

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$

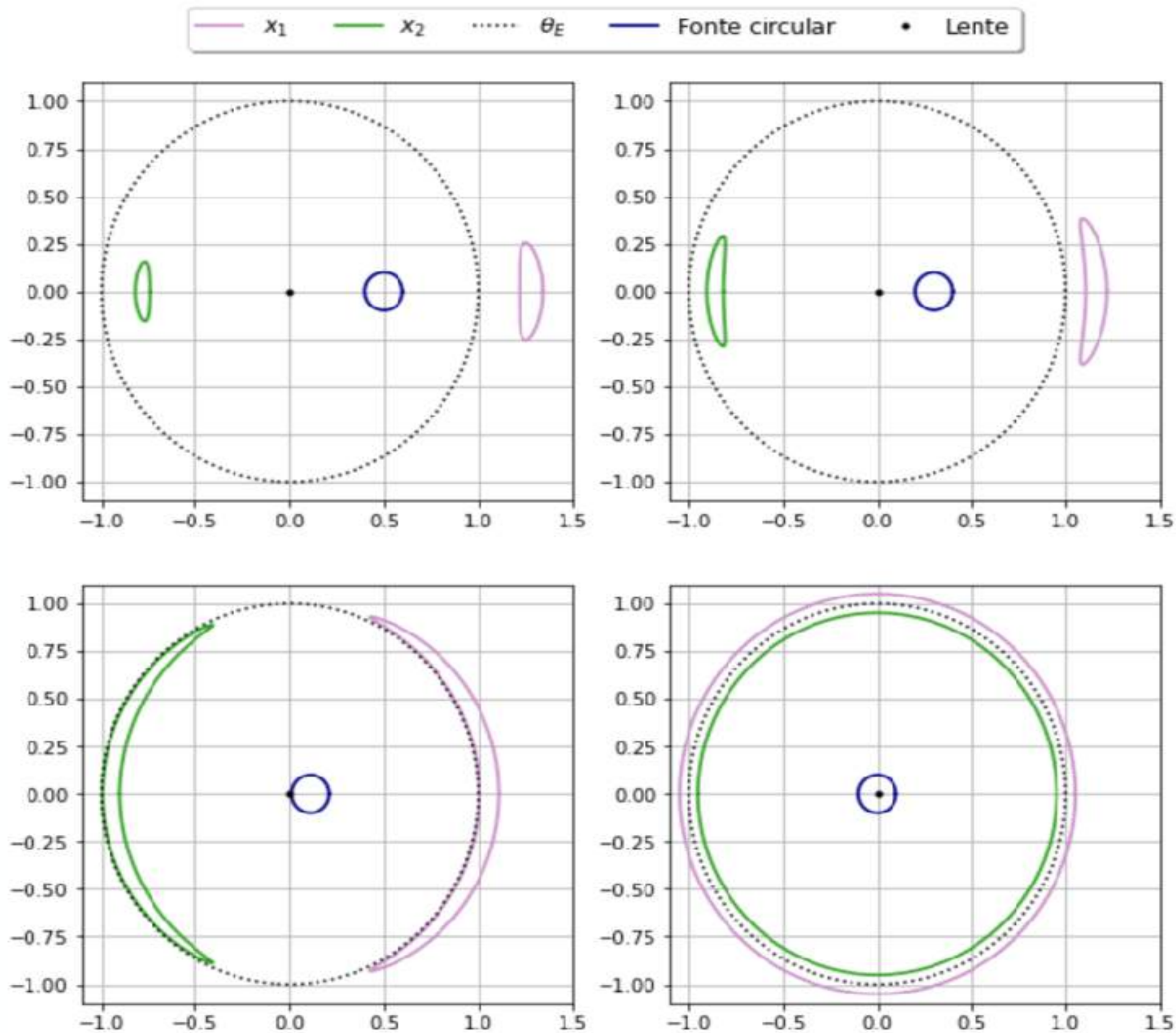
Fuente circular en el eje x :

$$\beta = \beta_0 \cos \phi \pm \sqrt{R^2 - \beta_0^2 \sin^2 \phi}$$

Barriendo ϕ se construyen las imágenes



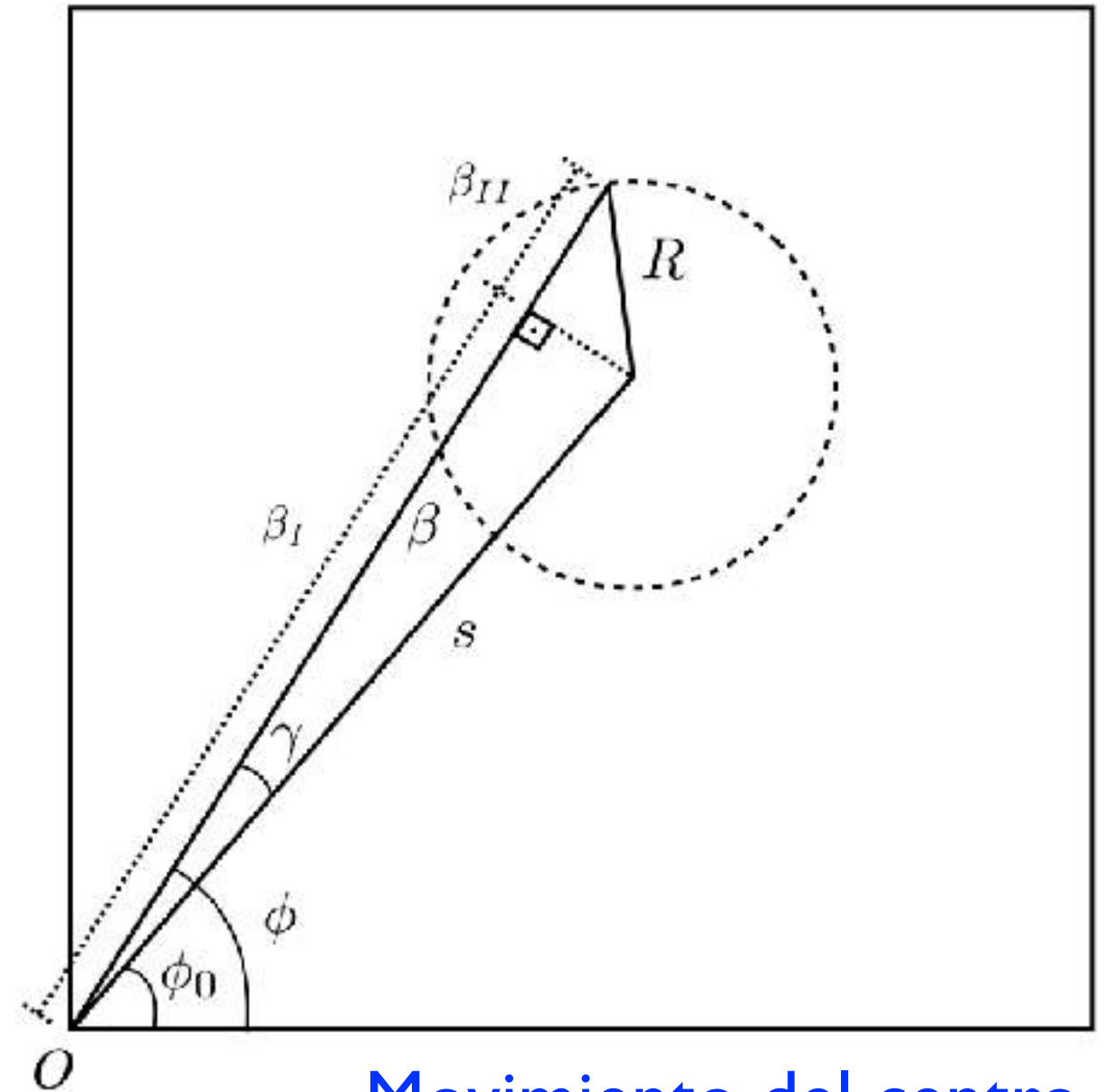
Ejercicio: hacer las gráficas



Fuente circular

- Ejercicio: obtener las imágenes para una fuente circular con orientación arbitraria
- Opcional: hacer una animación con la solución
- Usar coordenadas adimensionales y definir

$$r = \frac{R}{R_E} = \frac{R}{D_{OS} \theta_E} = \frac{\theta_R}{\theta_E}$$



- *Tip:* la fuente se puede escribir como:

Movimiento del centro de la fuente:

$$\beta = \beta_0 \cos(\phi - \phi_0) \pm \sqrt{R^2 - \beta_0^2 \sin^2(\phi - \phi_0)} \quad \beta_0(t), \phi_0(t)$$

Formalismo de números complejos

- Variables (adimensionales) complejas:

$$x = \frac{\theta_x + i\theta_y}{\xi_0} \quad y = \frac{\beta_x + i\beta_y}{\eta_0}$$

- Normalizando por el radio de Einstein:

$$x = \frac{\theta_x + i\theta_y}{\theta_0} \quad y = \frac{\beta_x + i\beta_y}{\theta_0}$$

- Mostrar que la Jacobiana del mapeo queda dada por

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix} = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right|^2$$

Formalismo de números complejos

- Variables (adimensionales) complejas:

$$x = \frac{\theta_x + i\theta_y}{\theta_0} \quad y = \frac{\beta_x + i\beta_y}{\theta_0}$$

- Mostrar que la ecuación de la lente puntual se puede escribir como

$$y = x - \frac{1}{\bar{x}}$$

- Y que la solución es

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{|y|^2}} \right)$$

Fuente circular en el formalismo de números complejos

Fuente circular:

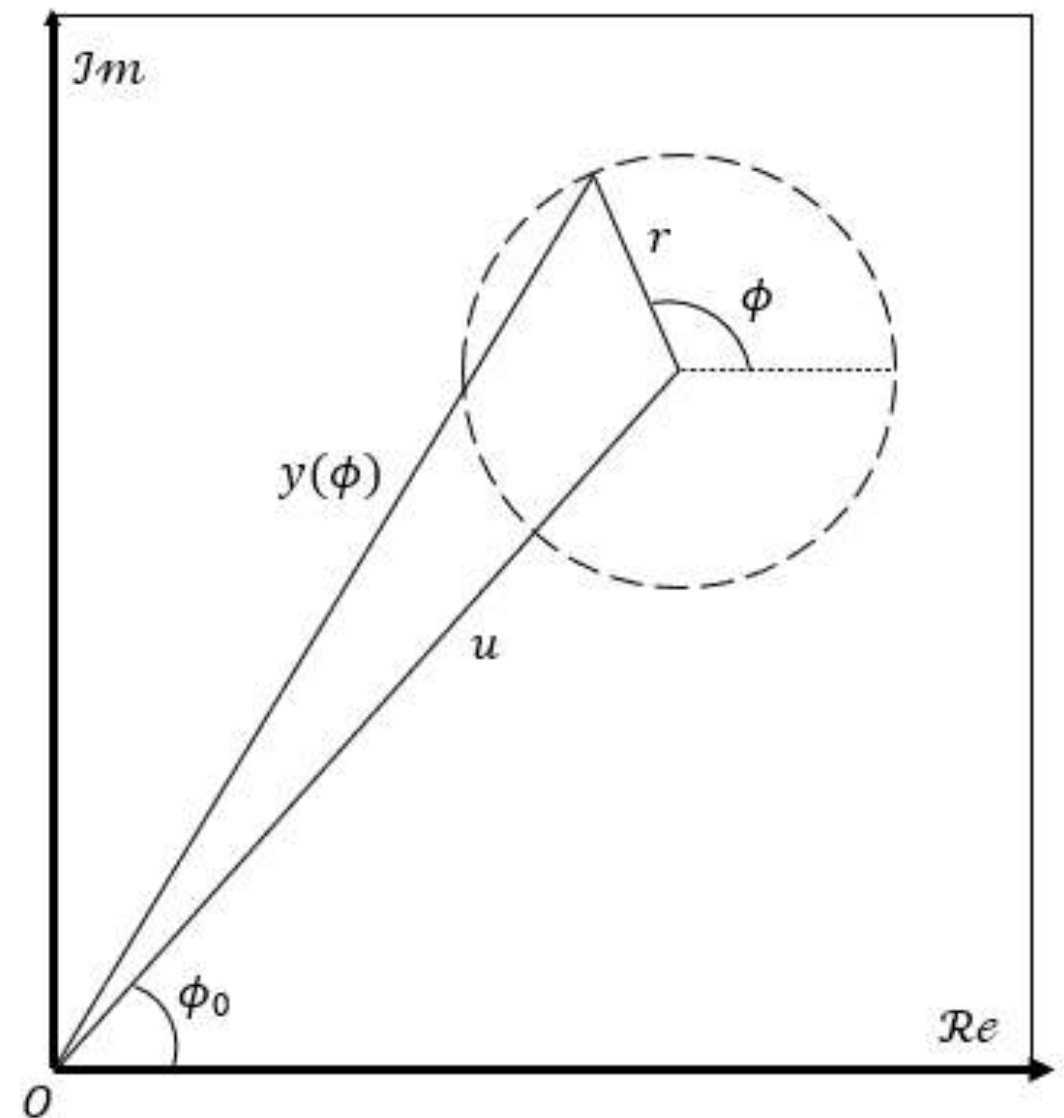
$$y(\phi) = ue^{i\phi_0} + re^{i\phi}$$

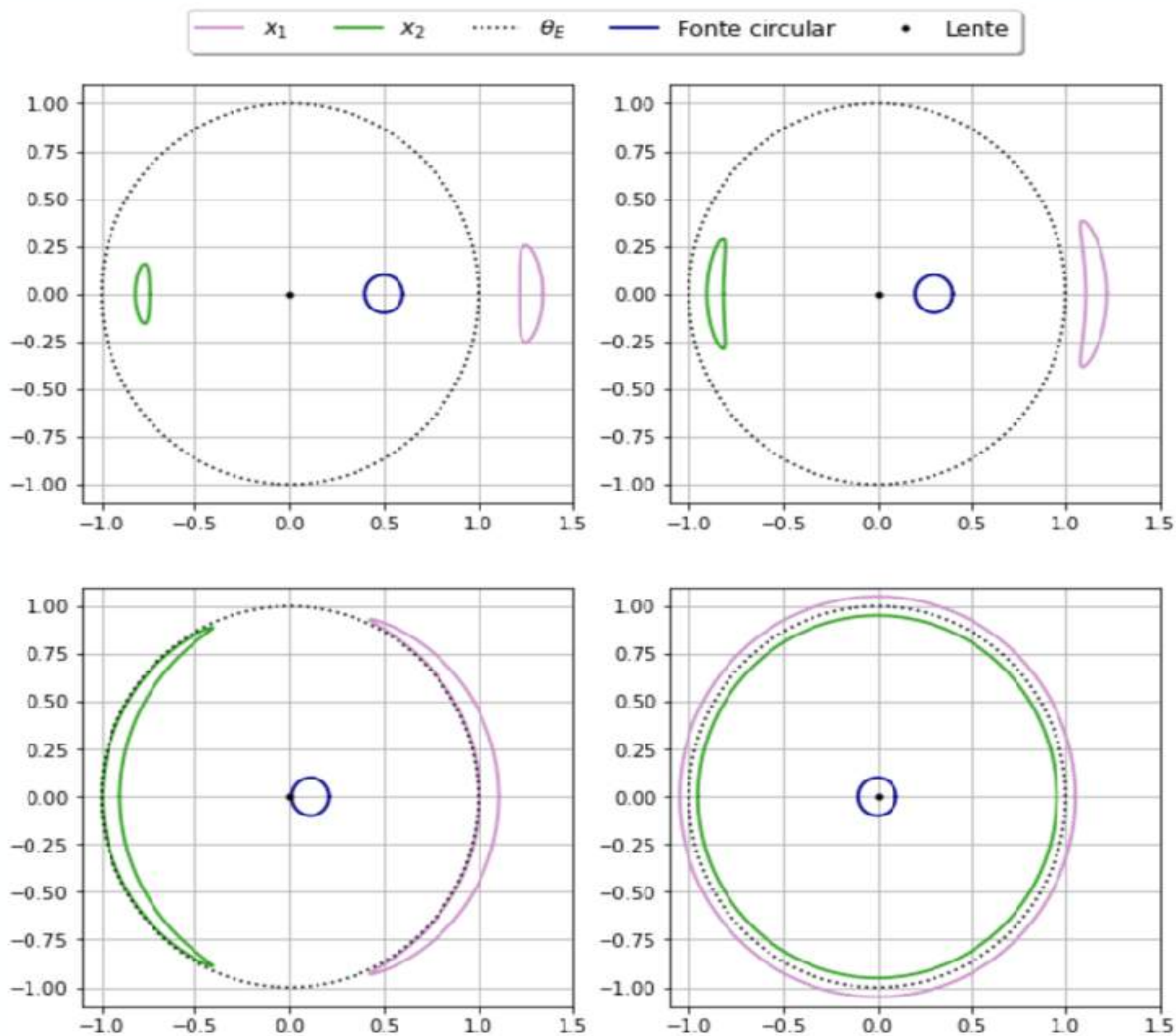
Reemplazando en la solución de la ecuación de la lente

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{|y|^2}} \right)$$

tenemos, simplemente

$$x_{1,2}(\phi) = \frac{ue^{i\phi_0} + re^{i\phi}}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{u^2 + 2ru \cos(\phi - \phi_0) + r^2}} \right)$$





Cálculo de la magnificación

- Conservación del brillo superficial

$$\mu = \frac{A_{\text{imagen}}}{A_{\text{fuente}}} = \frac{A_{\text{imagen}}}{\pi \rho^2}$$

Separando en la parte real w e imaginaria z de las imágenes

$$A_{1,2} = \int_0^{2\pi} z_{1,2}(\phi) \frac{d w_{1,2}(\phi)}{d\phi} d\phi$$

$$\mu_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{A_{\text{fuente}}} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} z_{1,2}(\phi) \frac{d w_{1,2}(\phi)}{d\phi} d\phi$$

Cálculo de la magnificación

Separando la solución de las imágenes en la parte real w e imaginaria z

$$w_{1,2}(\phi) = \frac{u \cos(\phi_0) + r \cos(\phi)}{2} f_{1,2}(\phi) \quad z_{1,2}(\phi) = \frac{u \operatorname{sen}(\phi_0) + r \operatorname{sen}(\phi)}{2} f_{1,2}(\phi)$$

$$f_{1,2}(\phi) = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{u^2 + 2r u \cos(\phi - \phi_0) + r^2}}$$

y reemplazando en la magnificación

$$\mu_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{A_{\text{fuente}}} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} z_{1,2}(\phi) \frac{d w_{1,2}(\phi)}{d\phi} d\phi$$

Cálculo de la magnificación

Magnificación por fuente circular (uniforme)

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[\pm \pi - K \left(\frac{\pi}{2}, m \right) \frac{(u-r)}{r^2} \frac{4 + (u^2 - r^2)/2}{\sqrt{4 + (u-r)^2}} + E \left(\frac{\pi}{2}, m \right) \frac{u+r}{2r^2} \sqrt{4 + (u-r)^2} \right. \\ \left. + \Pi \left(n, \frac{\pi}{2}, m \right) \frac{2(u-r)^2}{r^2(u+r)} \frac{1+r^2}{\sqrt{4 + (u-r)^2}} \right], \quad |u| \neq r$$

$$n = \frac{4ur}{(u+r)^2} \quad \text{y} \quad m = \sqrt{\frac{4n}{4 + (u-r)^2}}.$$

caso en que el borde de la fuente toca el centro de la lente

$$\mu = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2}{r} + \frac{1+r^2}{r^2} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsen \left(\frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right) \right] \right\}, \quad |u| = r$$

Cálculo de la magnificación

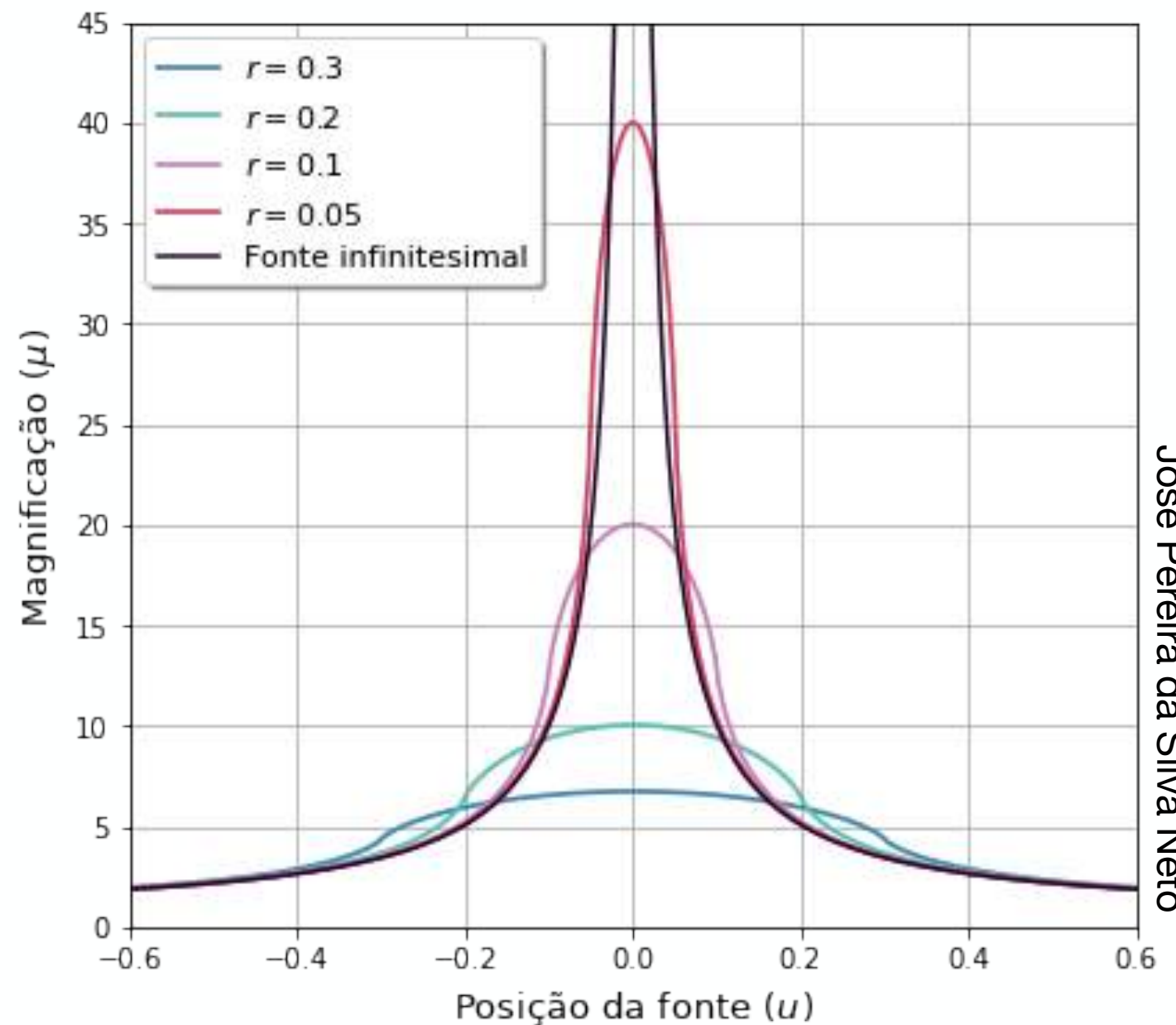
Lente y fuente perfectamente alineadas,

$|u| = 0$:

$$\mu_{\max} = \frac{\sqrt{4 + r^2}}{r}$$

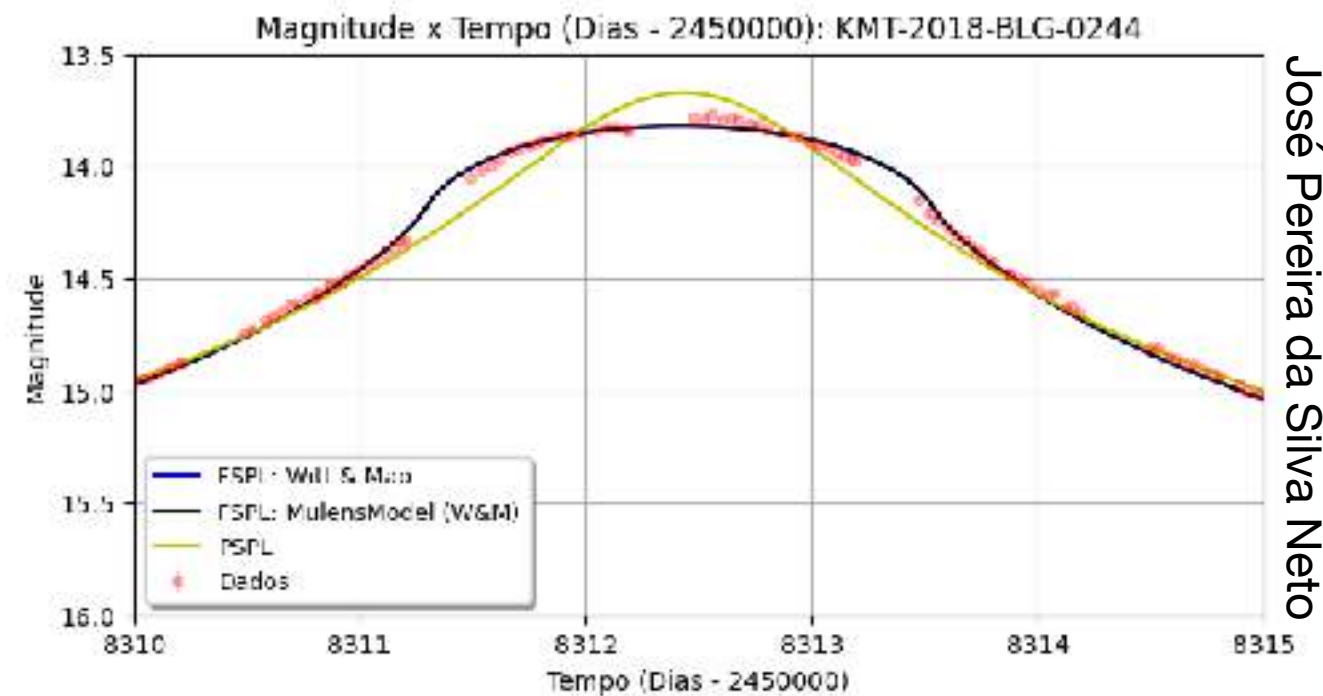
El efecto de fuente finita
es importante cuando

$$u \lesssim r$$

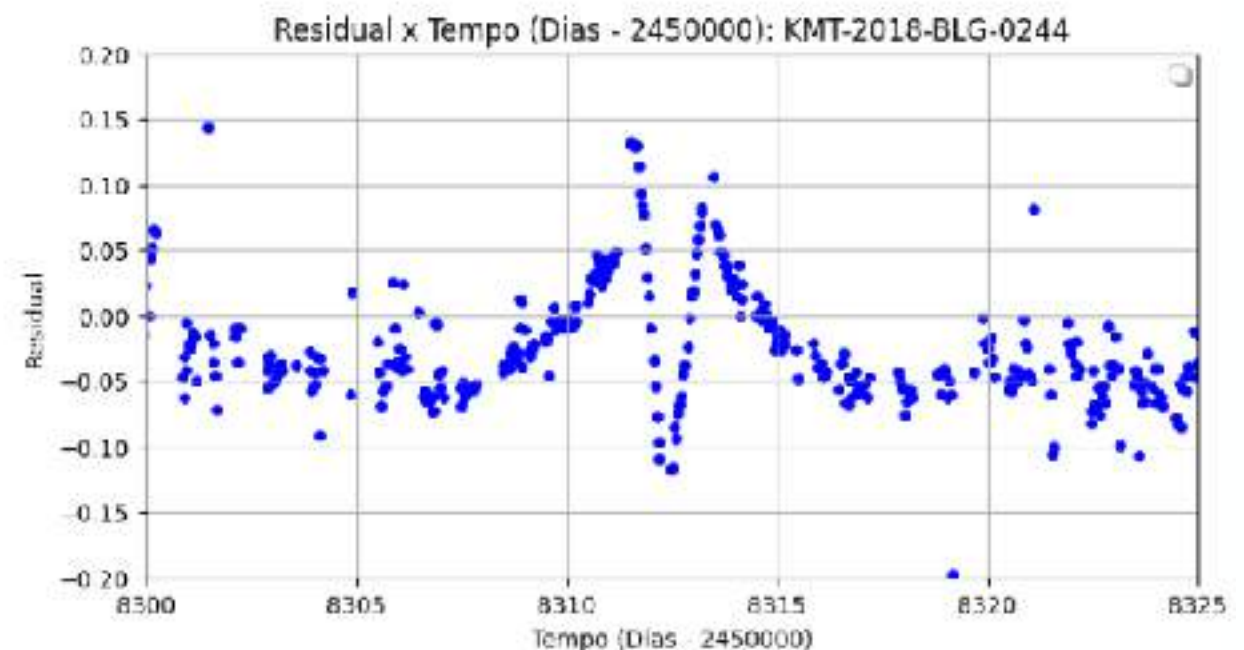
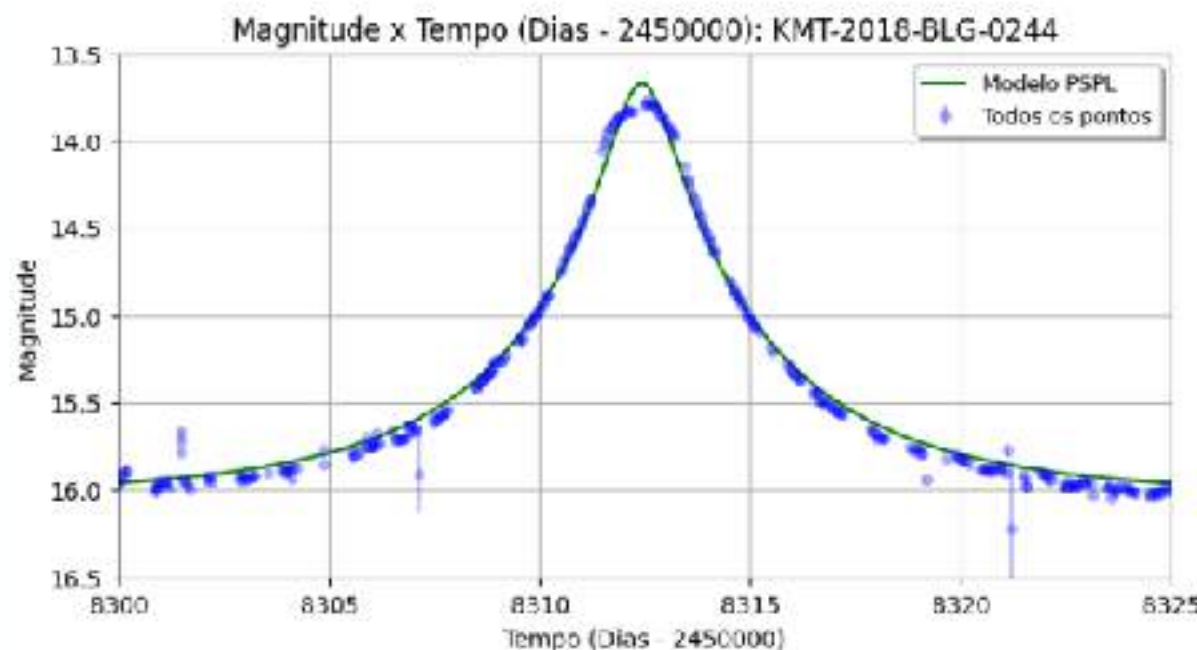


Efecto de fuente finita

- Efecto en la curva de luz



- Residuales de ajuste por fuente puntual



Oscurecimiento de limbo

Limb darkening

- Los bordes del Sol (y de otras estrellas) son oscurecidos respecto al centro
- Razón: la temperatura de la estrella varia con la distancia al centro
- Efecto cromático!
- Importante en microlensing!
las cáusticas cruzan una región pequeña de la fuente!
- Efecto a tomar en cuenta
- *Microlensing* es una forma de **medir** el *limb darkening*!



Oscurecimiento de limbo

Limb darkening

- Los bordes del Sol (y de otras estrellas) son oscurecidos respecto al centro
- Razón: la temperatura de la estrella varia con la distancia al centro
- Modelos teóricos para la dependencia radial del brillo
- Se usan expansiones empíricas
- Coeficientes dependen de la longitud de onda



ejemplo:
$$\frac{I_{\lambda}(\rho)}{I_{\lambda}(0)} = 1 - u_{\lambda} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_{\star}} \right)^2} \right]$$

Microlensing con *limb darkening*

- La llave son las cáusticas! Solo una fracción de la estrella es muy magnificada!
- Magnificación

$$\mu_{\lambda} = \frac{\int_0^R I_{\lambda}(\rho) \bar{\mu}_{\text{anillo}}(\rho) \rho \, d\rho}{\int_0^R I_{\lambda}(\rho) \rho \, d\rho}$$

y podemos escribir

$$\bar{\mu}_{\text{anillo}}(\rho) = \frac{dA_{\text{imagen}}}{dA_{\text{fuente}}} = \frac{d(\bar{\mu}_{\text{circ}} \pi \rho^2)}{2\pi \rho d\rho}$$

Microensing con *limb darkening*

$$\mu_\lambda = \int_0^R I_\lambda(\rho) \frac{1}{2\pi\rho} \frac{d(\pi\rho^2\mu_{\text{circ}})}{d\rho} \rho d\rho \left[\int_0^R I_\lambda(\rho) \rho d\rho \right]^{-1}$$

- Se aproxima, con el método de integración de contorno por una suma en anillos:

Bozza (2010) MNRAS, 408.4, 2188, Bozza (2018) MNRAS 479.4, 5157

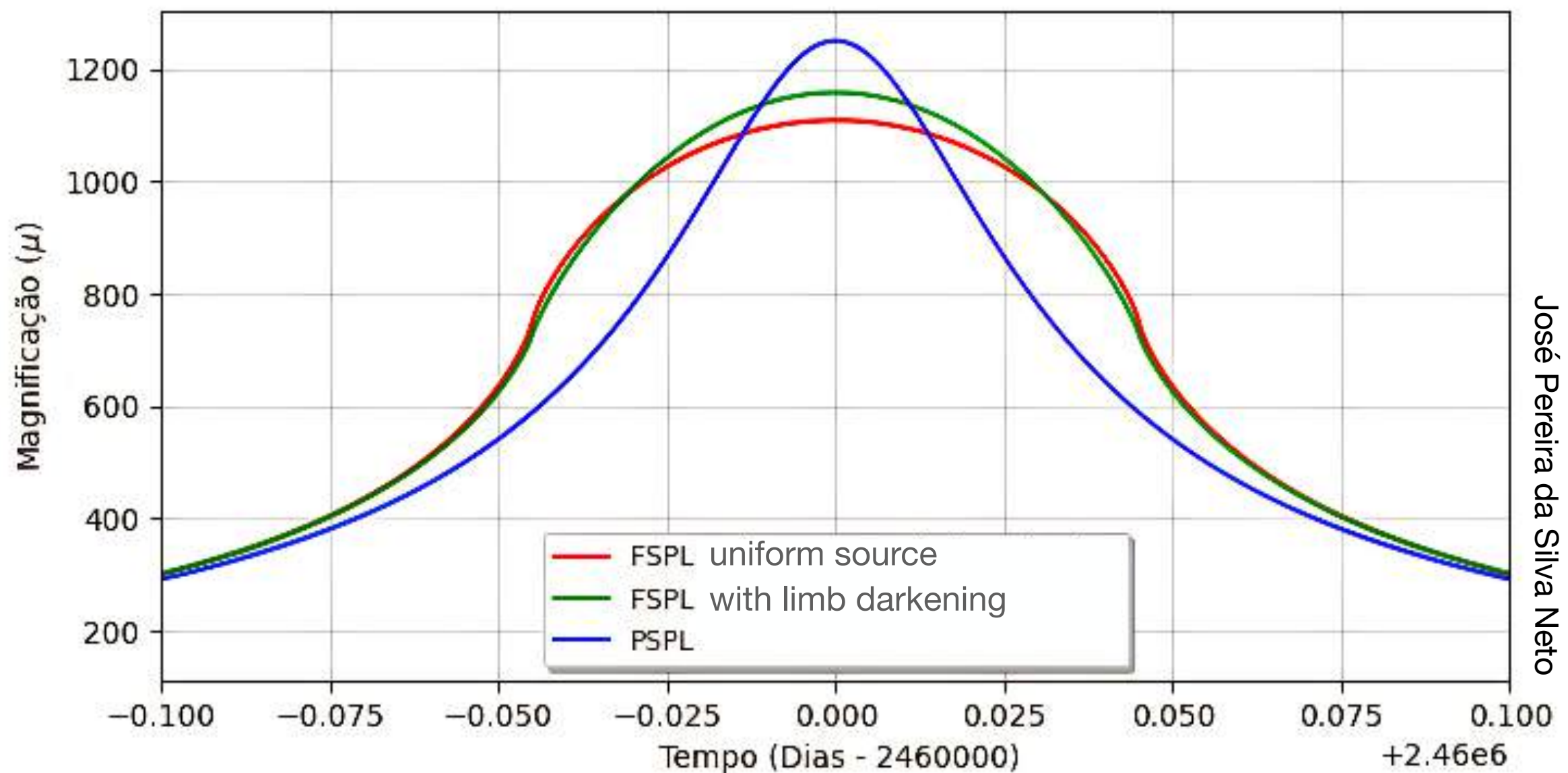
$$\mu_\lambda \approx \sum_i^N f_i (\mu_i \eta_i^2 - \mu_{i-1} \eta_{i-1}^2) \quad \eta_i = \rho_i / R$$

$$f_i = \frac{F(\eta_i) - F(\eta_{i-1})}{\eta_i^2 - \eta_{i-1}^2} \quad \text{y} \quad F(\eta) = 2 \int_0^\eta \eta' I_\lambda(\eta') d\eta'$$

μ_i es la magnificación de un disco de radio ρ_i

Microlensing con *limb darkening*

$$\mu_\lambda \approx \sum_i^N f_i (\mu_i \eta_i^2 - \mu_{i-1} \eta_{i-1}^2) \quad \frac{I_\lambda(\rho)}{I_\lambda(0)} = 1 - u_\lambda \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R_\star} \right)^2} \right]$$



José Pereira da Silva Neto

Aplicaciones de microlentes

Ejemplos: descubierta de planetas y agujeros negros, búsqueda de materia oscura, caracterización de la distribución de objetos compactos...

- Eventos individuales

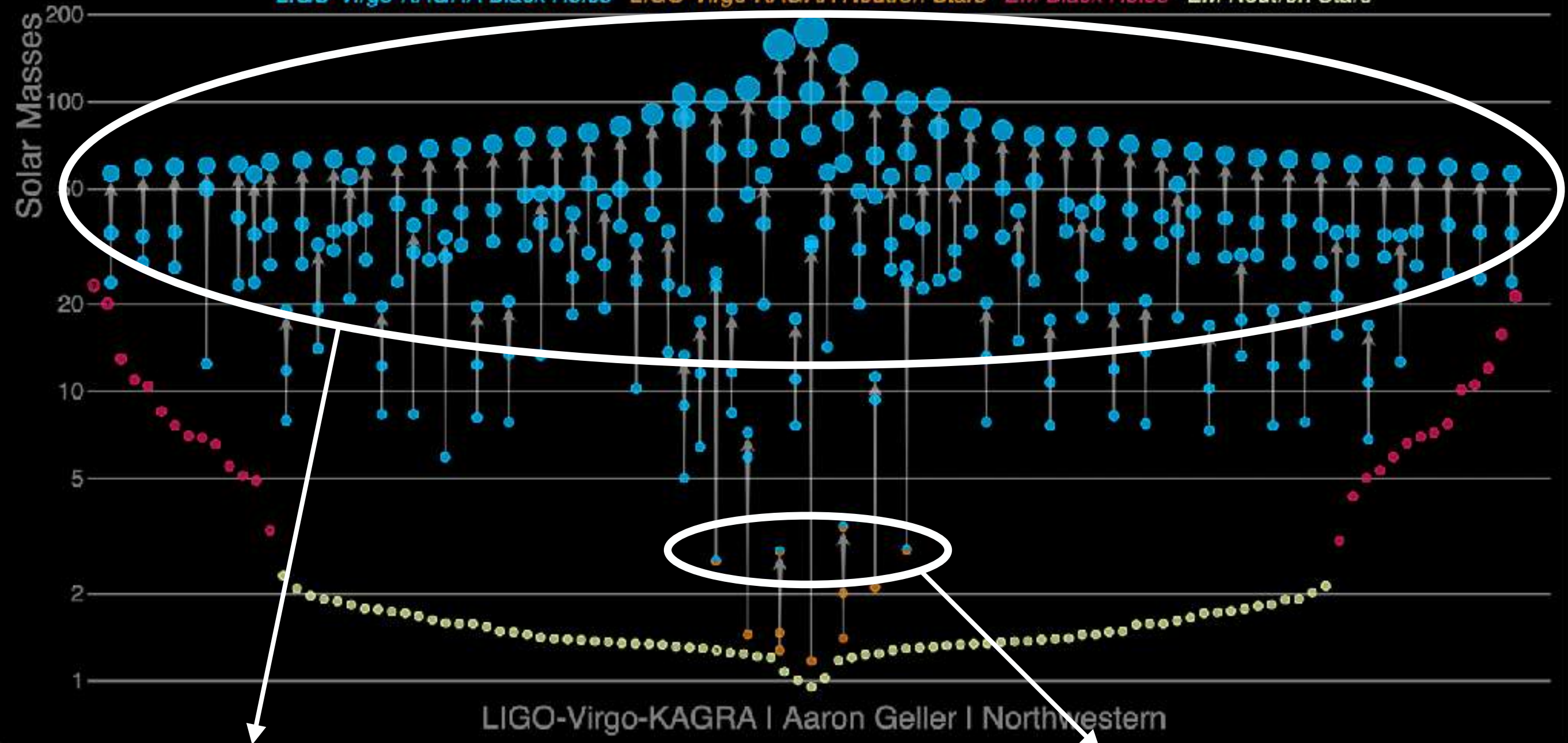
- Informaciones adicionales: romper degeneraciones
- Eventos de lentes binarias y múltiples
(incluso exoplanetas y QSO *microlensing*)

- Estadística

- Materia oscura, poblaciones

Masses in the Stellar Graveyard

LIGO-Virgo-KAGRA Black Holes LIGO-Virgo-KAGRA Neutron Stars EM Black Holes EM Neutron Stars



¿Podemos detectar esos agujeros negros de alta masa por otros medios?
¿Cuál es la población de agujeros negros libres?

¿Son realmente objetos en la brecha de masas?
¿O están amplificados por lentes gravitacionales?
¿Podemos encontrar tales objetos por otros medios?

El *microlensing* puede ayudarnos a construir un censo más completo de objetos compactos

Mas allá de la curva de Paczynski

- 90% de los eventos de *microlensing* se pueden describir con una curva de lente y fuente puntuales y movimientos uniformes

$$t_E = \frac{\theta_E D_{OL}}{v_{\perp}}$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}$$

Mas allá de la curva de Paczynski

- 90% de los eventos de *microlensing* se pueden describir con una curva de lente y fuente puntuales y movimientos uniformes

$$t_E = \frac{\theta_E D_{OL}}{v_{\perp}} \quad \mu_{\text{rel}} = \frac{v_{\perp}}{D_L} \quad \text{movimiento propio relativo} \quad t_E = \frac{\theta_E}{\mu_{\text{rel}}}$$

- Los otros 10% requieren la inclusión de efectos adicionales, lo que puede permitir quebrar algunas de las degeneraciones de *microlensing*:
 - Fuentes binarias: superposición de dos curvas de luz (si se puede despreciar la rotación)
 - Fuente finita: cuando el tamaño de la fuente es relevante (importante si $u_0 \lesssim r = \theta_R / \theta_E$)
 - Movimiento del observador (*parallax*) o de la fuente (*xallarap*)
 - Lentes compuestas (incluso planetas!)

Efectos de paralaje en microlentes

- Efecto temporal (secular) en la curva de luz

$$\begin{aligned} |\vec{u}_{\oplus}(t)|^2 &= |\vec{u}_{\odot}(t) + \vec{u}(t)|^2 = \\ &= u_0^2 + \omega_E^2 (t - t_0)^2 + 2\pi_E \{ \sin \zeta(t) [u_0 \cos \psi + \omega_E (t - t_0) \sin \psi] + \\ &+ \sin \beta \cos \zeta(t) [u_0 \sin \psi - \omega_E (t - t_0) \cos \psi] \} + \\ &+ \pi_E^2 [\sin^2 \zeta(t) + \sin^2 \beta \cos^2 \zeta(t)] . \end{aligned}$$

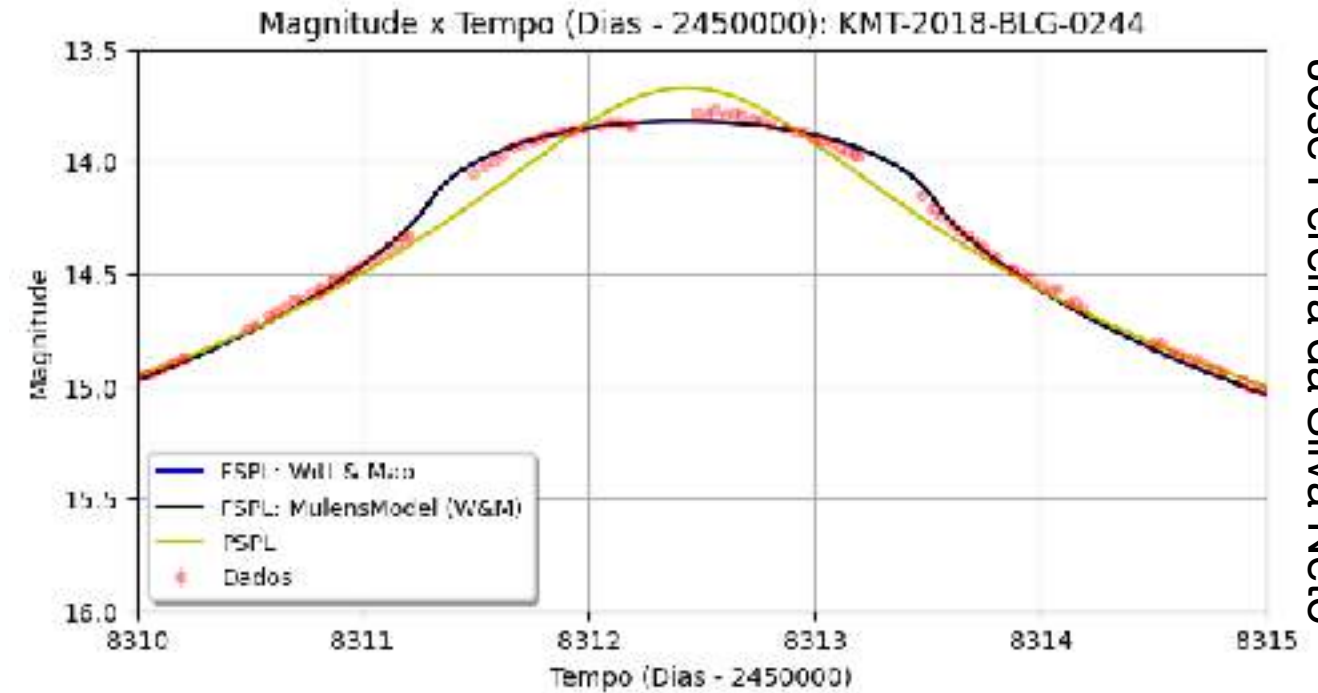
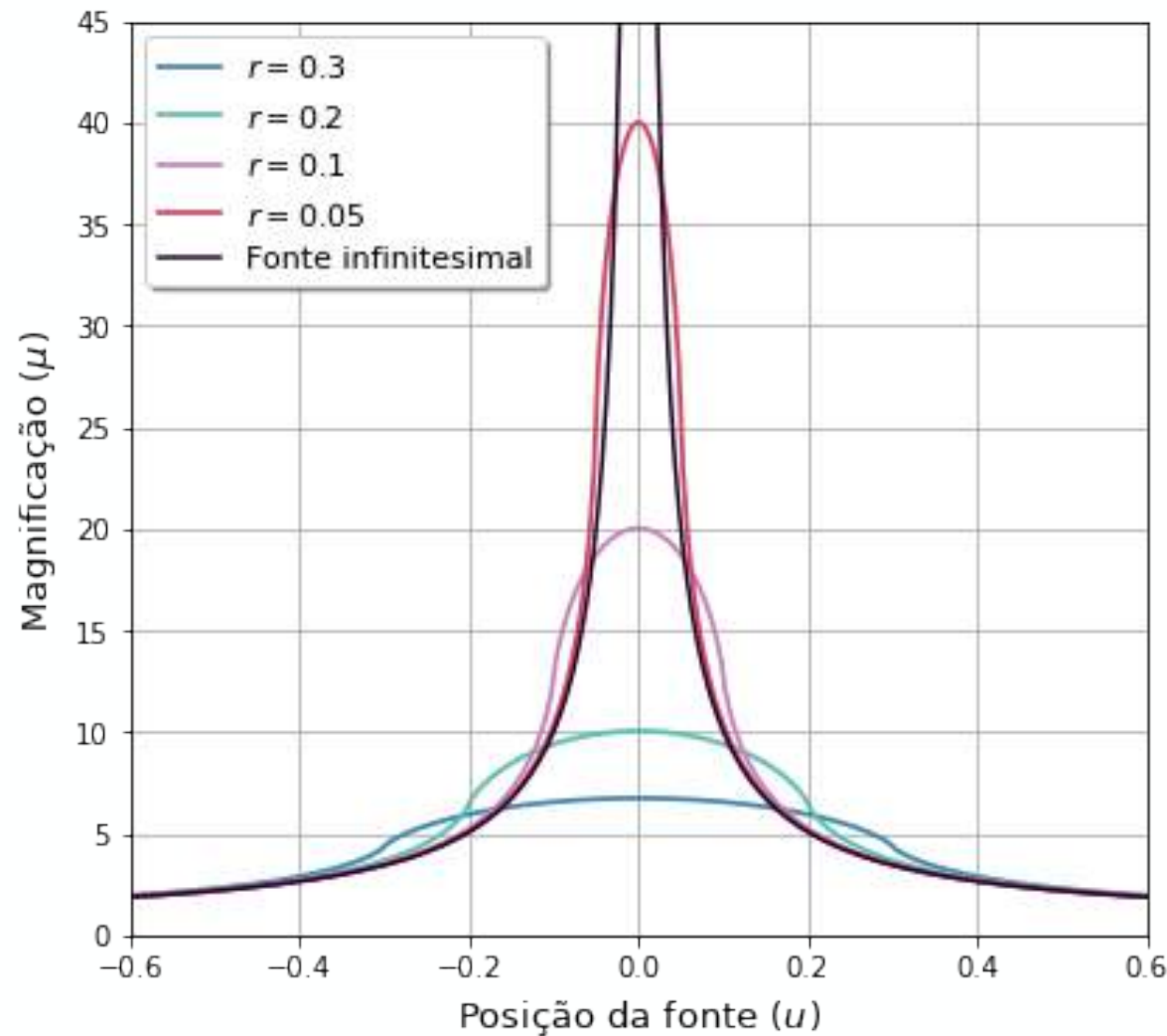
- Paralaje satelital

$$\pi_E = \frac{1}{D_{\perp}} \left(\frac{\Delta t_0}{t_E}, \Delta u_0 \right)$$

Sea como en efecto de la paralaje en una curva de luz o desde dos observatorios, se puede medir π_E !

Efecto de fuente finita

- Efecto en la curva de luz



José Pereira da Silva Neto

$$r = \frac{R}{R_E} = \frac{R}{D_{OS} \theta_E} = \frac{\theta_R}{\theta_E}$$

Si sabemos la dimensión de la fuente y su distancia, obtenemos θ_E !

Quebrar degeneraciones de *microlensing* con efectos de orden más alta

De la definición del paralaje:

$$\pi_L = \frac{D_{\perp}}{D_L}, \quad \pi_S = \frac{D_{\perp}}{D_S}, \quad \Delta\theta = \pi_{\text{rel}} = \pi_L - \pi_S$$

$$\pi_E = \frac{\pi_{\text{rel}}}{\theta_E}$$

Y del radio de Einstein: $\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}$

Tenemos

$$M = \frac{c^2}{4G} \frac{\theta_E}{\pi_E}$$

Quebrar degeneraciones

Otras formas de quebrar degeneraciones, mas allá de los datos de curvas de luz:

- medir *microlensing* astrométrico (i.e., desplazamiento del centroide)
- medidas/estimaciones de distancia (lente y/o fuente)
 - directas (paralaje! e.g. Gaia)
 - posición de la fuente (e.g. nube de Magallanes)
 - relaciones empíricas con color (o espectro) y magnitud
- medidas directas de la velocidad propia (e.g. Gaia, HST, AO)
- dimensión de la fuente: relación empírica color-brillo superficial (o con espectro)
- estimation de la masa de la lente con su luminosidad y distancia

Microlensing events from all over the sky from Gaia

Łukasz Wyrzykowski ✧ Astronomical Observatory, University of Warsaw

LUKASZ WYRZYKOWSKI - GAIA AND MICROLENSING BLACK HOLES

HOW TO FIND A GALACTIC BLACK HOLE WITH MICROLENSING?

Black hole = large mass + dark object

mass

$$M = \frac{\theta_E}{\kappa \pi_E}$$

distance

$$\pi_L = \theta_E \pi_E + \pi_S$$

flux
(luminosity)

$$F_L = F_{obs}(t) - A(t)F_S$$

HOW TO FIND A GALACTIC BLACK HOLE WITH MICROLENSING?

Black hole = large mass + dark object

mass

$$M = \frac{\theta_E}{\kappa \pi_E}$$

Photometry

Astrometry

Spectroscopy

distance

$$\pi_L = \theta_E \pi_E + \pi_S$$

flux
(luminosity)

$$F_L = F_{obs}(t) - A(t) F_S$$

HOW TO FIND A GALACTIC BLACK HOLE WITH MICROLENSING?

Black hole = large mass + dark object

mass

$$M = \frac{\theta_E}{\kappa \pi_E}$$

Photometry

Gaia, OGLE,
Spitzer, LCO,
*VRO/LSST

Astrometry

Gaia,
VLT/GRAVITY,
VLT/PIONIER,
AO, JWST,
*ELT,
*RST/WFIRST

Spectroscopy

Gaia, VLT,
Gemini,
SOAR, SALT,
*ELT

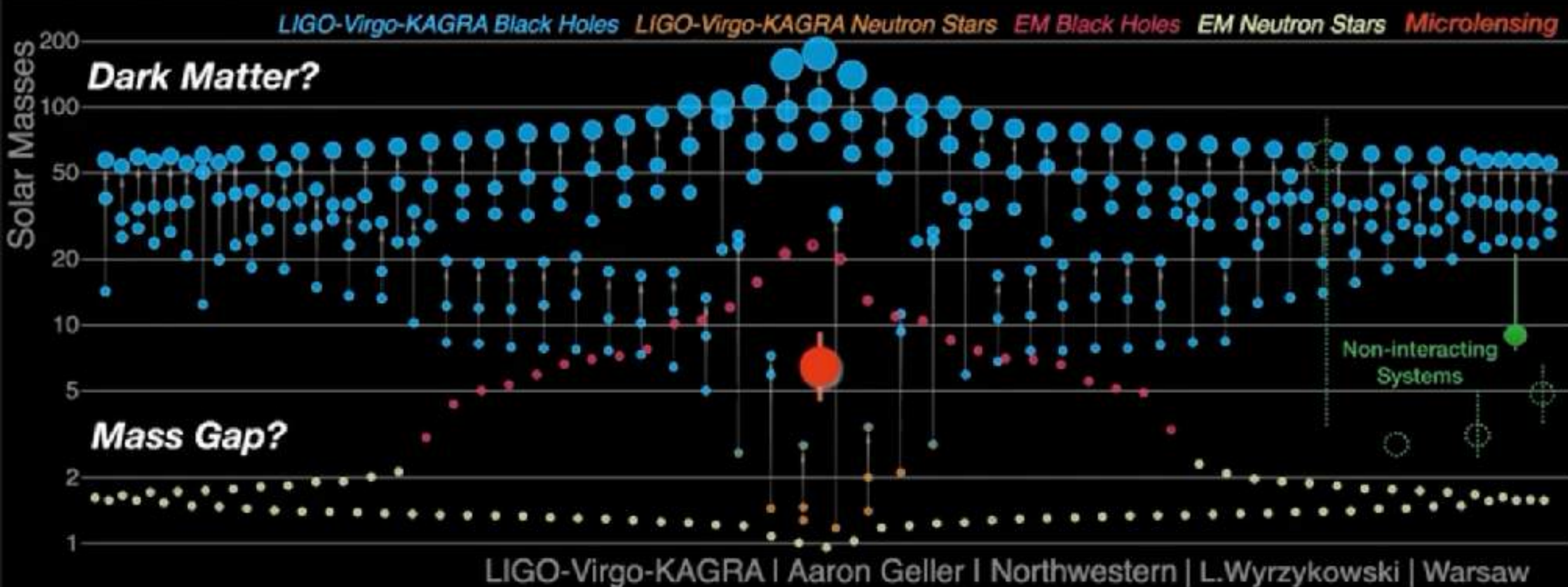
distance

$$\pi_L = \theta_E \pi_E + \pi_S$$

flux
(luminosity)

$$F_L = F_{obs}(t) - A(t) F_S$$

MASSES OF BLACK HOLES AND NEUTRON STARS



Abbott+2021

Thompson et al. 2019, Liu+2020, Shenar+2022

Sahu+2022

Corral Santana+2016

Rivinius+2020, Jayasinghe+2021

Lam+2022, Mróz+2022

Ejemplo:

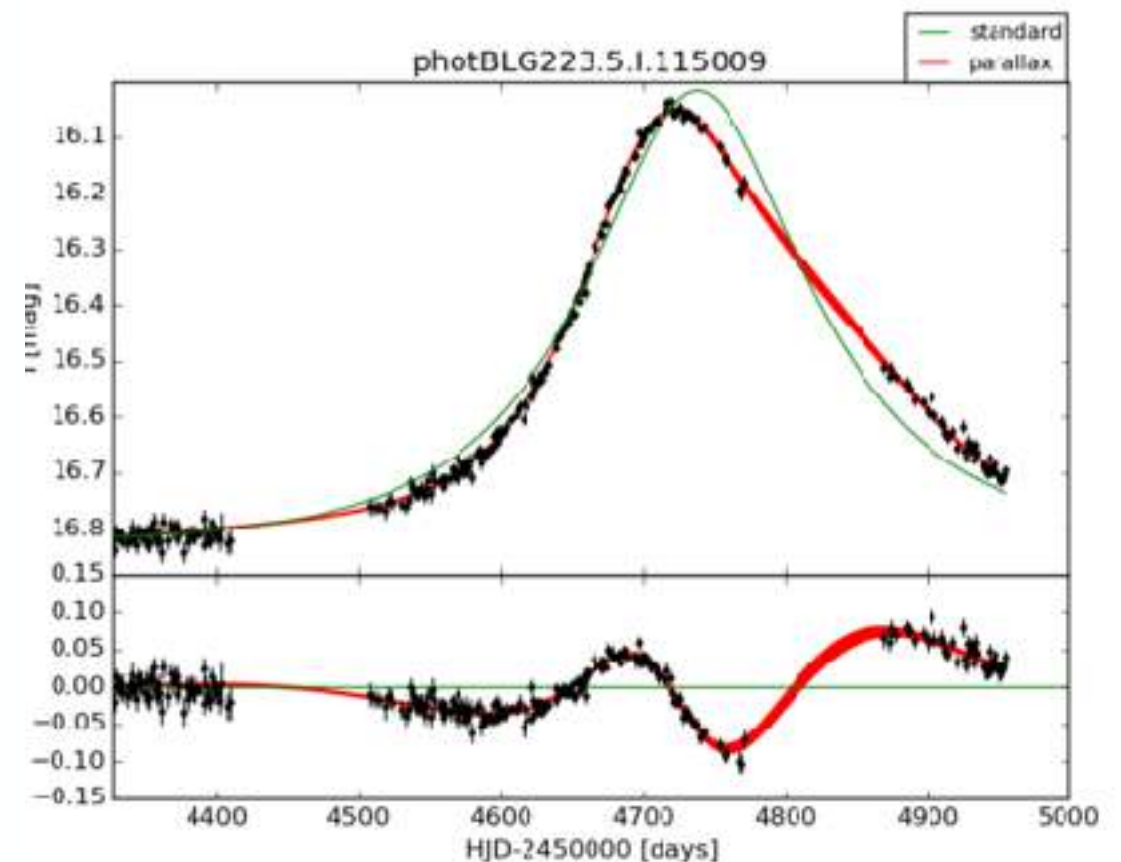
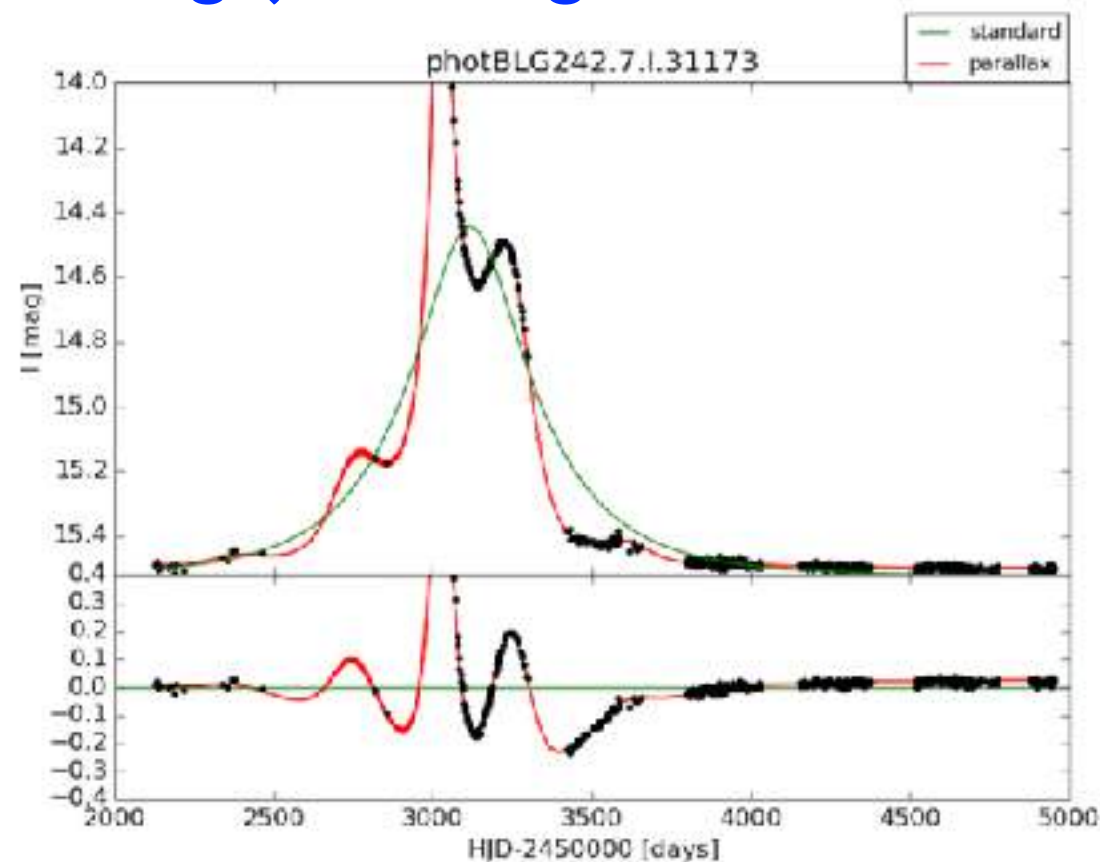
Constraining the masses of microlensing black holes and the mass gap with Gaia DR2

arXiv:1904.07789

Łukasz Wyrzykowski^{1,*} and Ilya Mandel^{2,3,4}

Masas para eventos en que no se detecta la luz de la lente:

- dirección del bulbo con paralaje bien medido con OGLE-III
- medidas directas de la distancia de la fuente y del movimiento propio con Gaia
- 18 eventos con esa combinación, con bajo *blending*
- 8 candidatos en el *mass gap* entre estrellas de neutrones y agujeros negros



A wide-angle photograph of a beach with turquoise water and a clear blue sky. The text is overlaid in the center.

LENTES COMPUESTAS: EXOPLANETAS Y MICROLENTE DE CUASARES

Microensing por lente compuesta

- Ecuación de la lente puntual $\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$

- Ecuación de la lente binaria

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \mu_A(\vec{\theta} - \vec{\theta}_A) \frac{\theta_E^2}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_A|^2} - \mu_B(\vec{\theta} - \vec{\theta}_B) \frac{\theta_E^2}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_B|^2}$$

$$\mu_i = \frac{M_i}{M_1 + M_2} \quad \theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}$$

θ_E : radio (angulo) de Einstein calculado usando la masa total $M_1 + M_2$

Mapeo de lentes

► mapeo imagen $\rightarrow$ fuente

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

► plano único

► autovalores:

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \kappa + \gamma}, \mu_2 = \frac{1}{1 - \kappa - \gamma}$$

► magnificación local y razón axial:

$$\mu = \mu_1 \mu_2$$

$$r = \left| \frac{\mu_1}{\mu_2} \right|$$

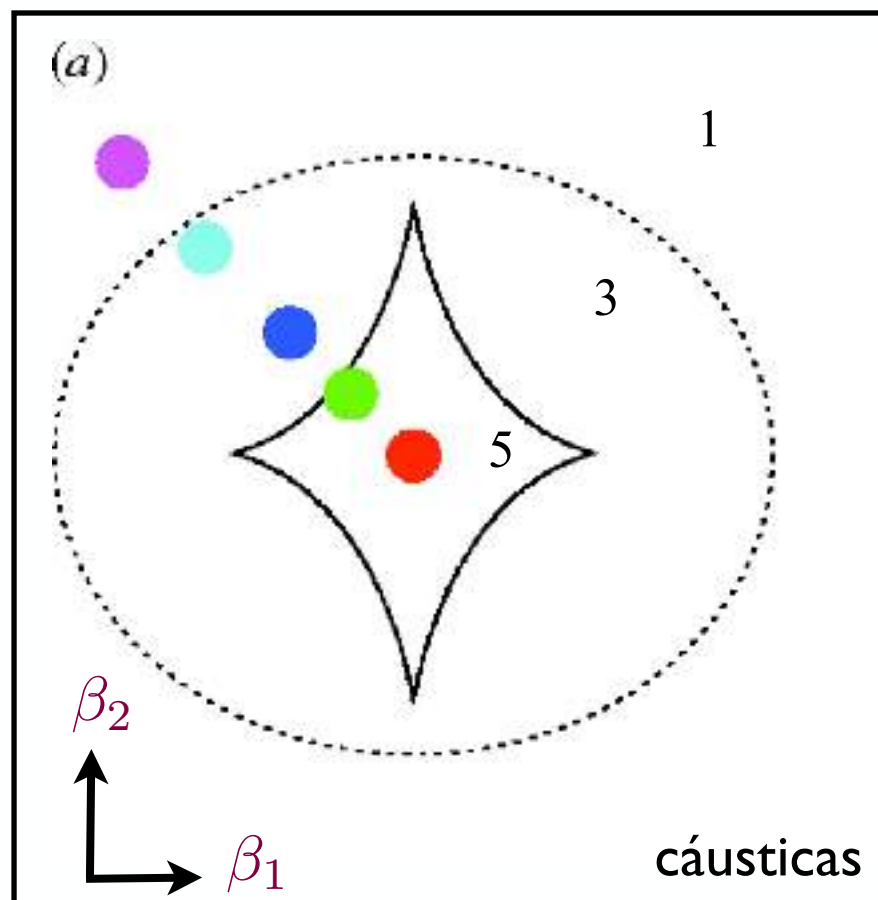
Cáusticas y curvas críticas

► mapeo imagen $\rightarrow$ fuente

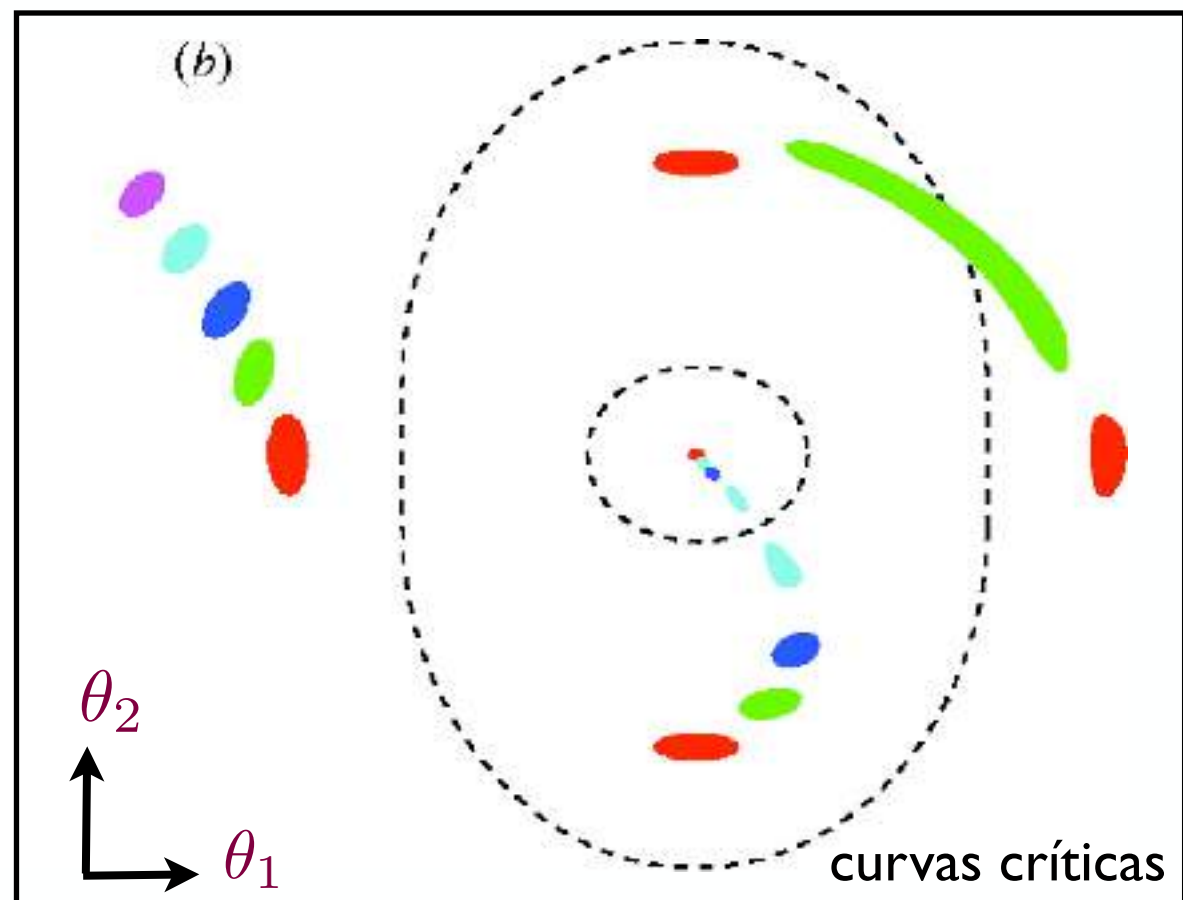
$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

► autovalores:

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \kappa + \gamma}, \mu_2 = \frac{1}{1 - \kappa - \gamma}$$



Plano de las fuentes



plano de la lente/imágenes

Los números en el plano de las fuentes indican la multiplicidad de las imágenes

Microlensing por lente compuesta

- Ecuación de la lente

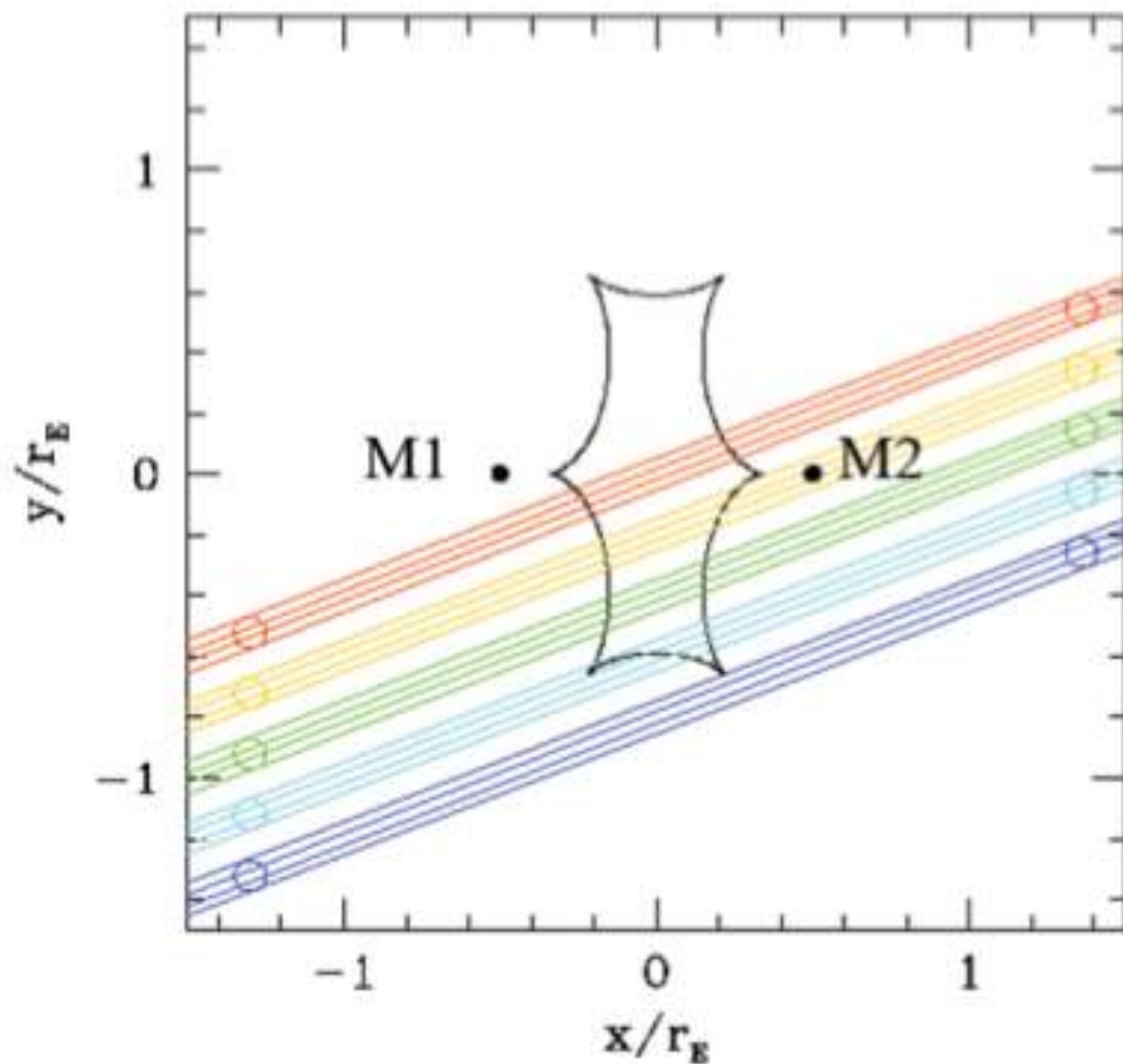
$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \mu_A(\vec{\theta} - \vec{\theta}_A) \frac{\theta_E^2}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_A|^2} - \mu_B(\vec{\theta} - \vec{\theta}_B) \frac{\theta_E^2}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_B|^2}$$

$$\mu_i = \frac{M_i}{M_1 + M_2}$$

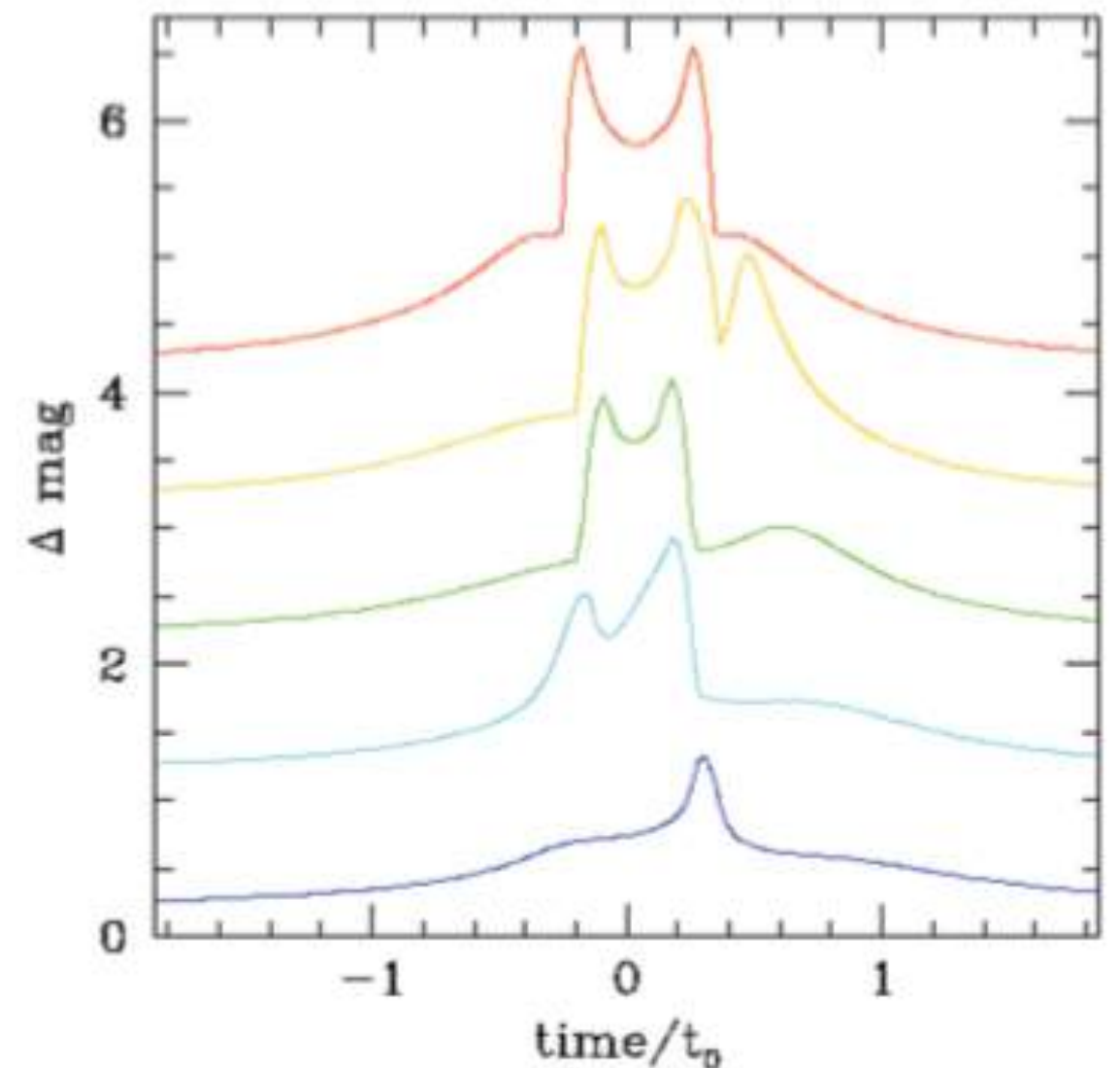
θ_E : radio (angulo) de Einstein calculado usando la masa total $M_1 + M_2$

Micro lente por lente compuesta

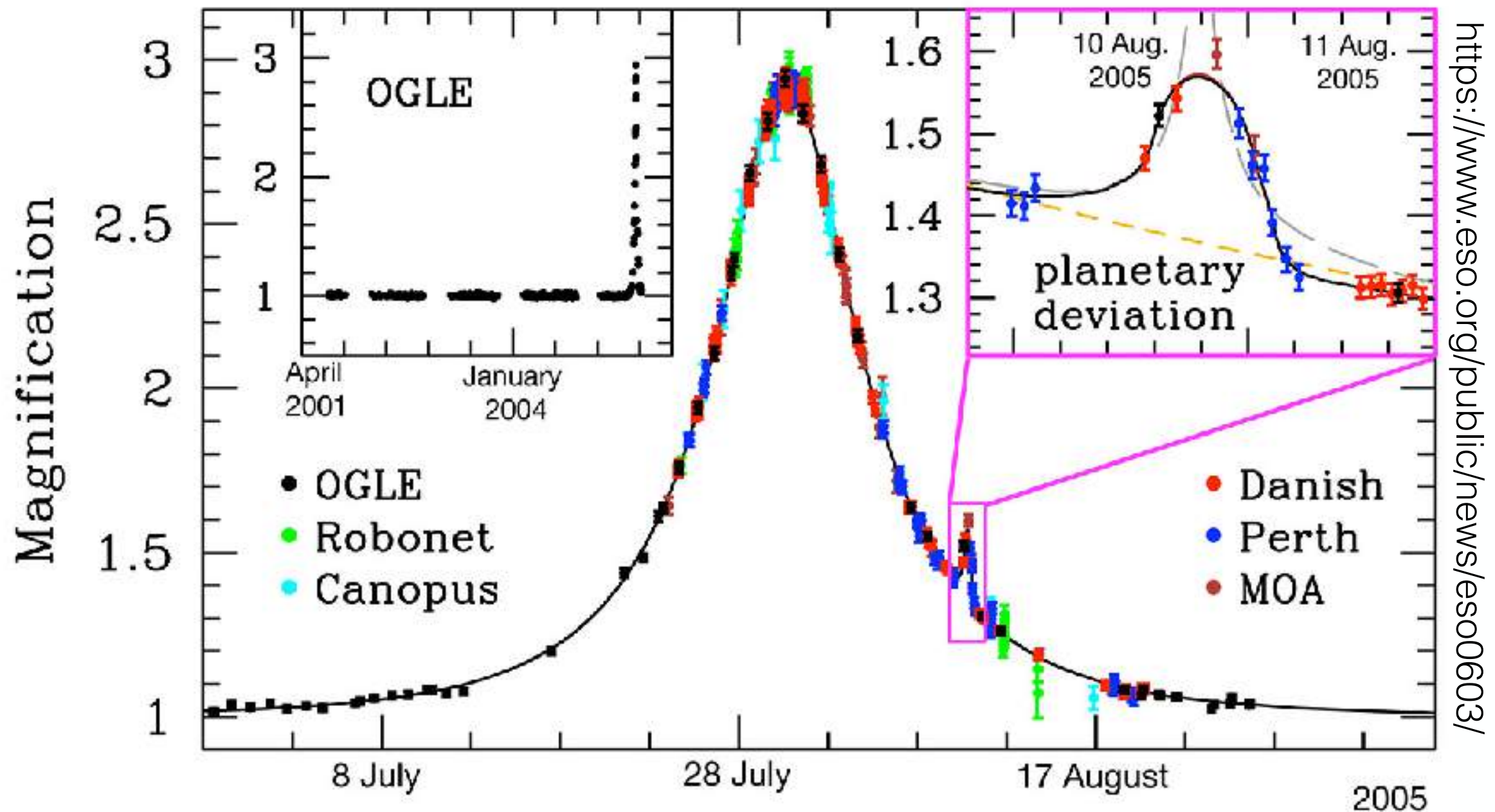
- Estructura de la cáustica



- Curvas de luz



Exoplanetas



<https://www.eso.org/public/news/eso0603/>

<http://exoplanet.eu/catalog/>

- más de 300 exoplanetas descubiertos
- Anomalías planetarias características
- Necesitan cadencia mayor

$$t_E \equiv D_d \theta_E / v_{\perp}$$

Romper degeneraciones
con otros observables

Lentes binárias

- Ecuación de la lente binária

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \mu_A(\vec{\theta} - \vec{\theta}_A) \frac{\theta_E^2}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_A|^2} - \mu_B(\vec{\theta} - \vec{\theta}_B) \frac{\theta_E^2}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_B|^2}$$

En el formalismo complejo y coordenadas adimensionales

$$y = x - \frac{\mu_A}{\bar{x} - \bar{x}_A} - \frac{\mu_B}{\bar{x} - \bar{x}_B}$$

$$q := \mu_A / \mu_B$$

$$d := |x_A - x_B| = 2|x_A|$$

- Para un planeta como Júpiter: $q = 0.001$
- Para un planeta como la Tierra: $q = 0.000003$

Lentes binárias

- Ecuación de la lente binária

$$y = x - \frac{\mu_A}{\bar{x} - \bar{x}_A} - \frac{\mu_B}{\bar{x} - \bar{x}_B}$$

$$q := \mu_A / \mu_B$$

$$d := |x_A - x_B| = 2|x_A|$$

- Cáusticas y curvas críticas:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix} = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \right|^2 = 0$$

BINARY LENSES

➤ Lens equation:

$$z_s = z - \frac{m_1}{z^* - z_1^*} - \frac{m_2}{z^* - z_2^*}$$

➤ determinant of the Jacobian:

$$\det A = 1 - \left| \frac{\partial z_s}{\partial z^*} \right|^2$$

$$\frac{\partial z_s}{\partial z^*} = \frac{m_1}{(z^* - z_1^*)^2} + \frac{m_2}{(z^* - z_2^*)^2}$$

➤ condition for critical points:

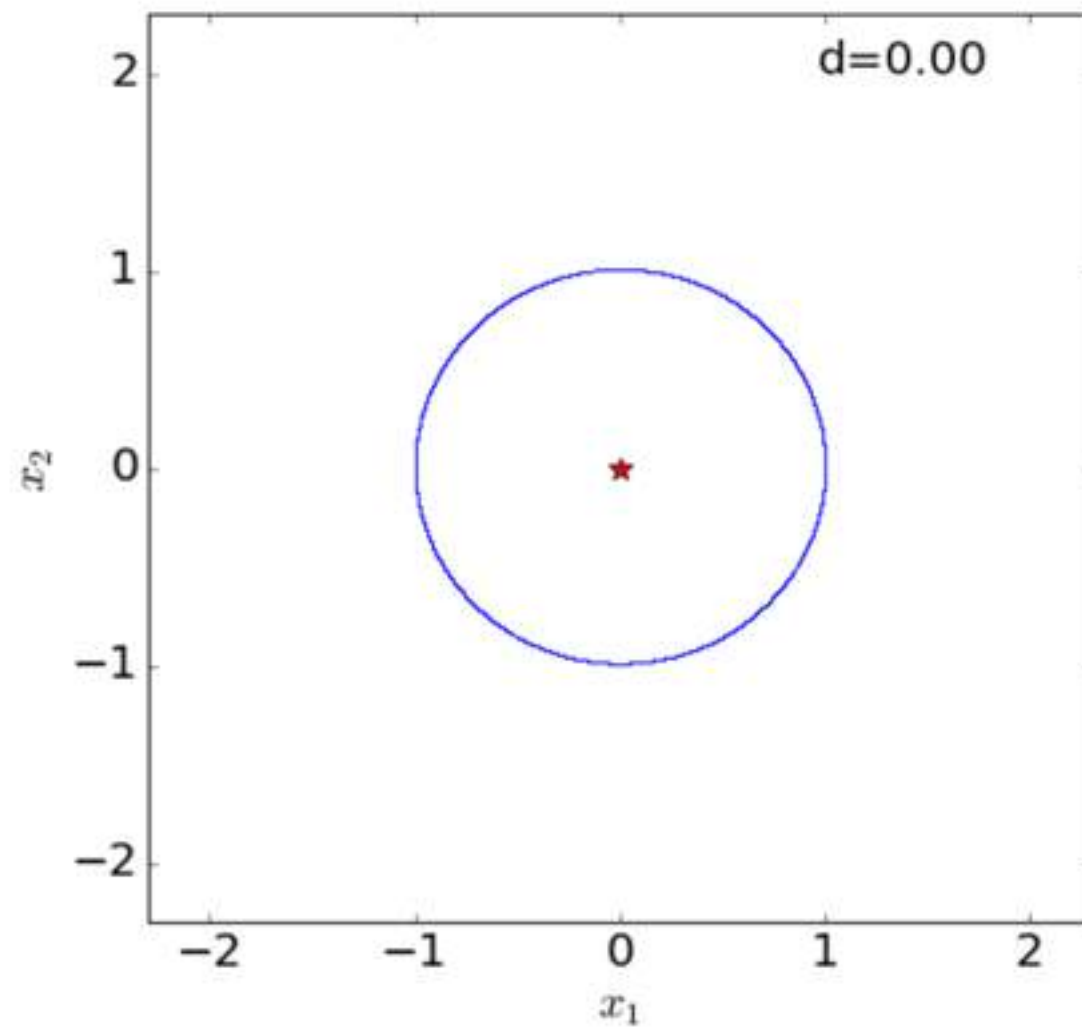
$$\frac{\partial z_s}{\partial z^*} = e^{i\phi}$$

➤ resulting fourth grade polynomial:

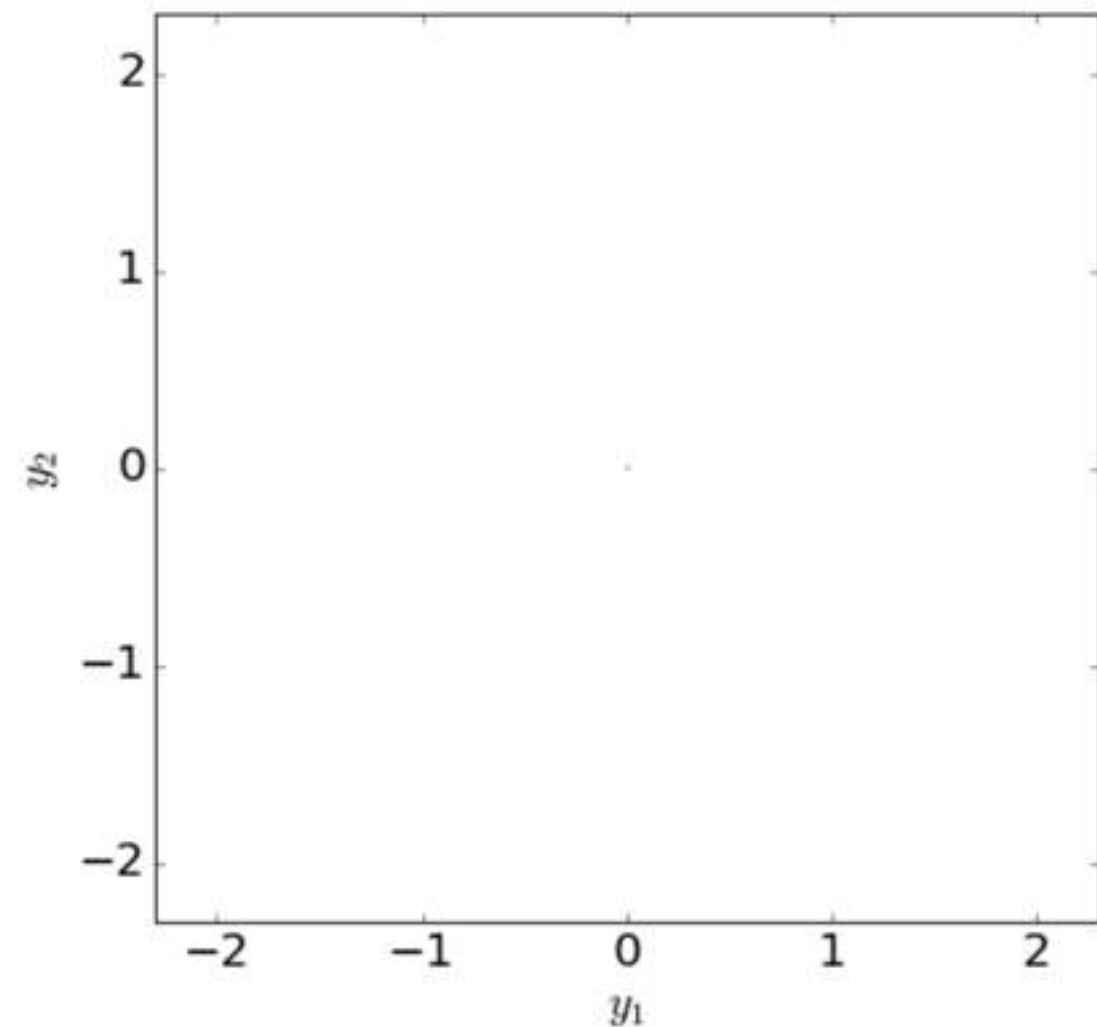
$$z^4 - z^2(2z_1^{*2} + e^{i\phi}) - zz_1^*2(m_1 - m_2)e^{i\phi} + z_1^{*2}(z_1^{*2} - e^{i\phi}) = 0$$

BINARY LENSES:

TWO LENSES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE

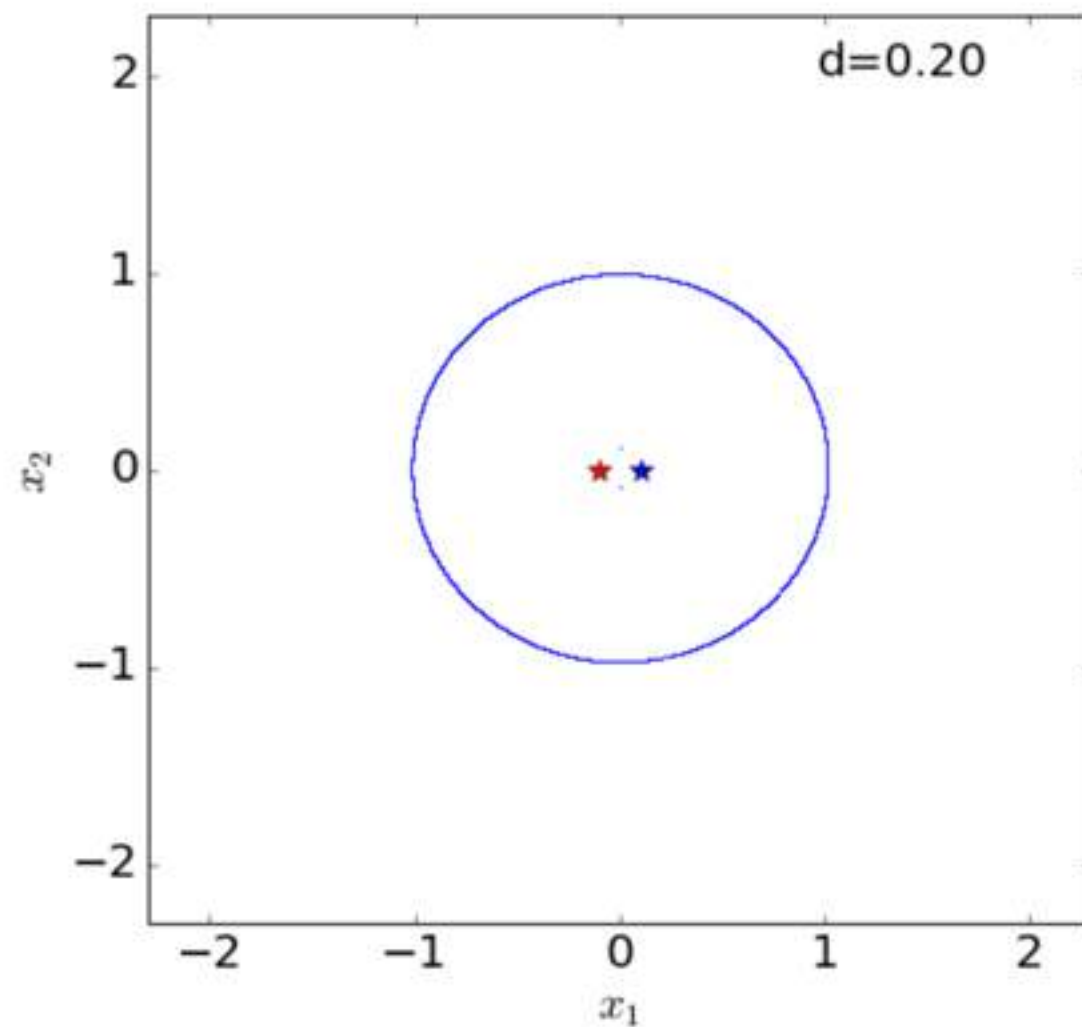


critical lines

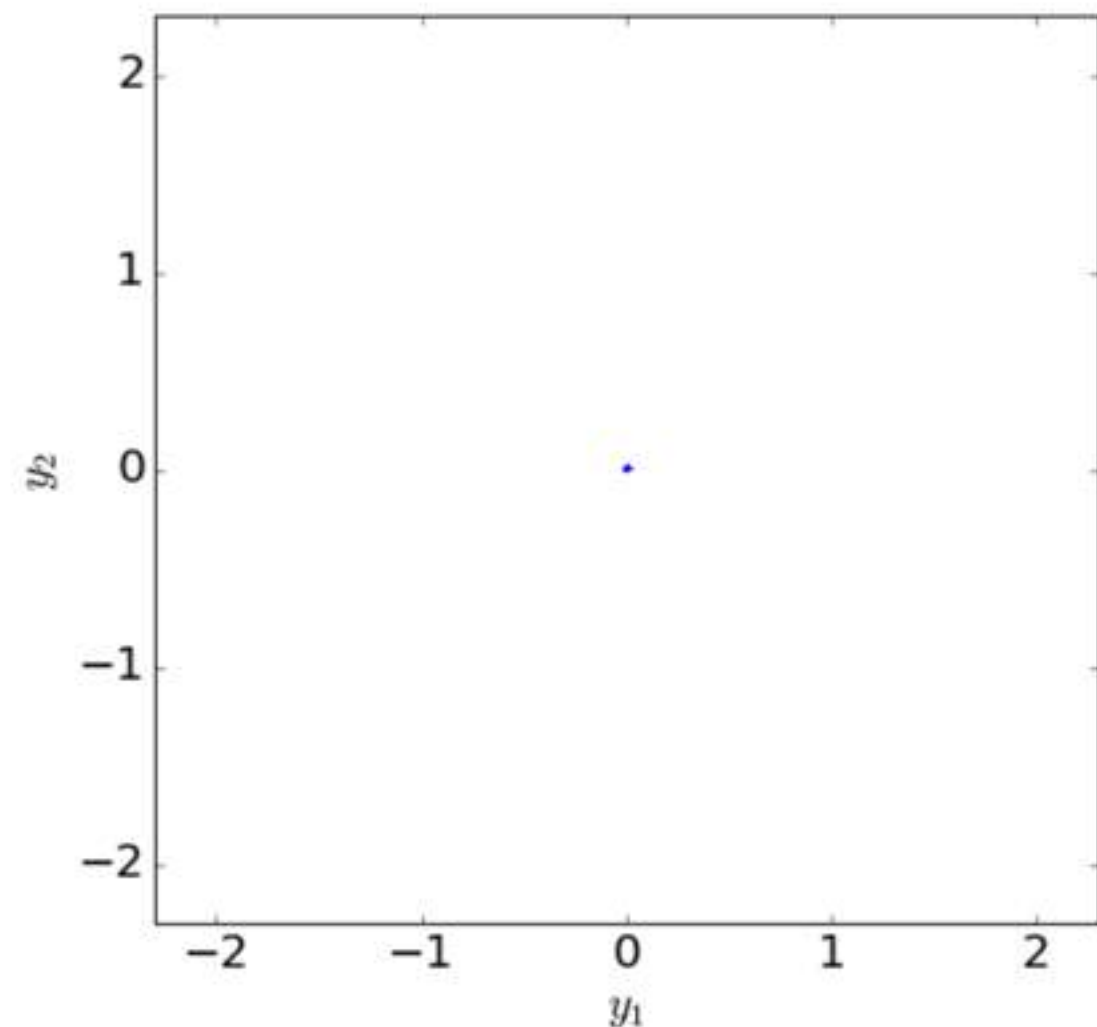


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



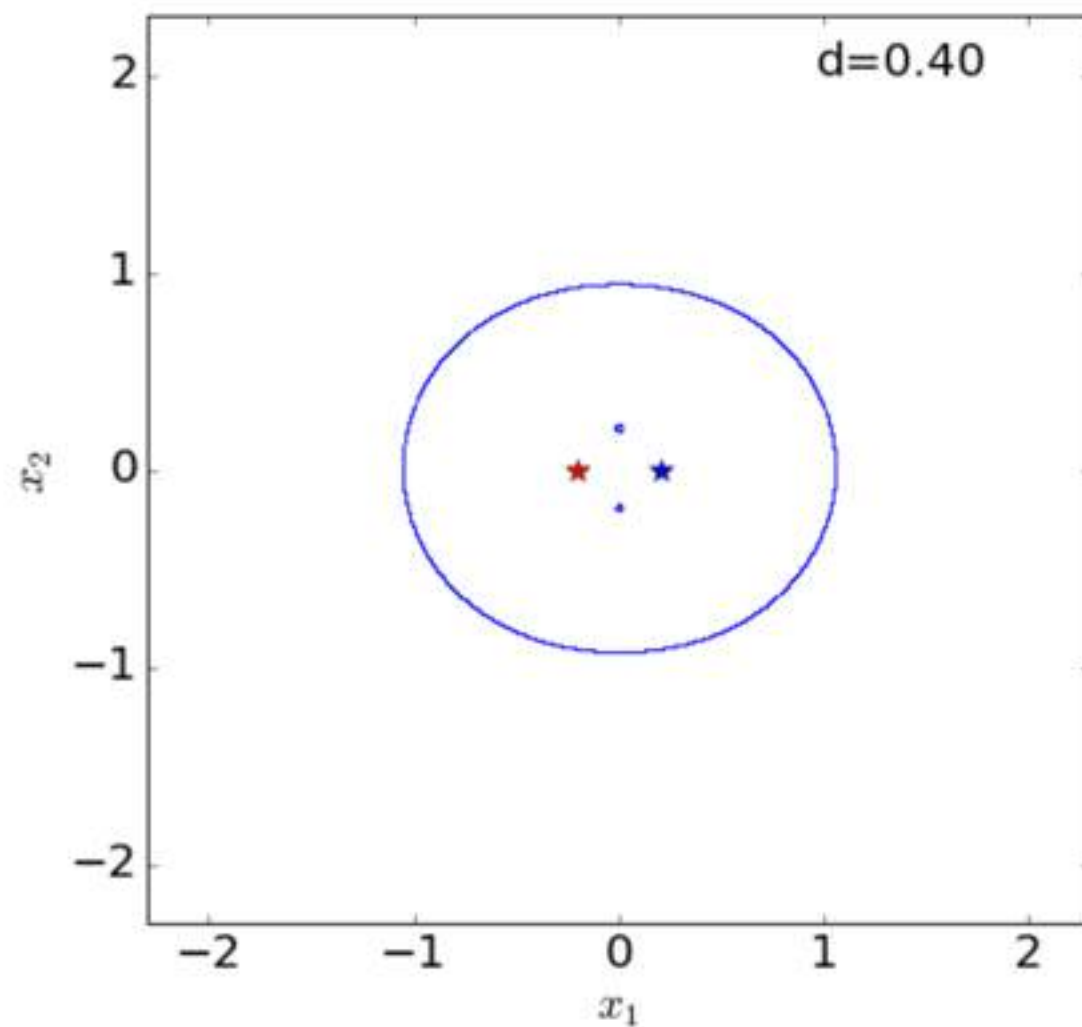
critical lines



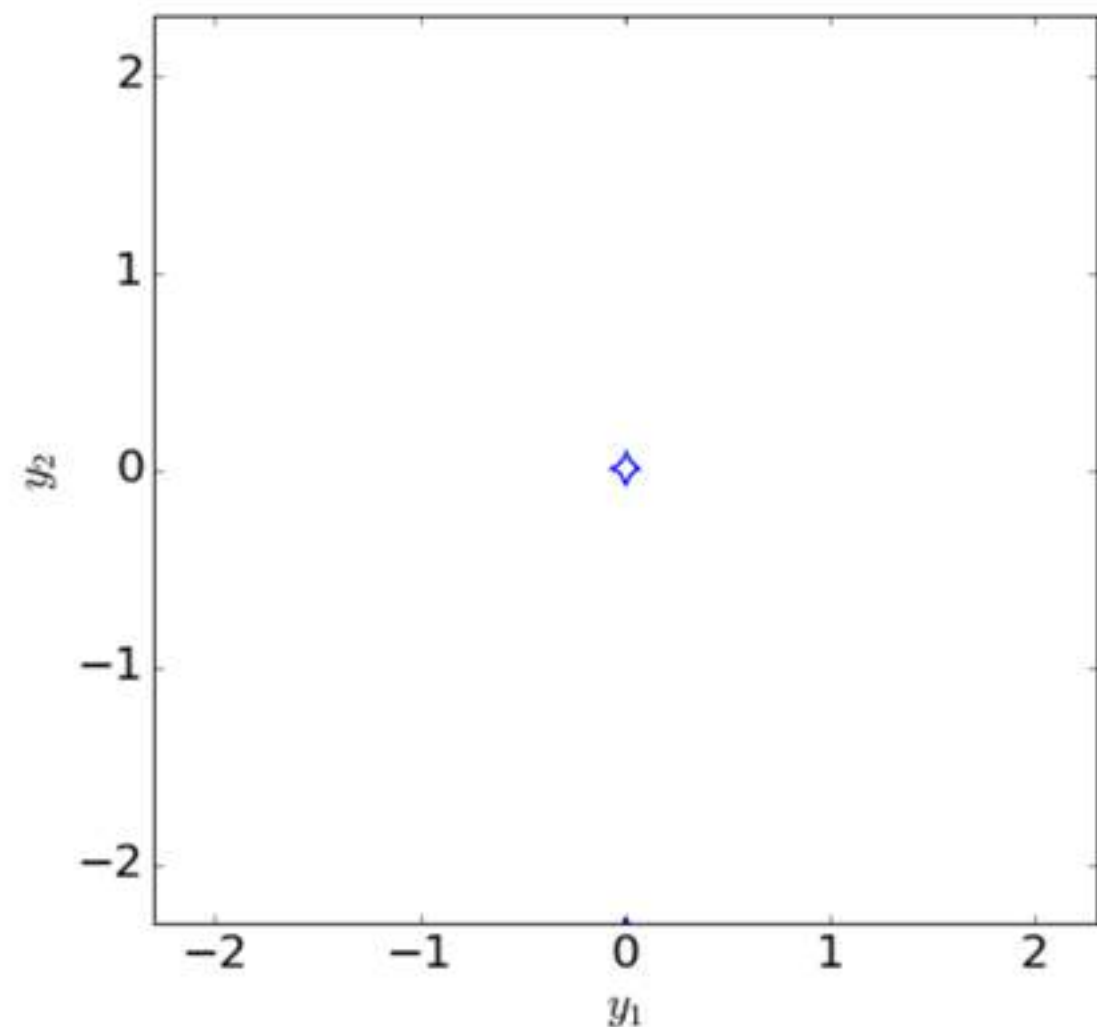
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSEES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



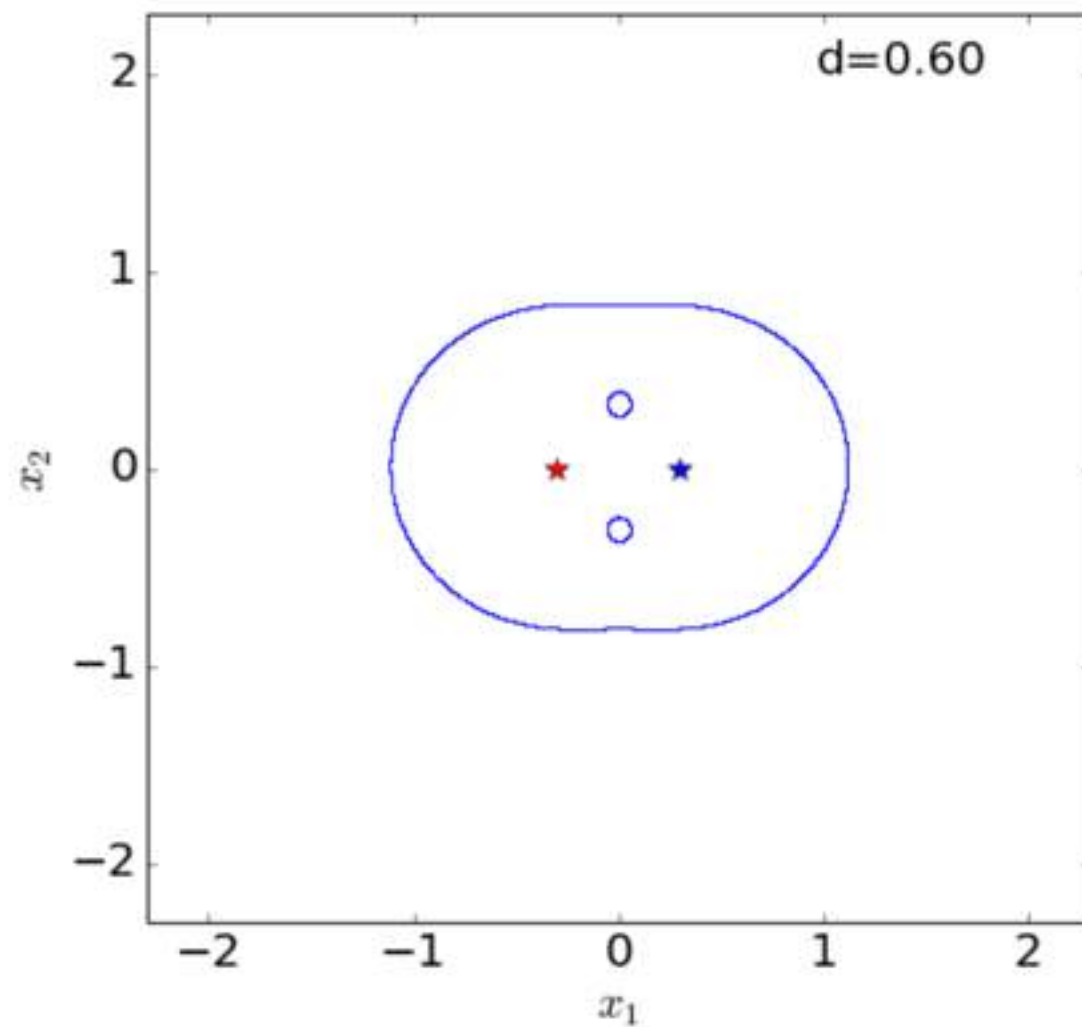
critical lines



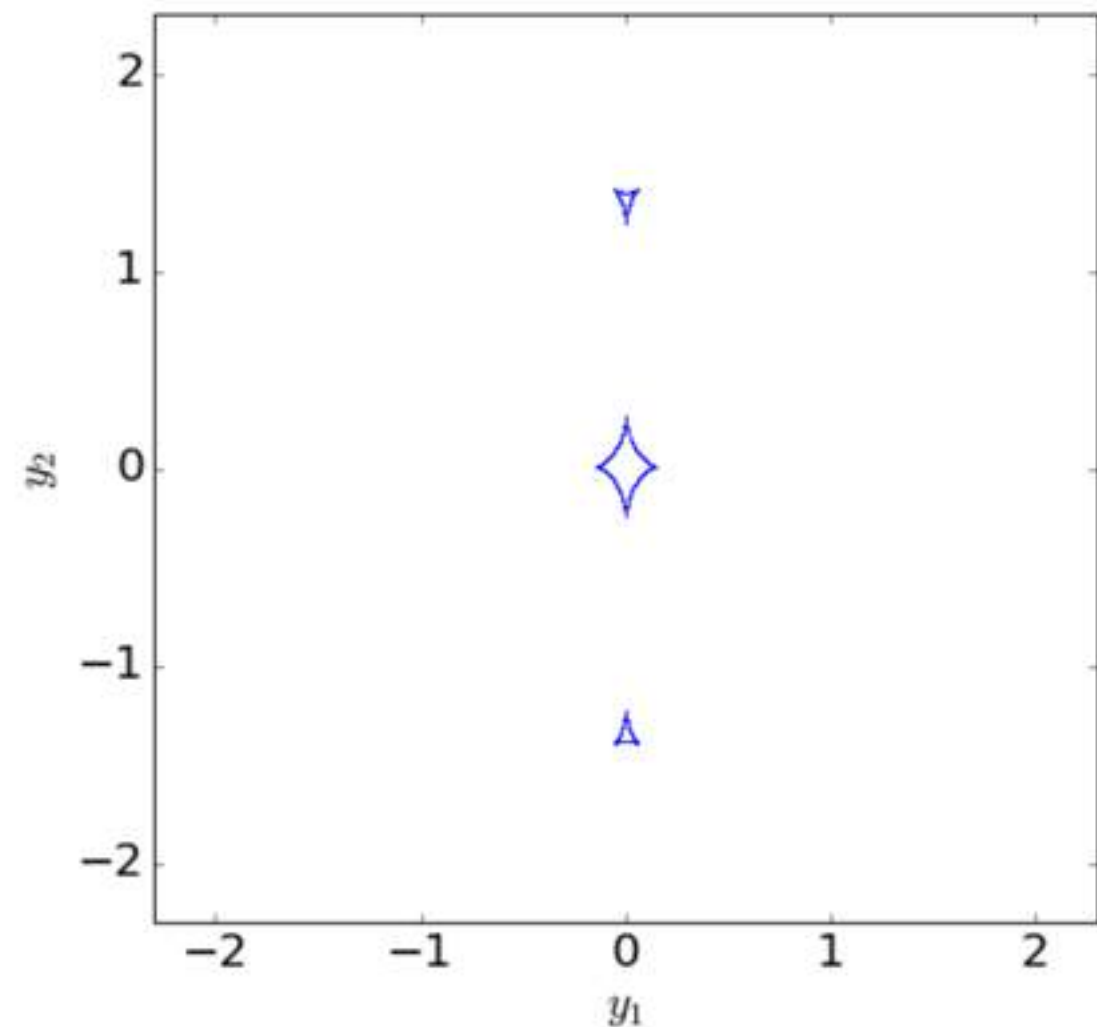
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



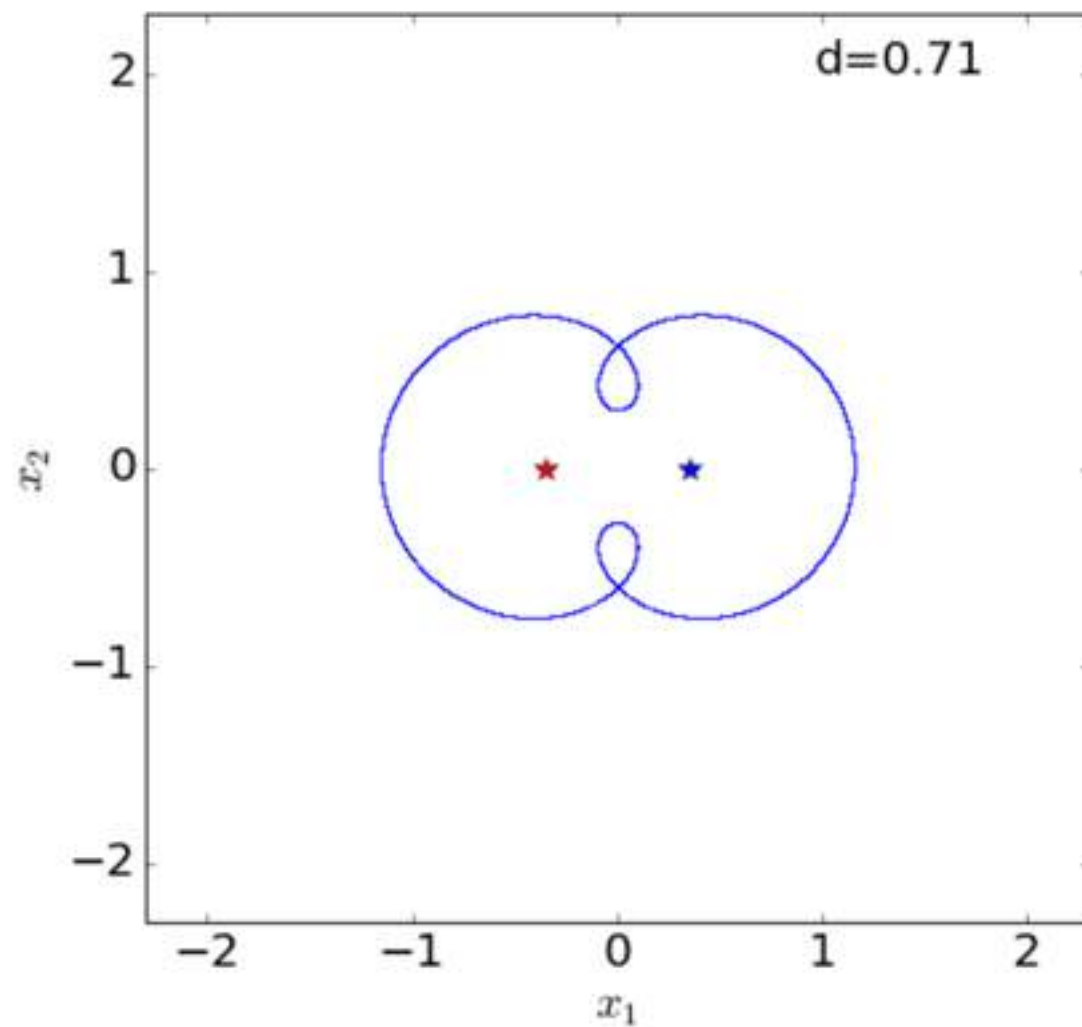
critical lines



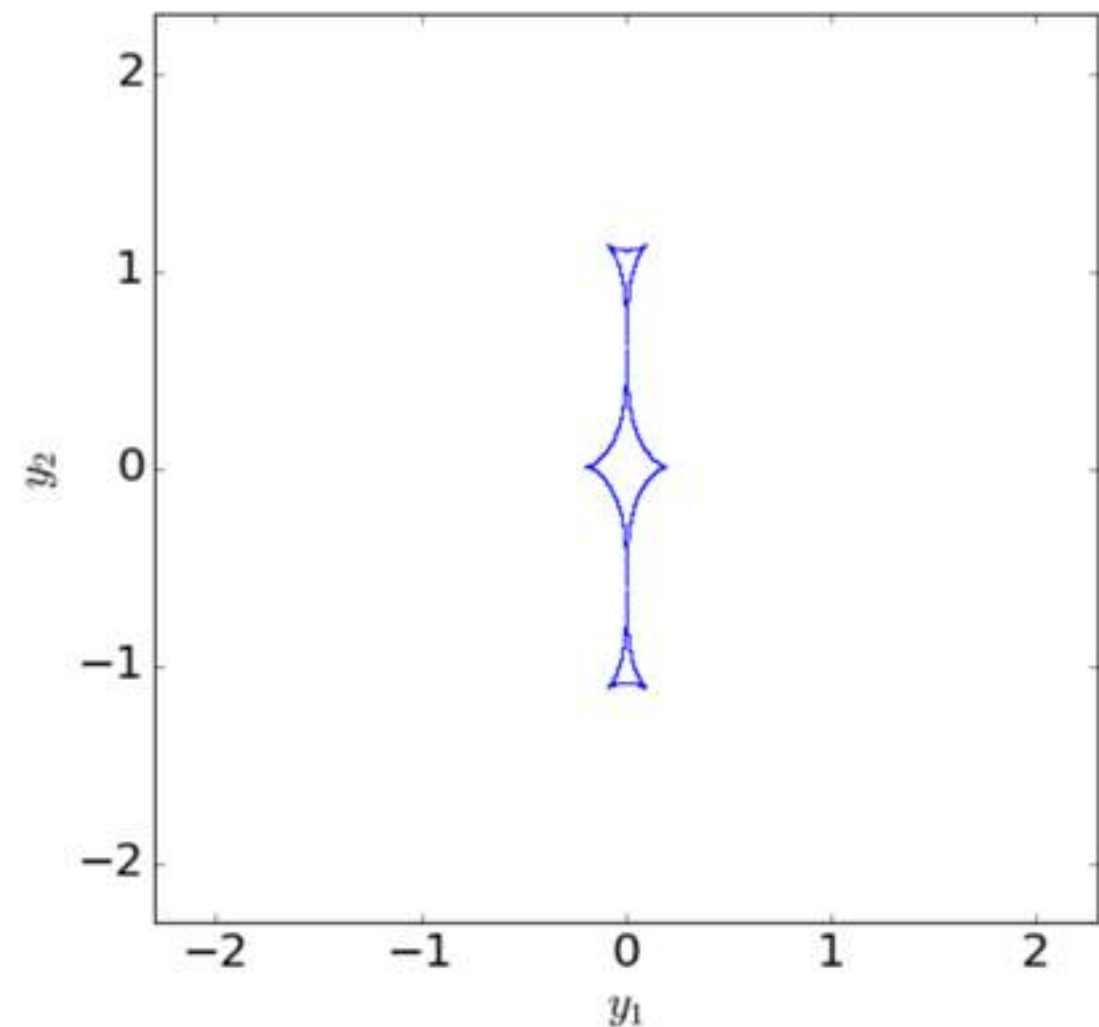
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



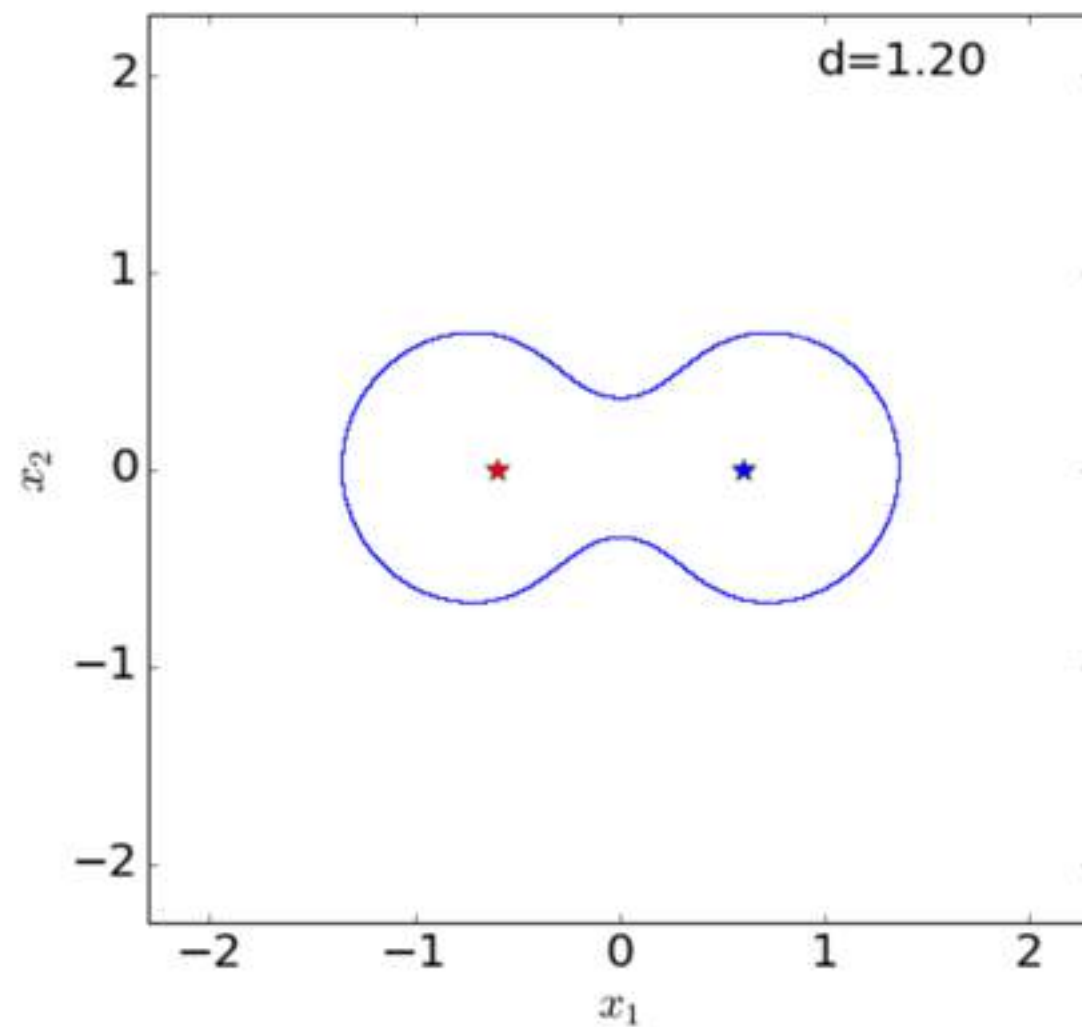
critical lines



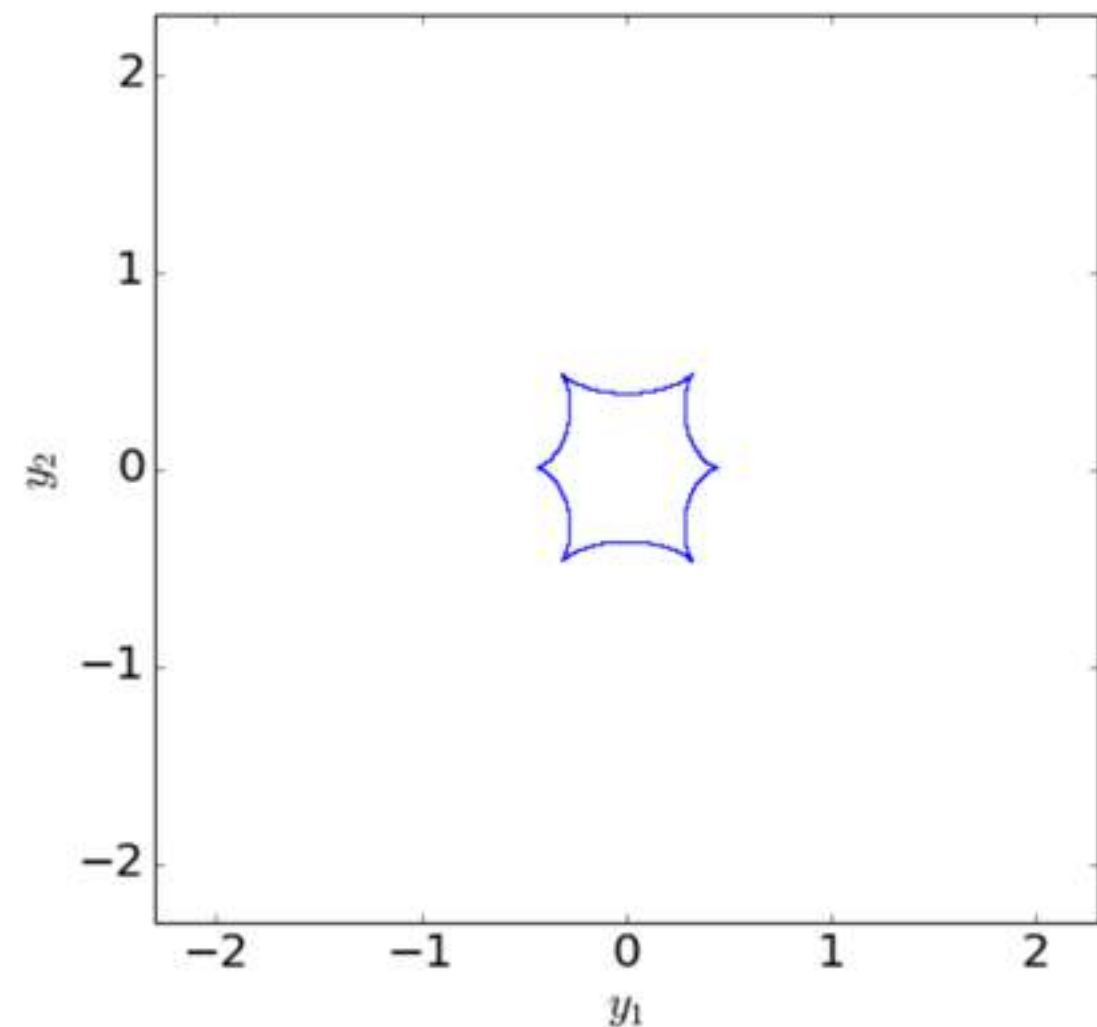
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSEES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



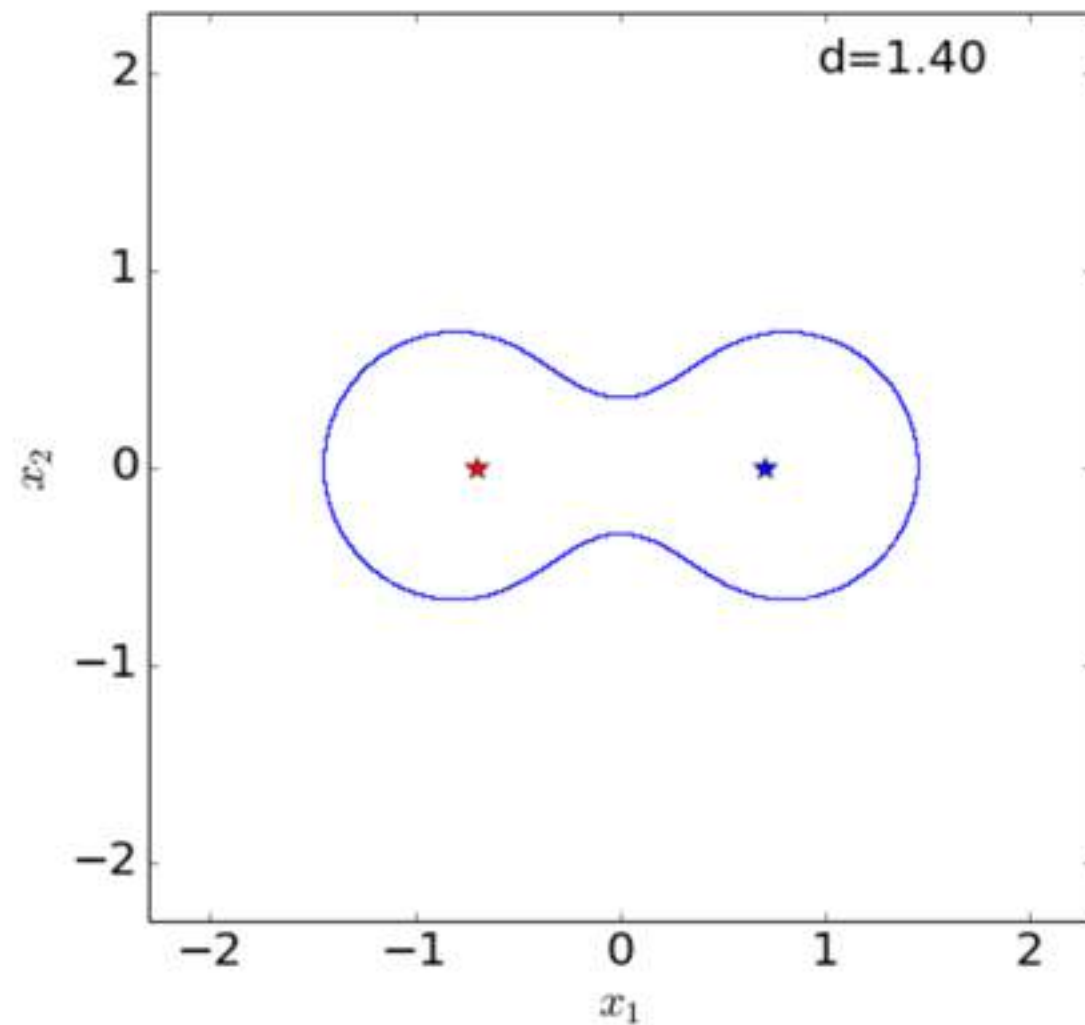
critical lines



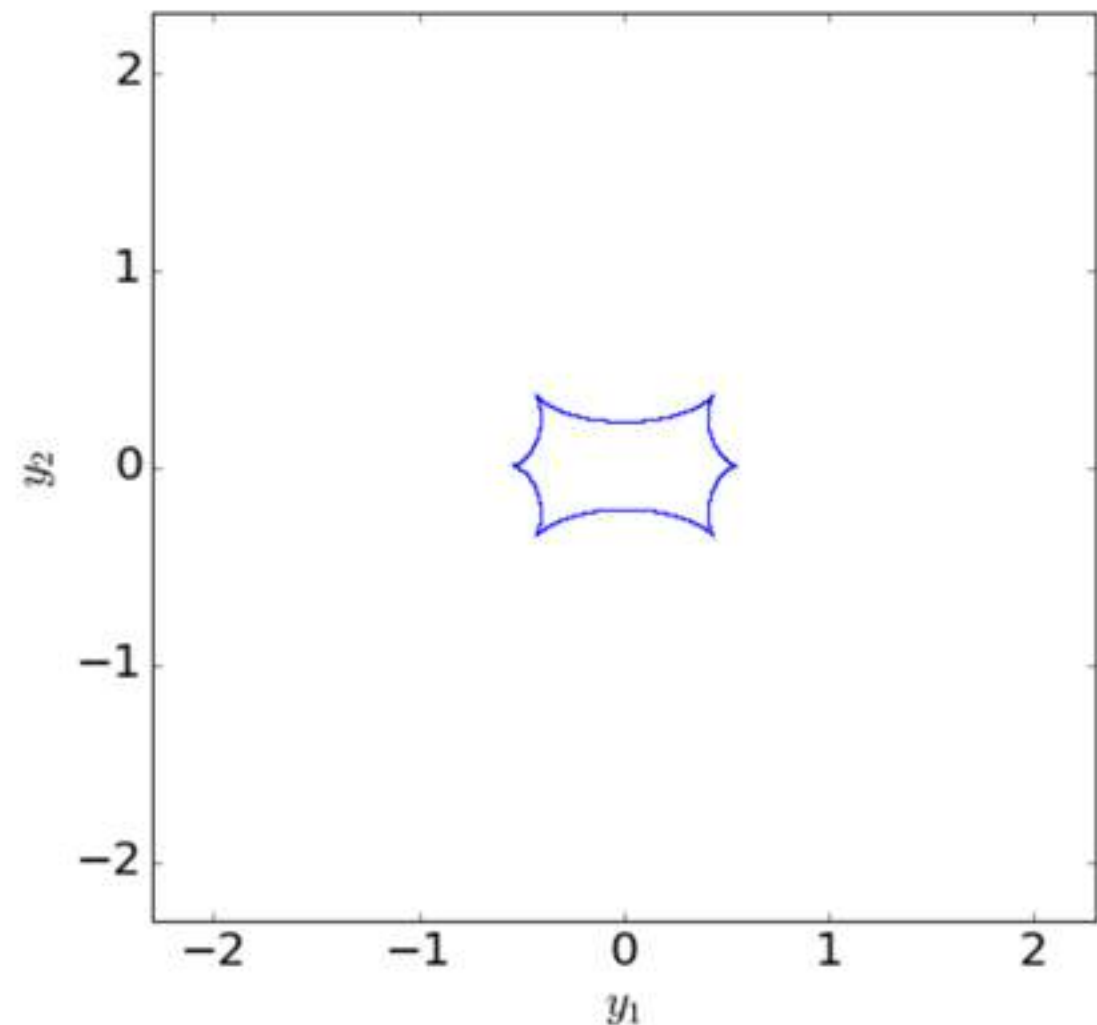
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSEES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



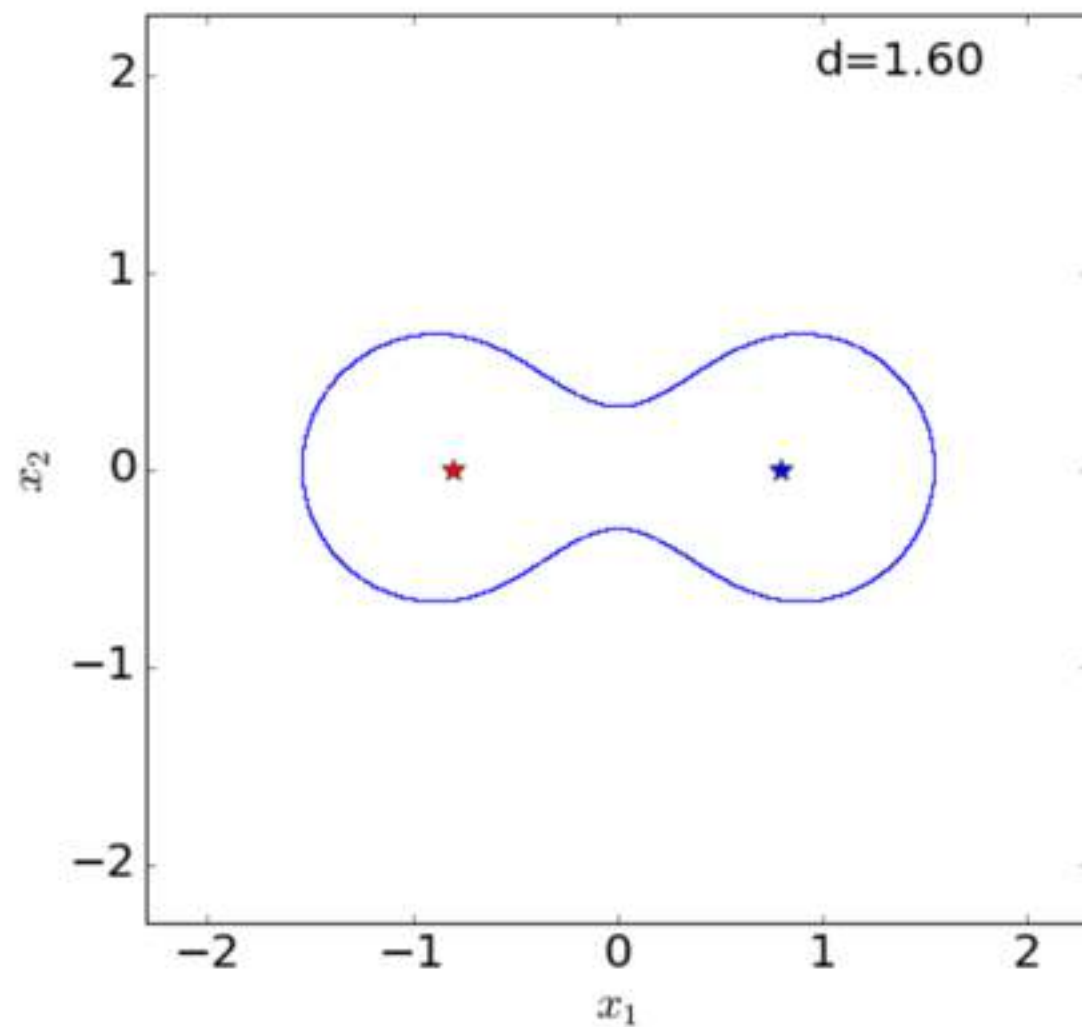
critical lines



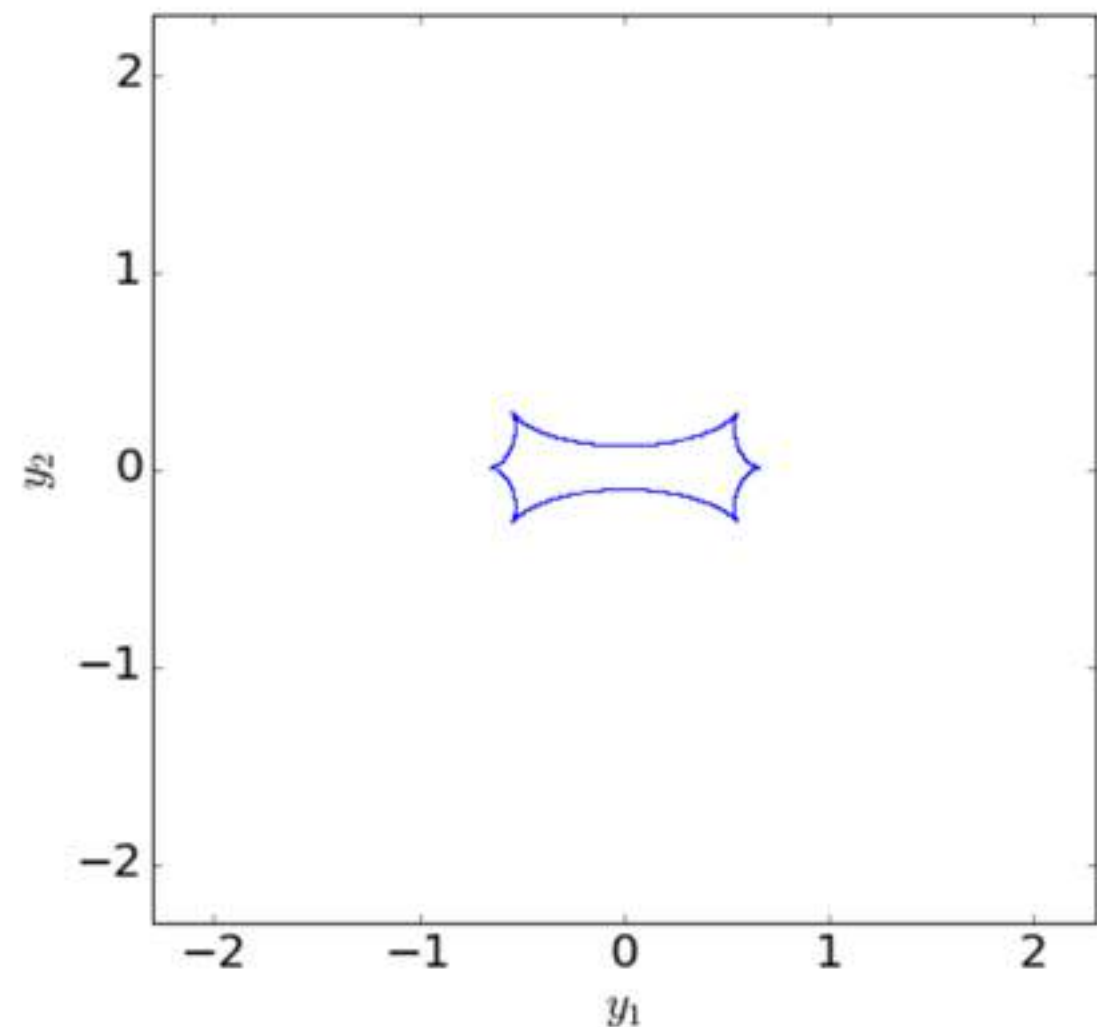
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



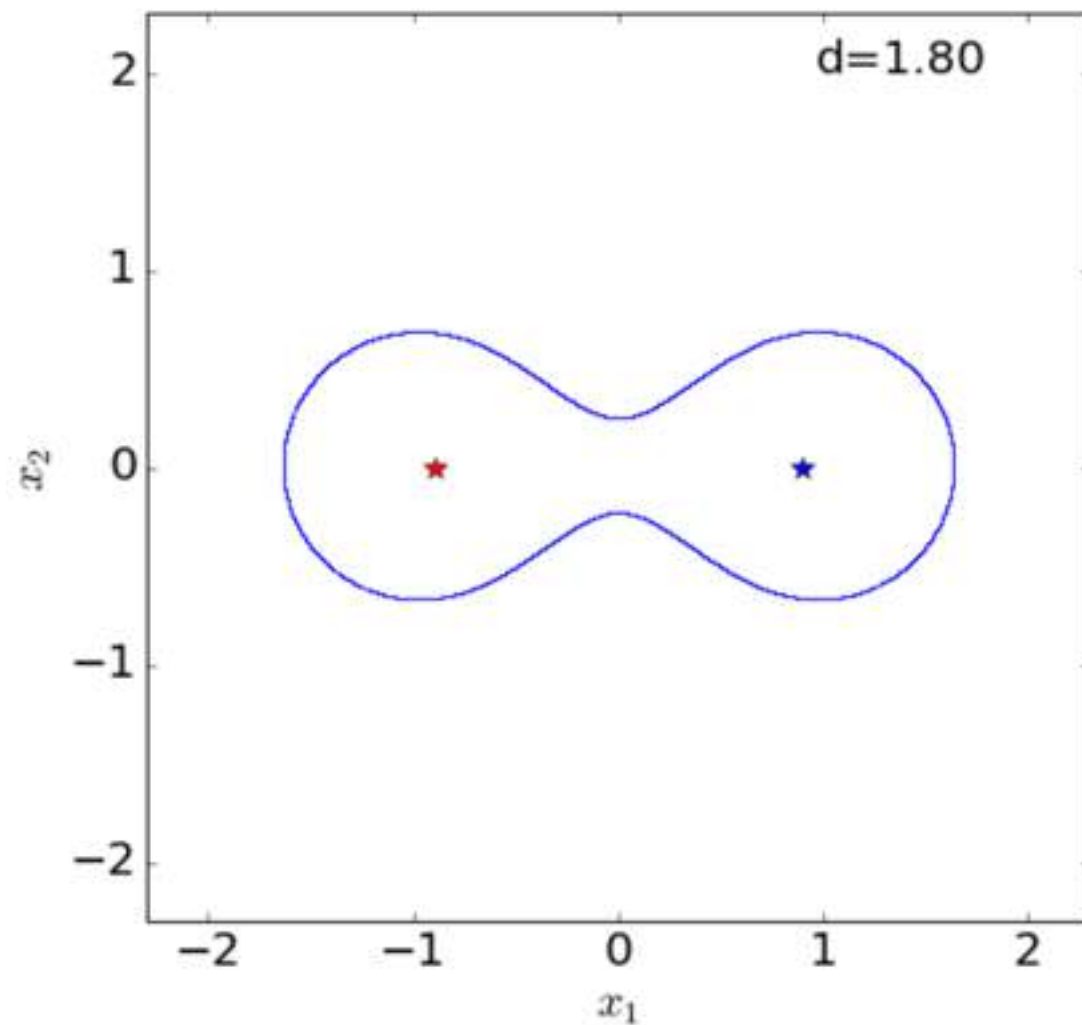
critical lines



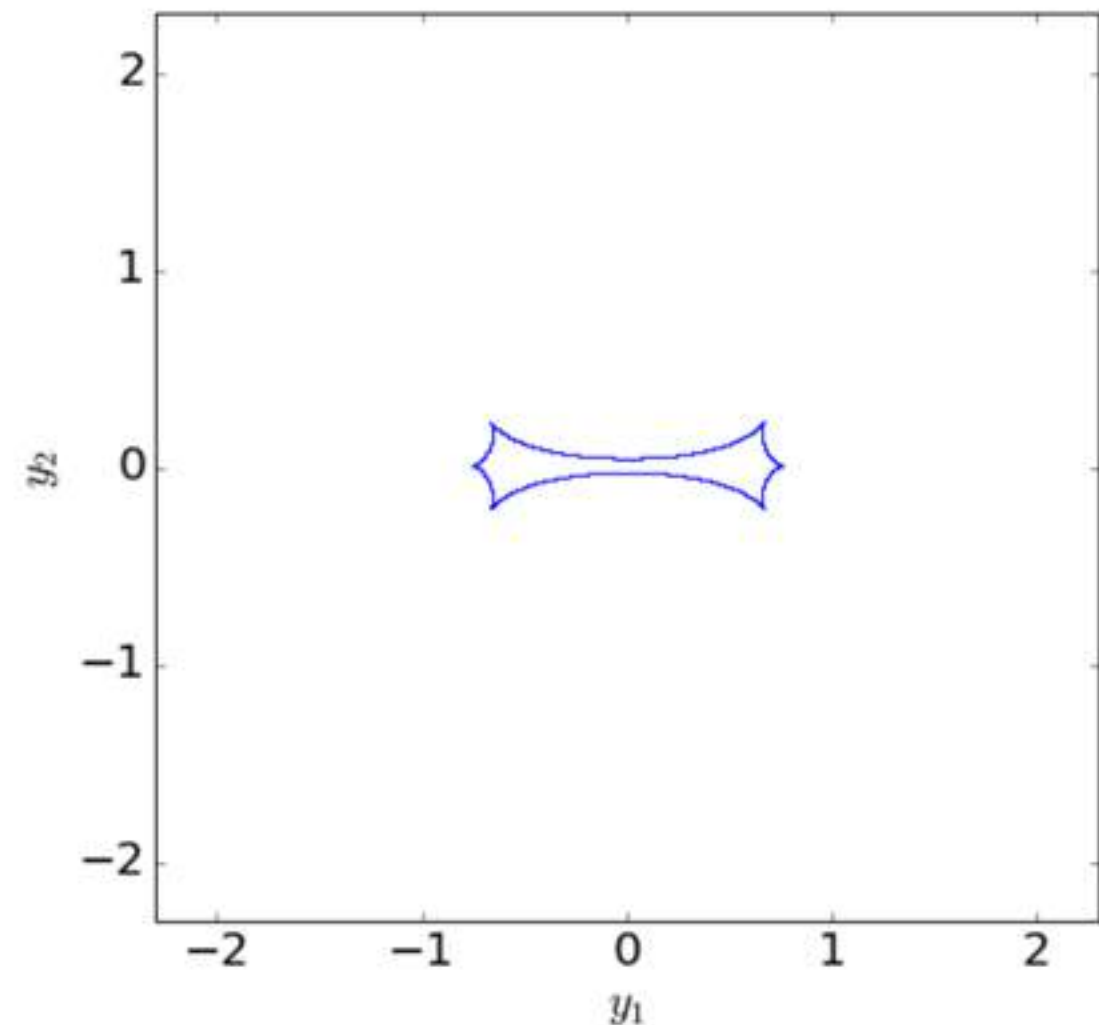
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSEES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



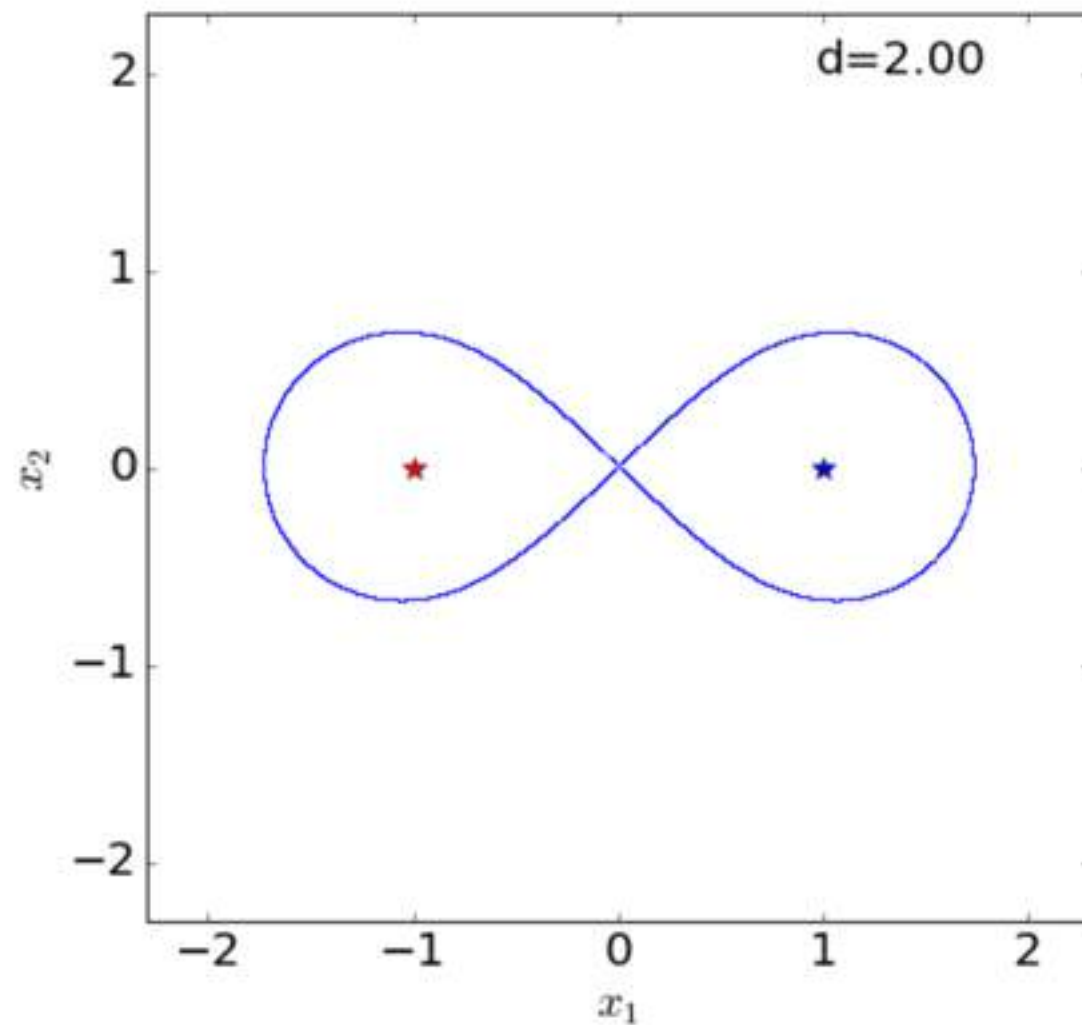
critical lines



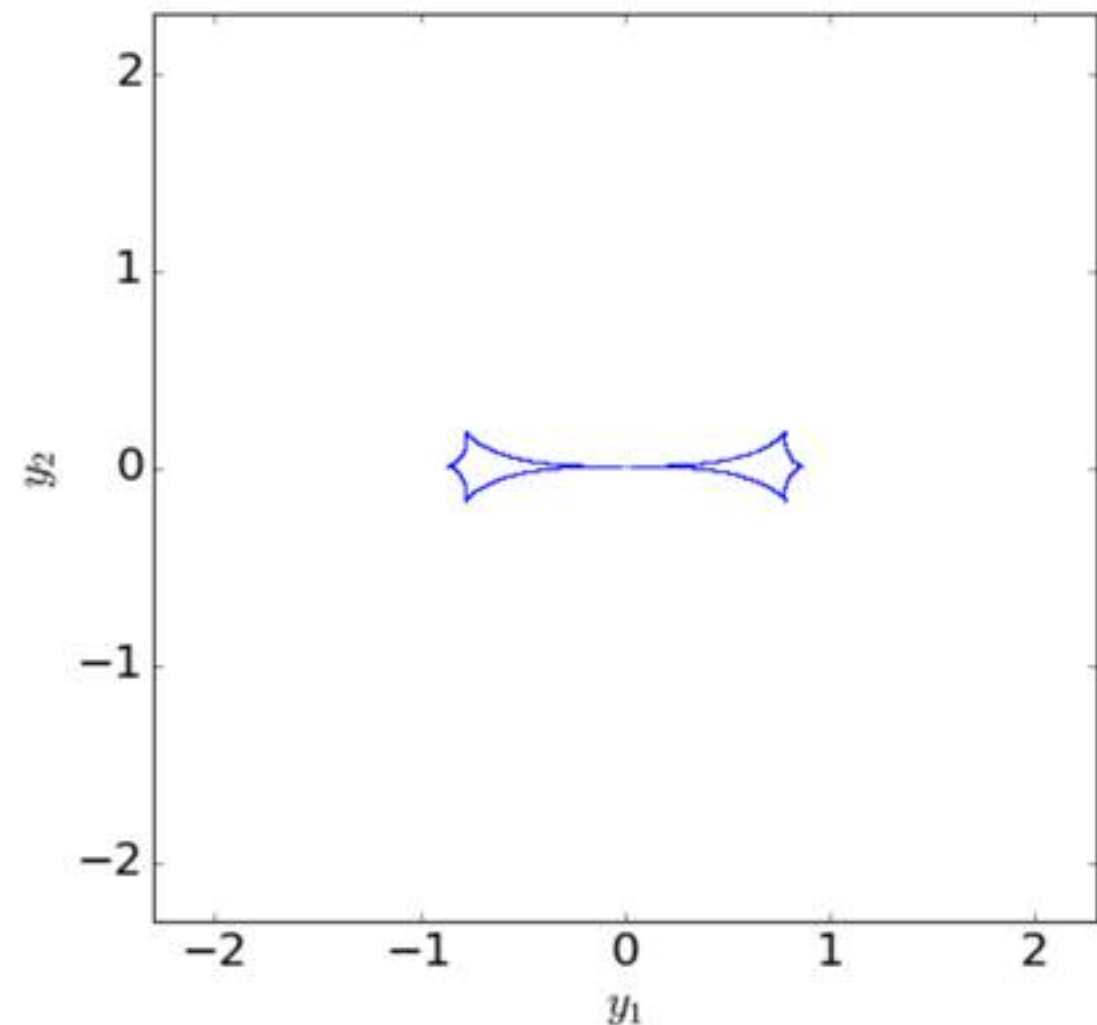
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSEES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



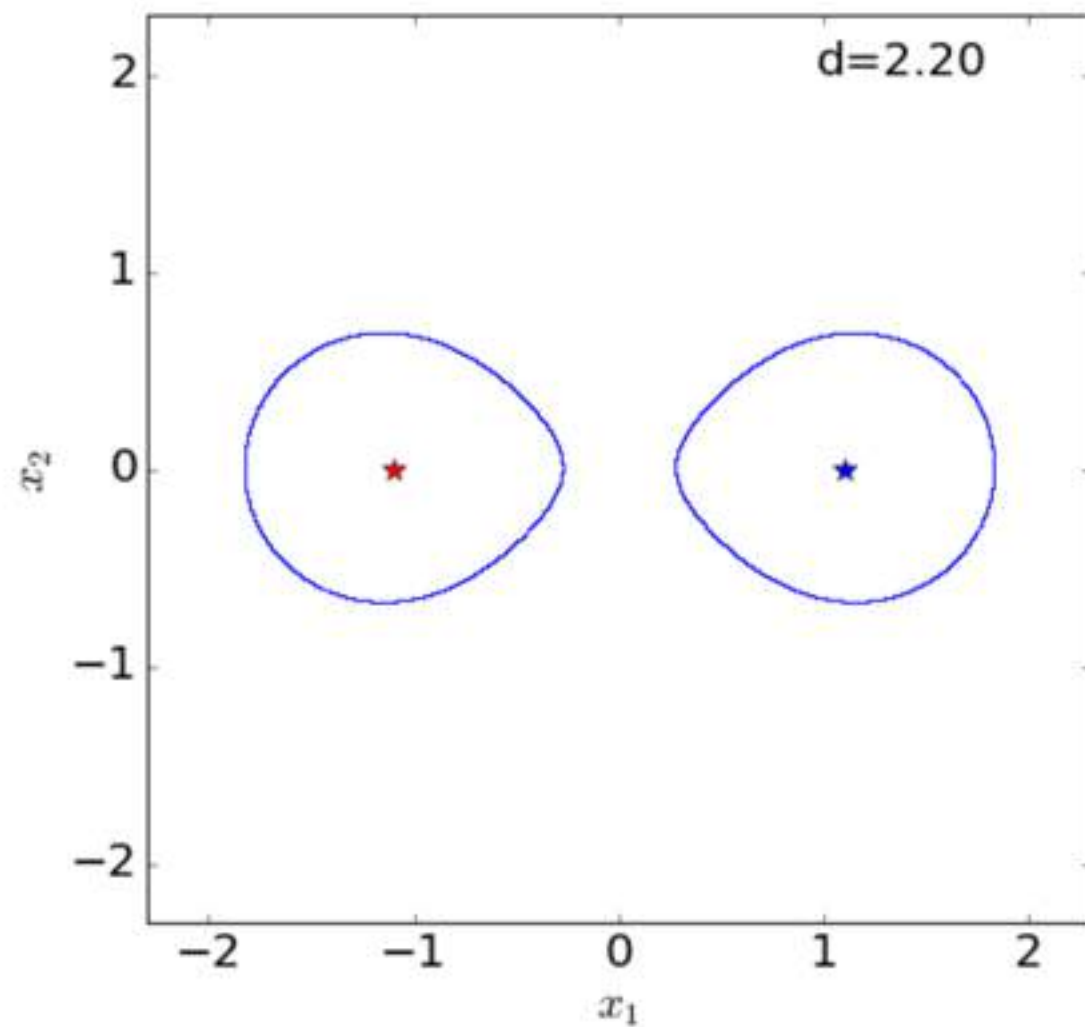
critical lines



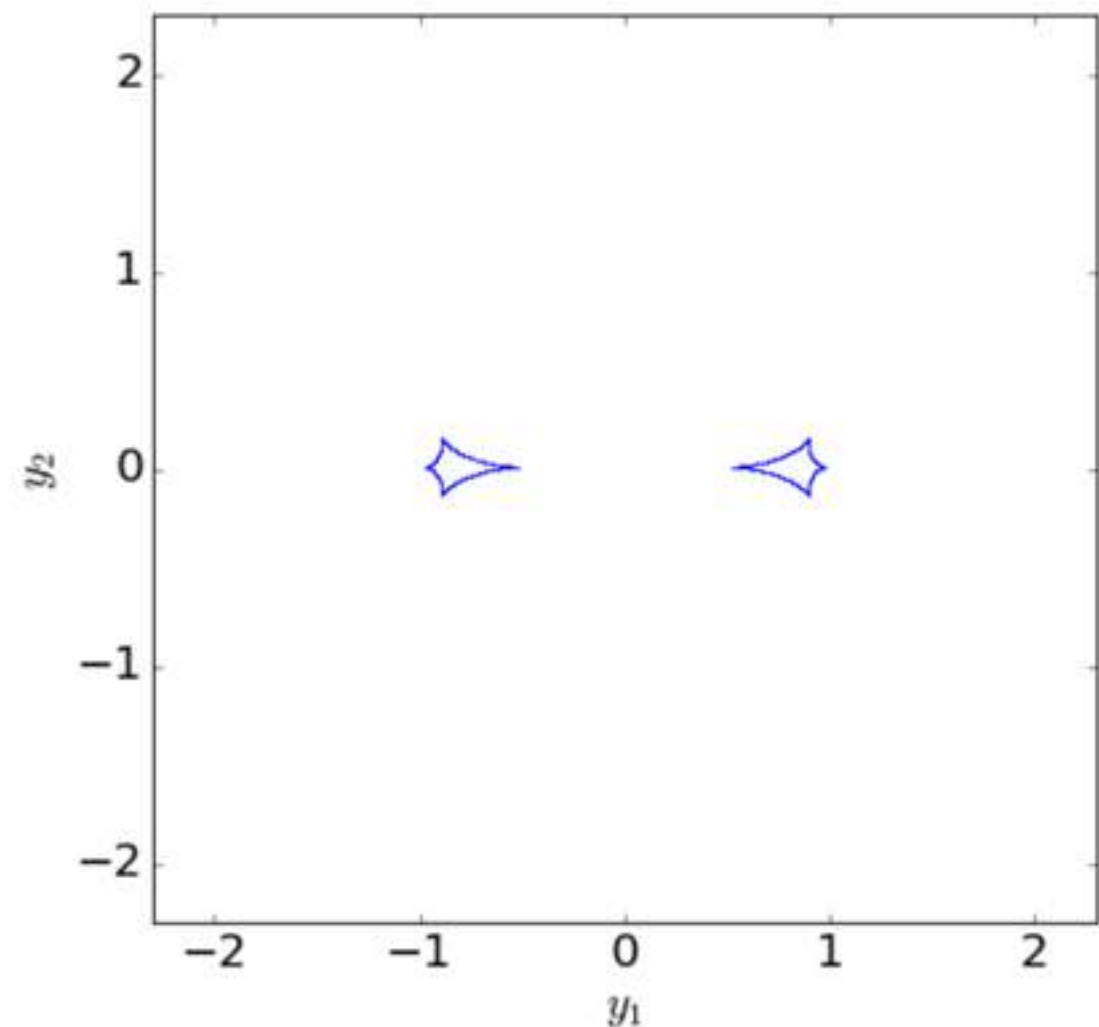
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE



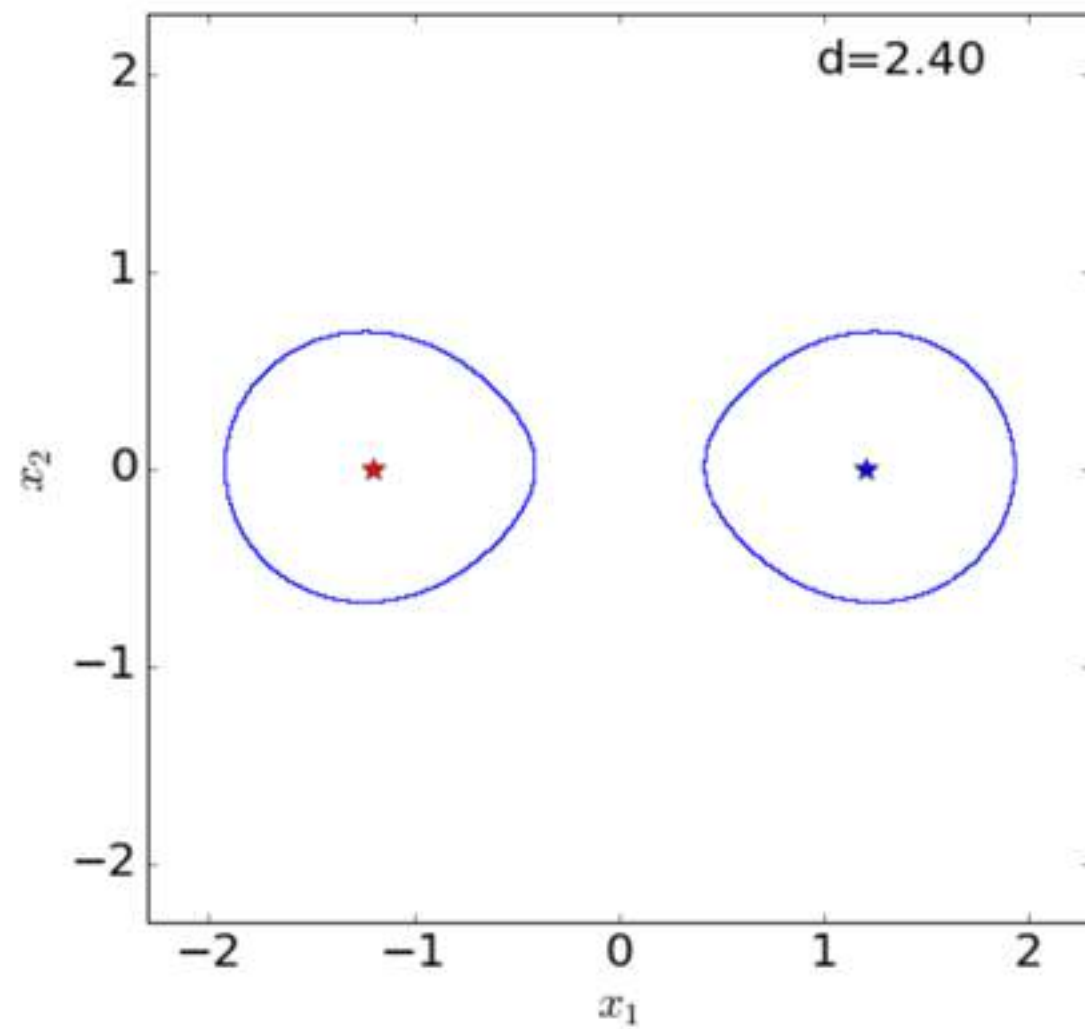
critical lines



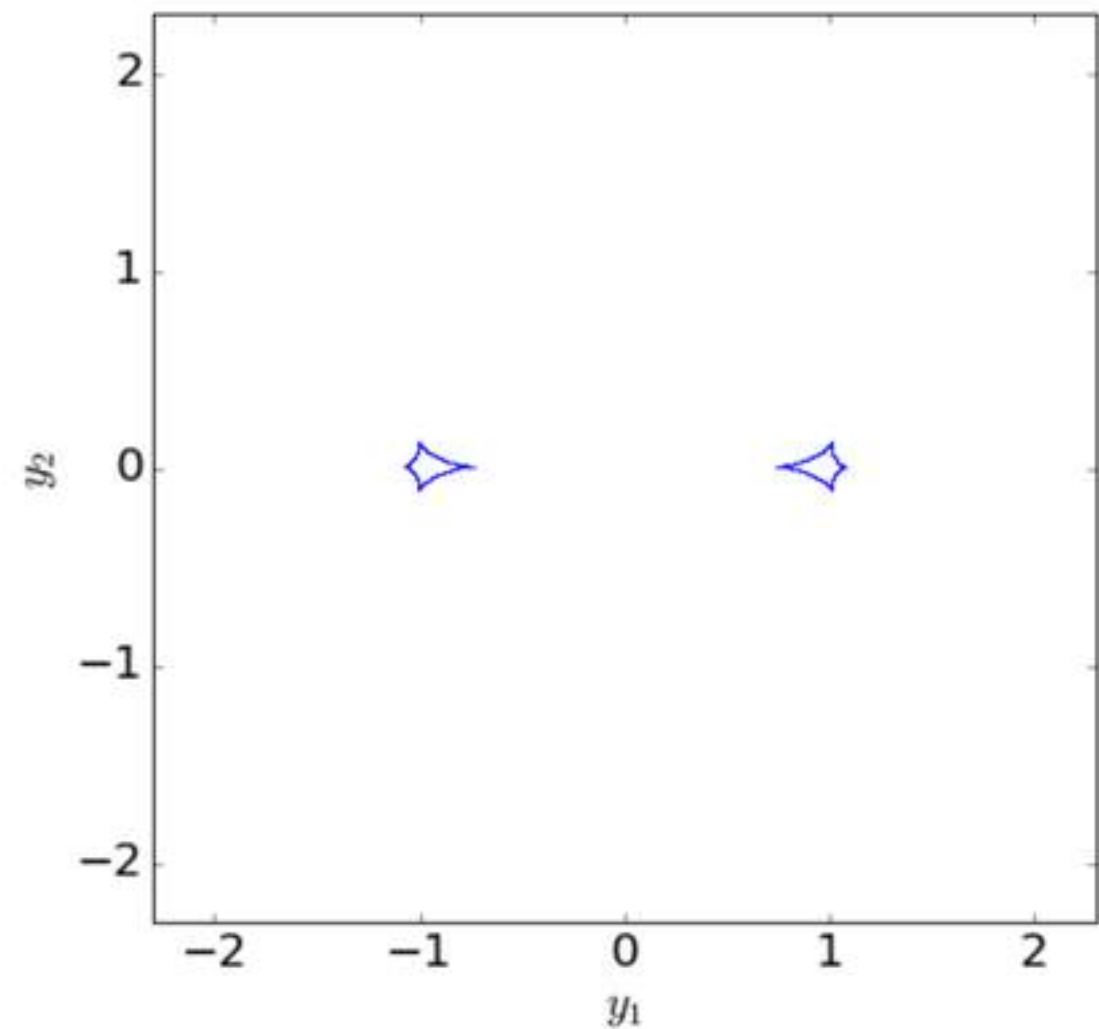
caustics

BINARY LENSES:

TWO LENSES WITH THE SAME MASS ($Q=1$) AND VARYING DISTANCE

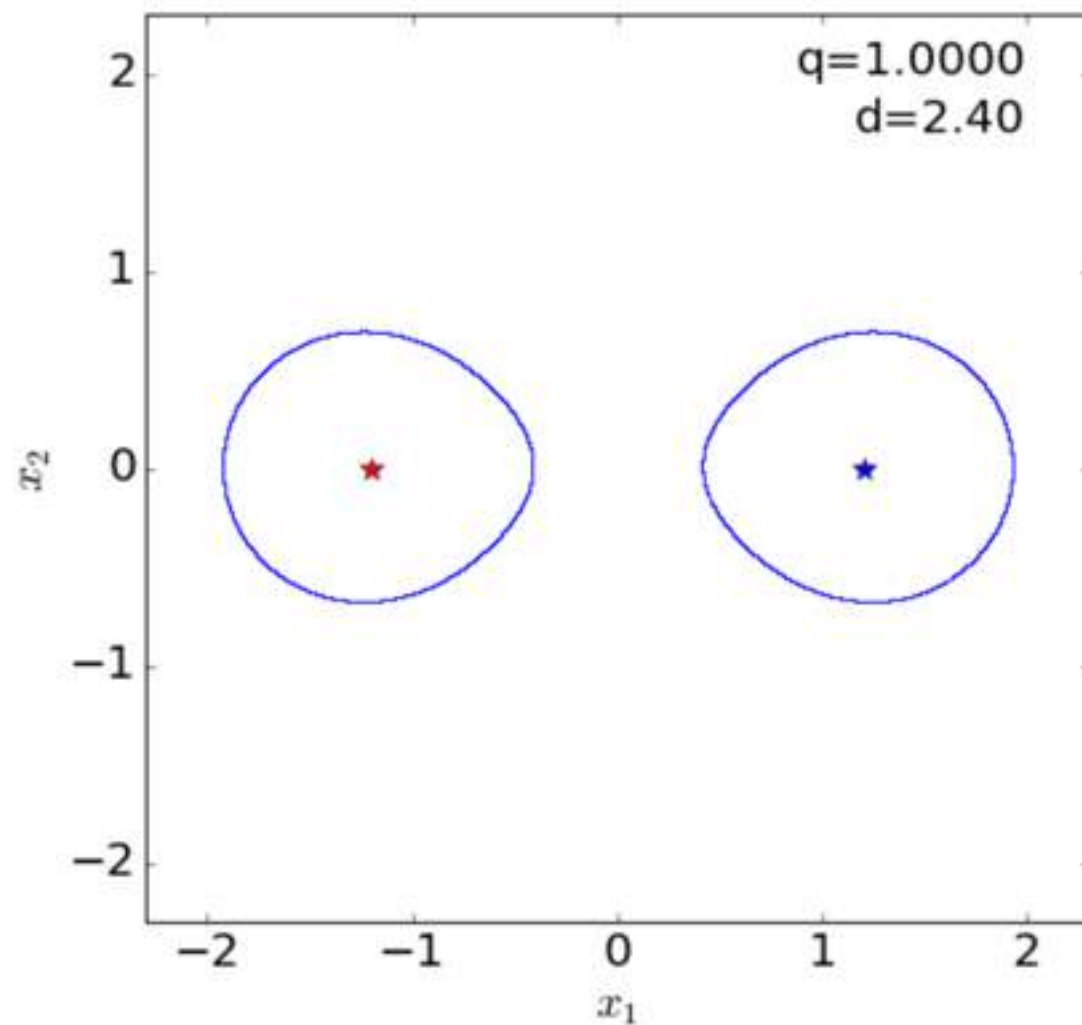


critical lines

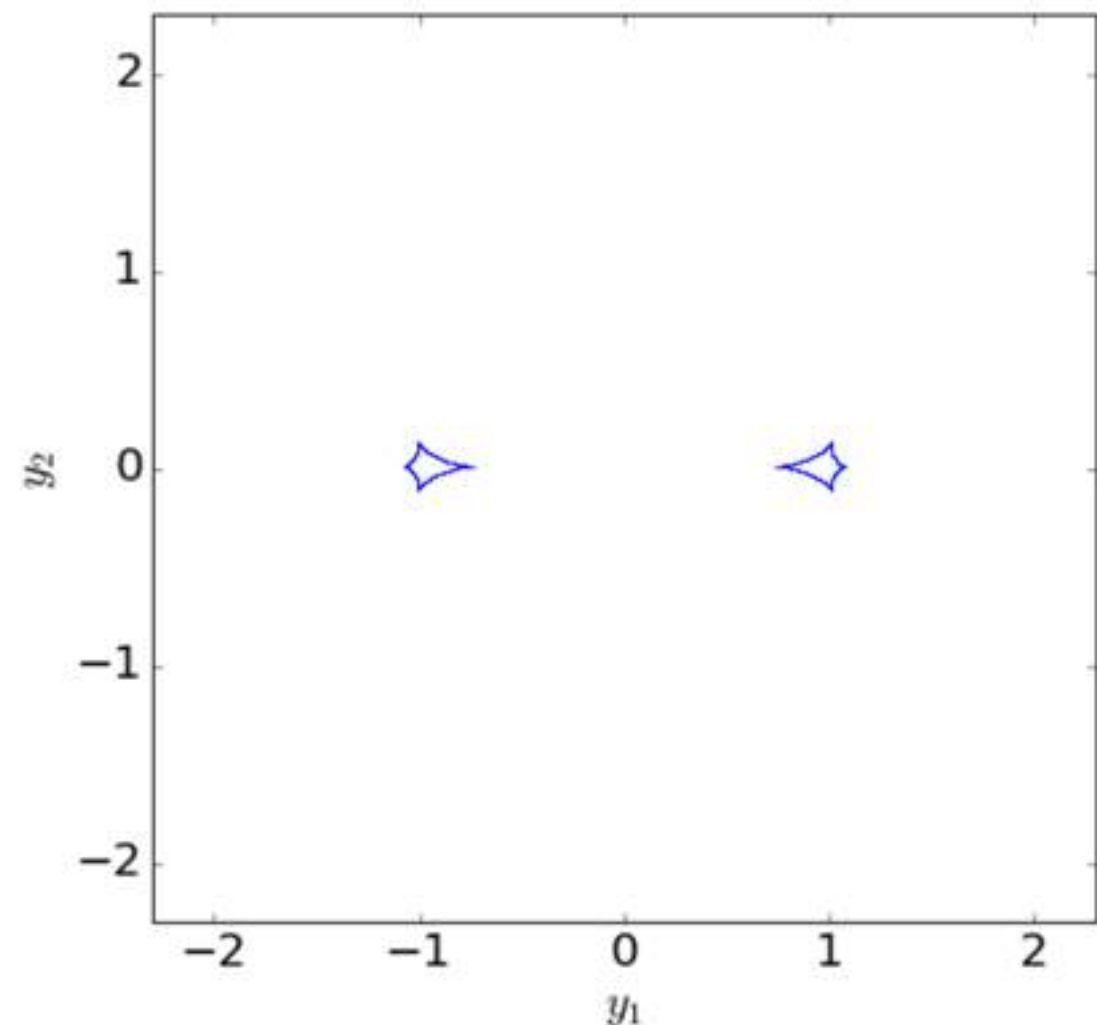


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

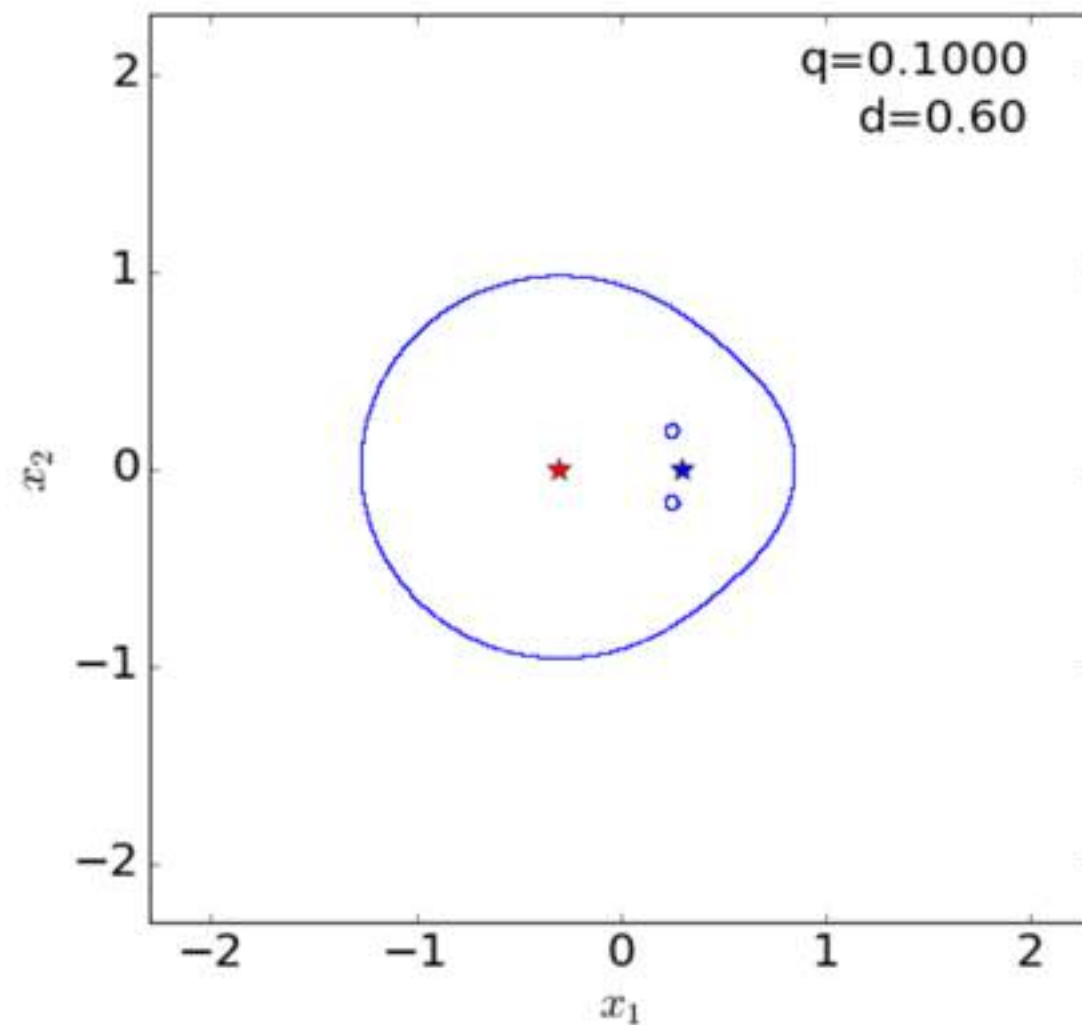


critical lines

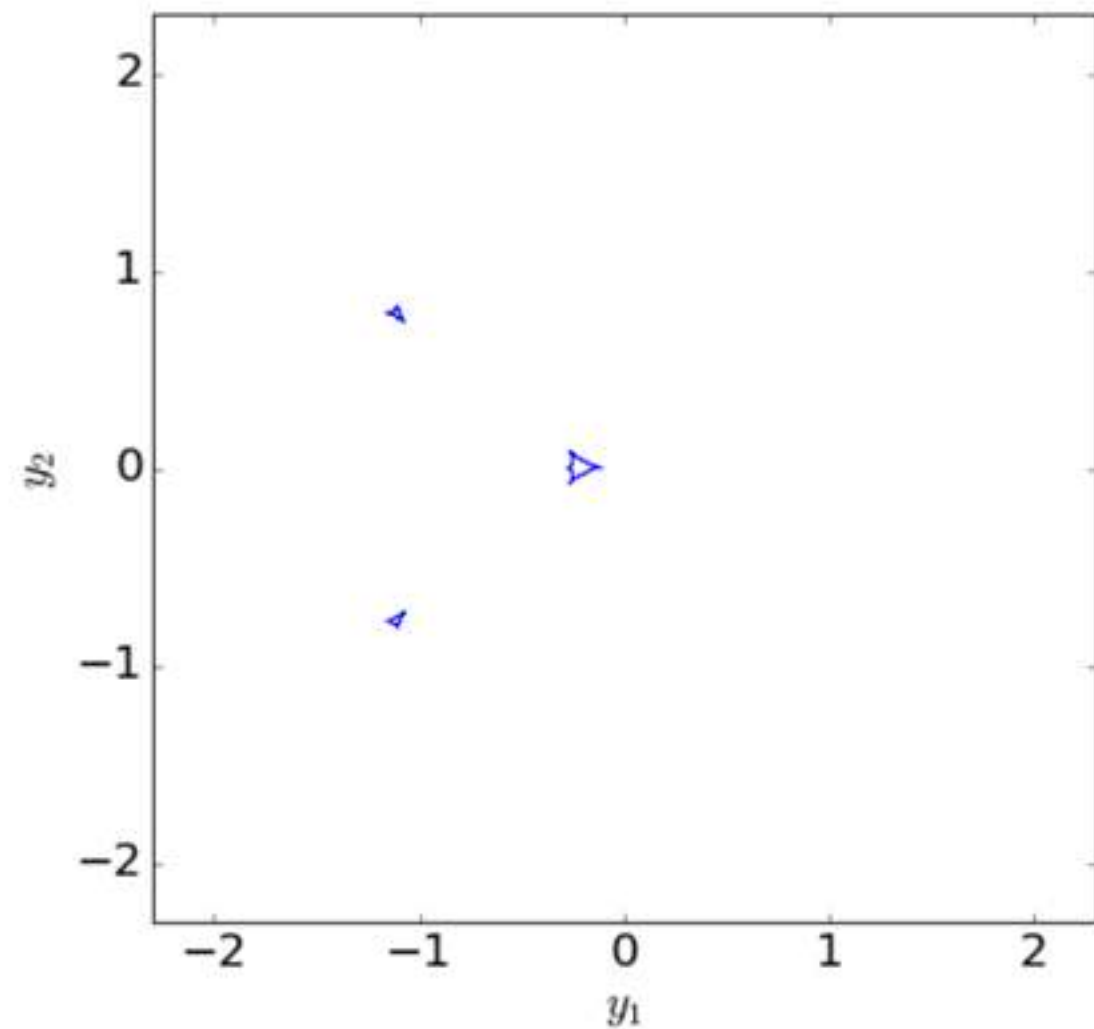


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

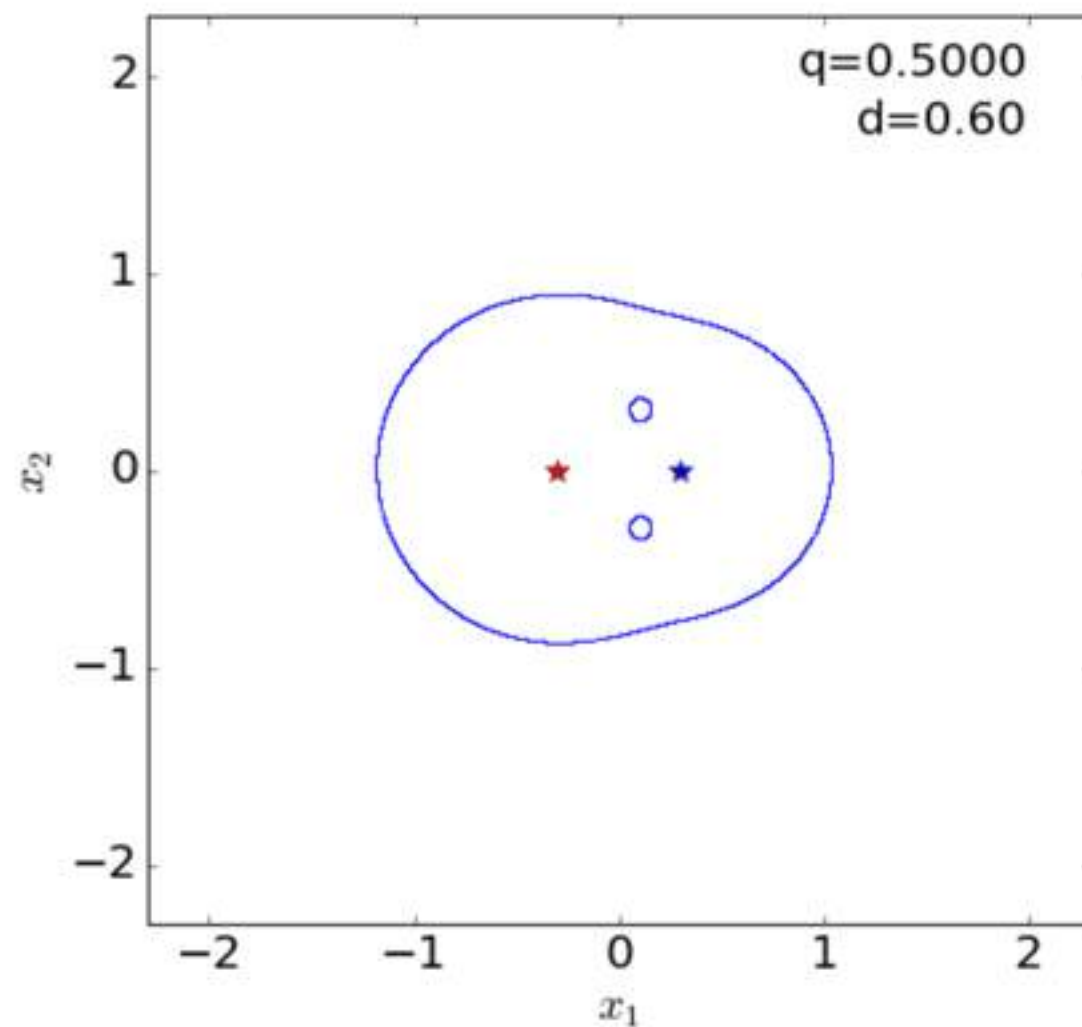


critical lines

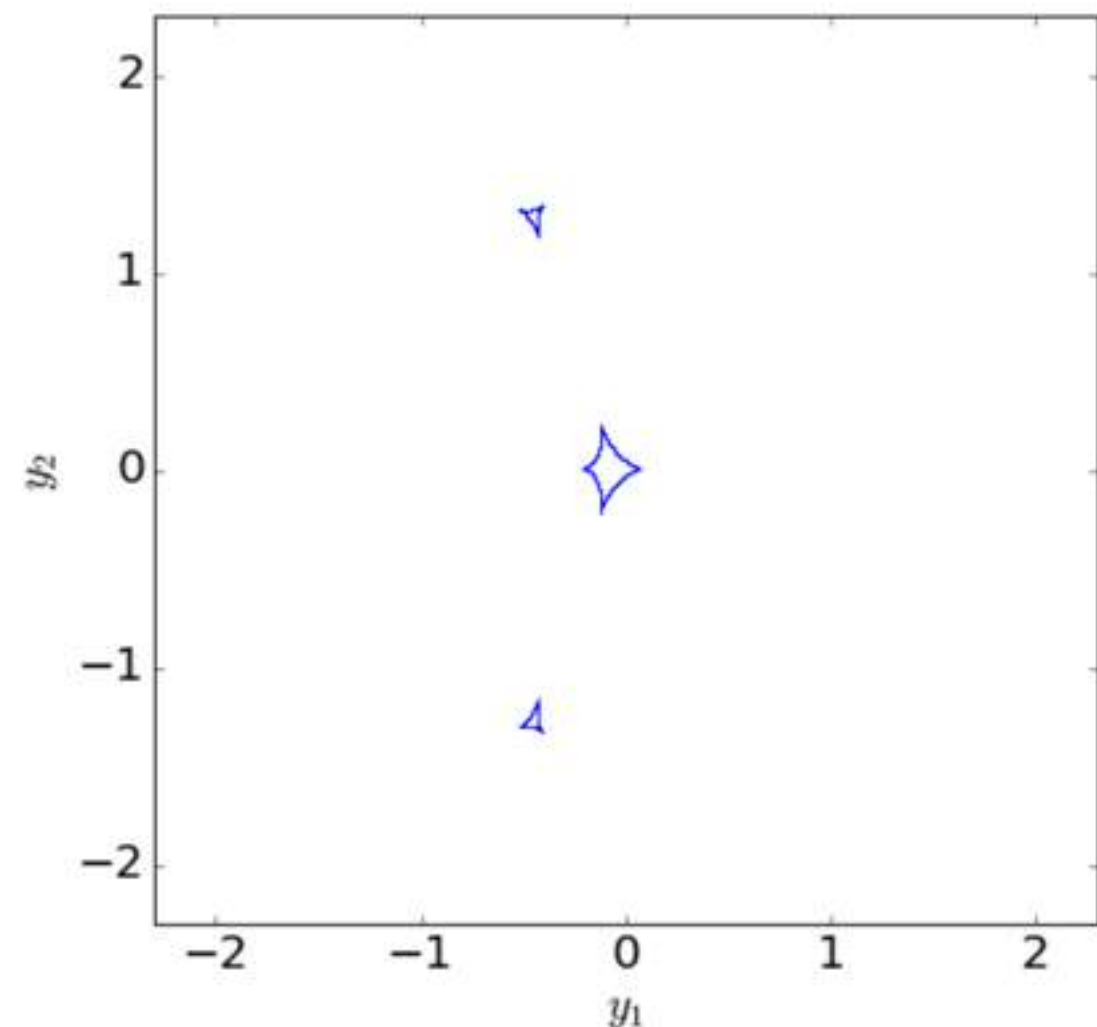


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

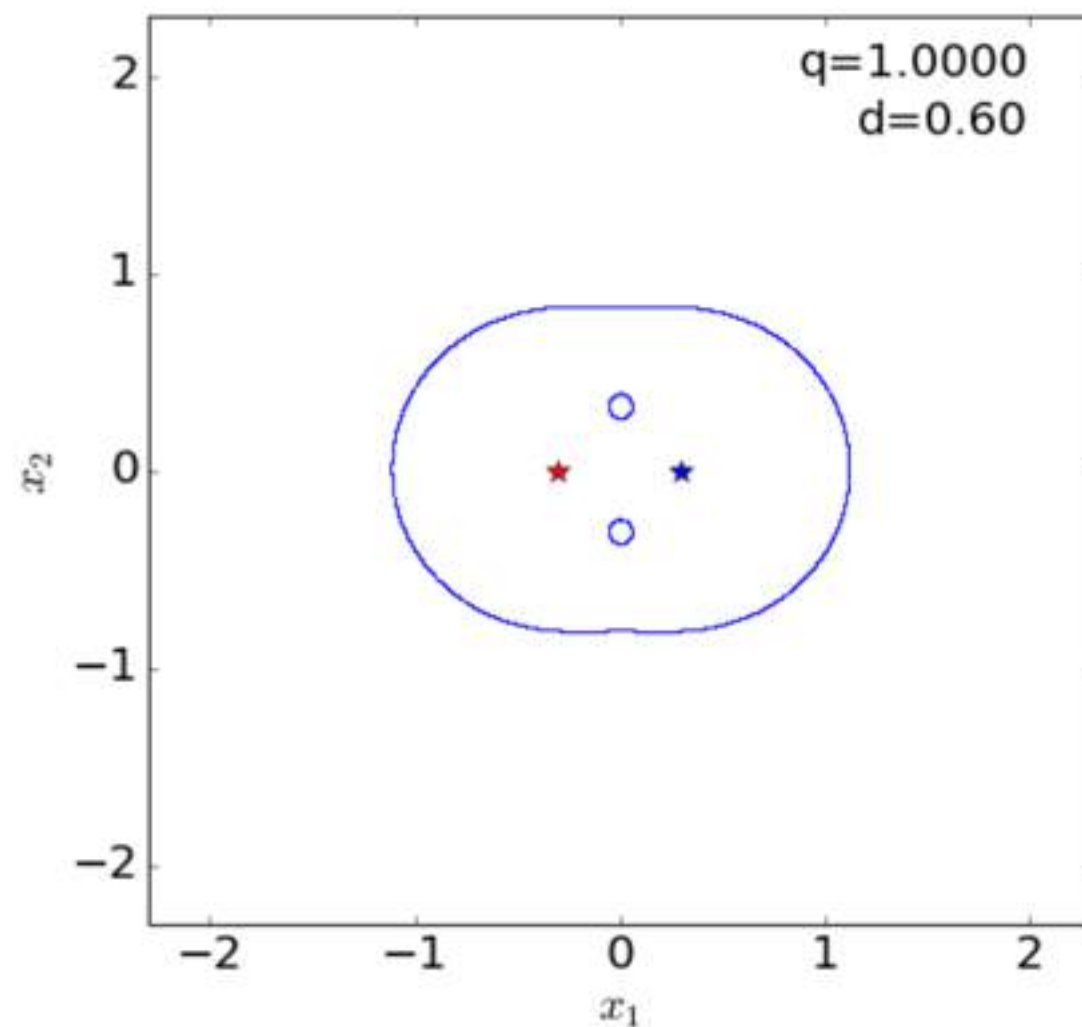


critical lines

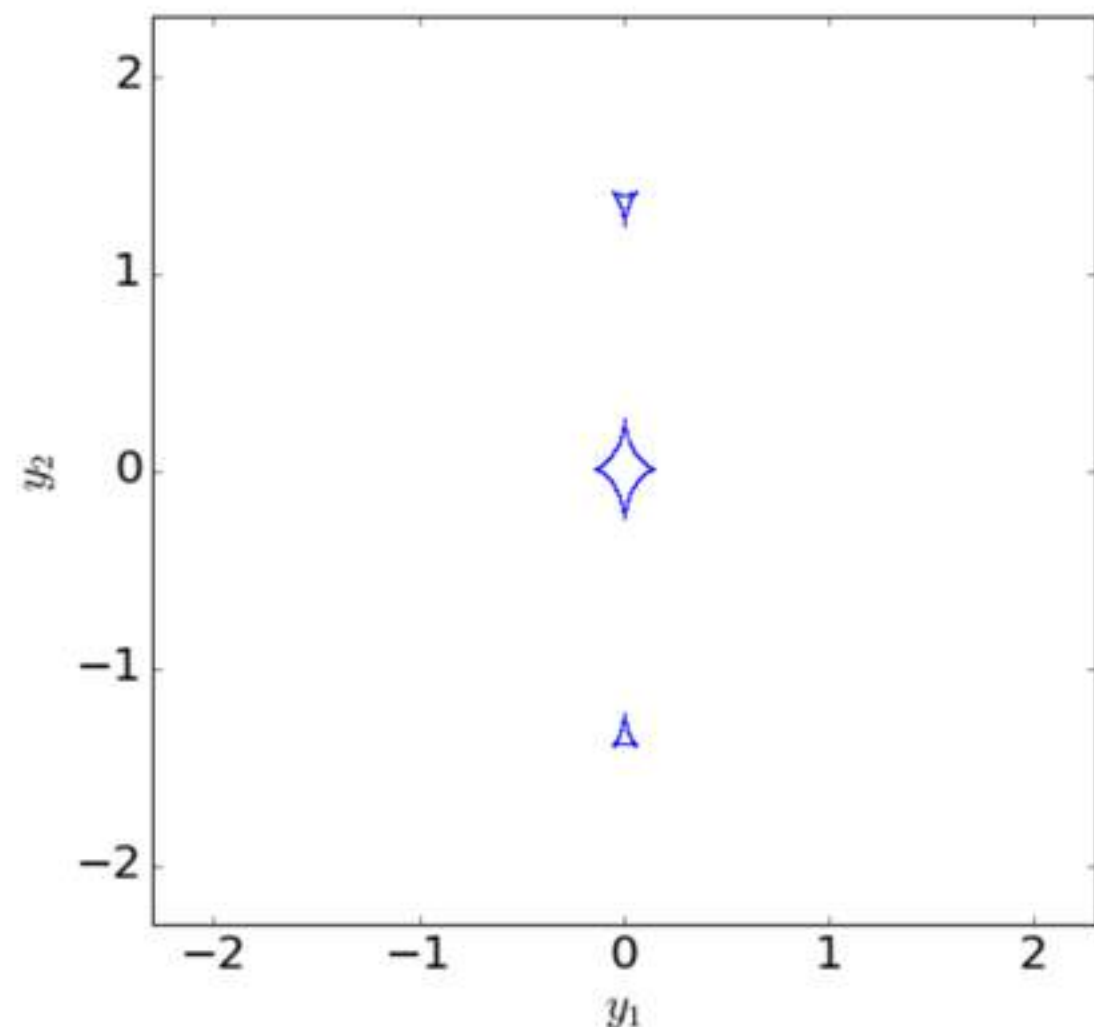


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

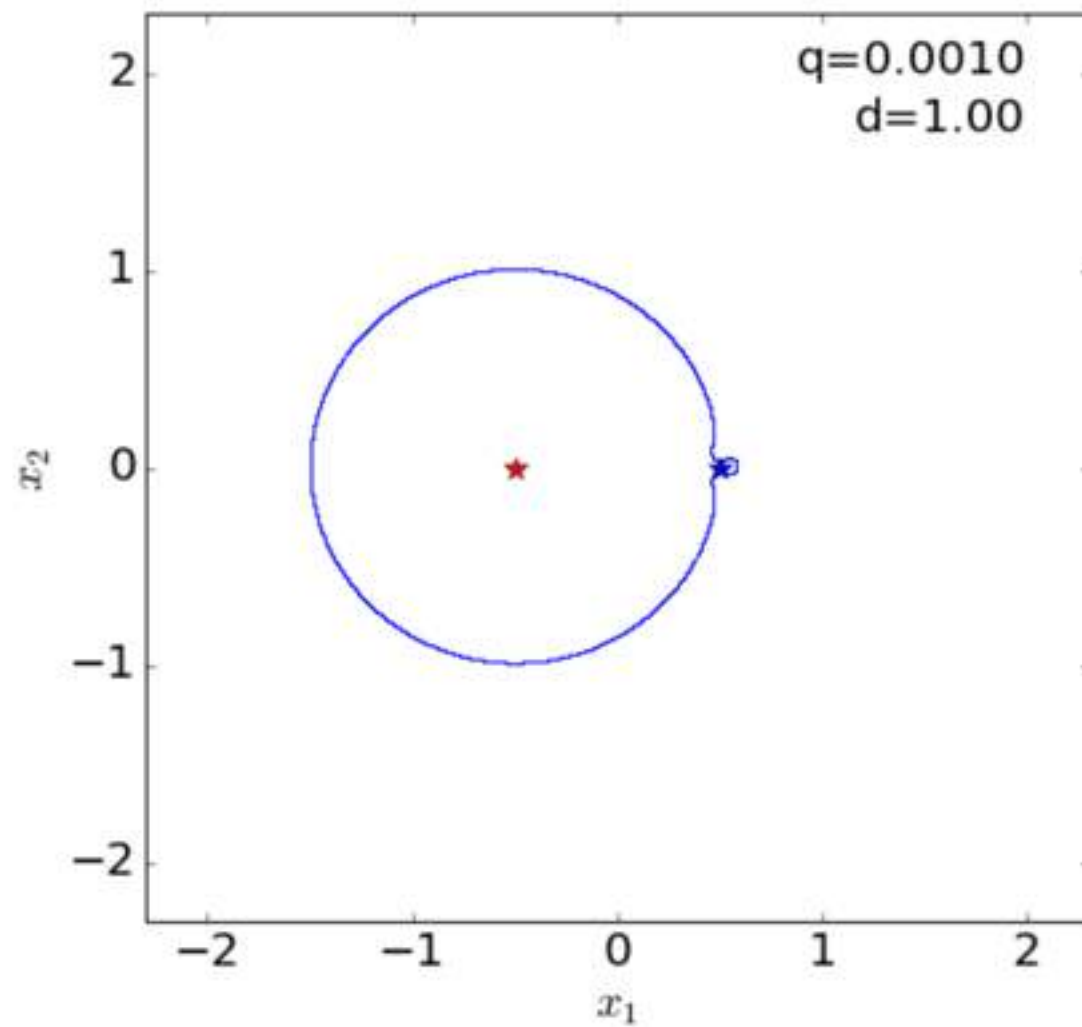


critical lines

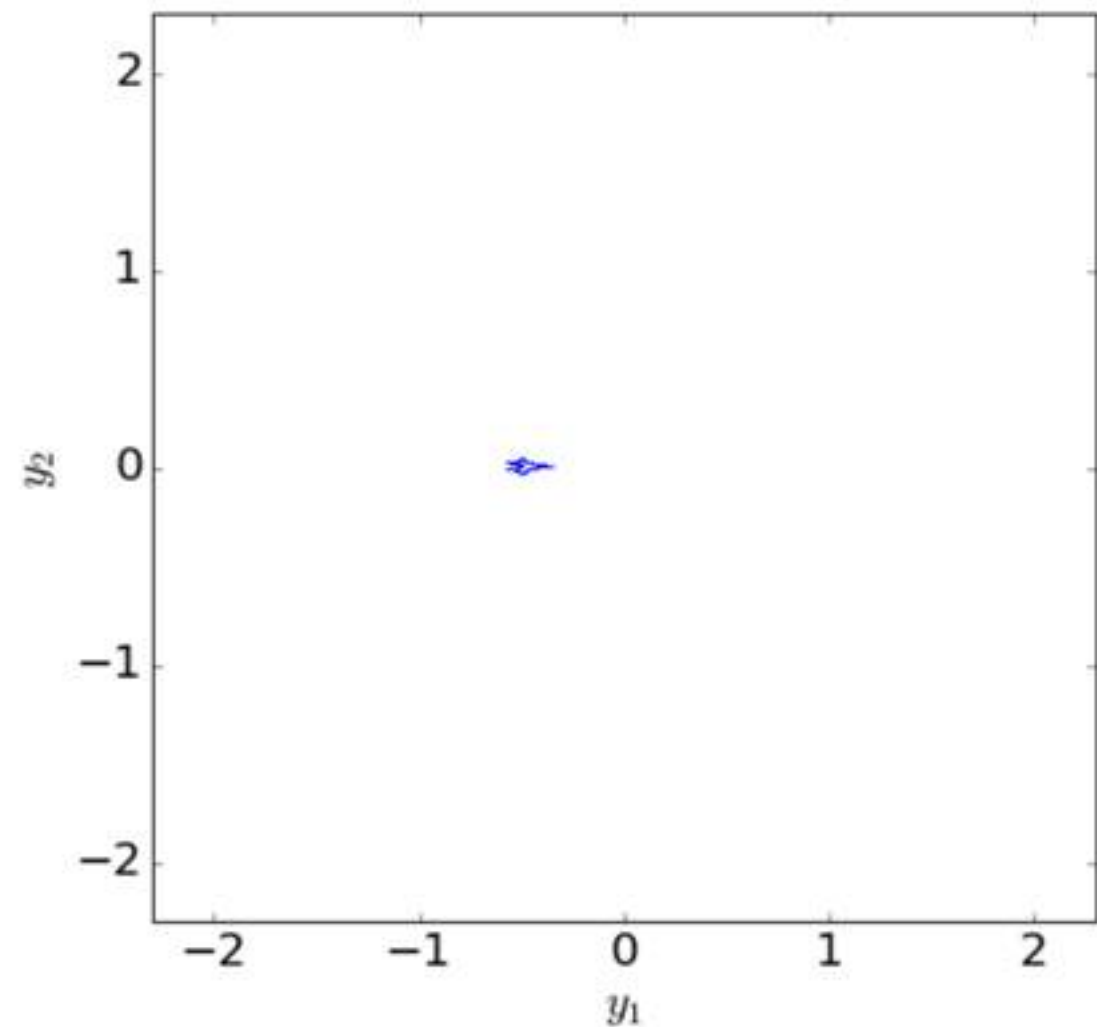


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

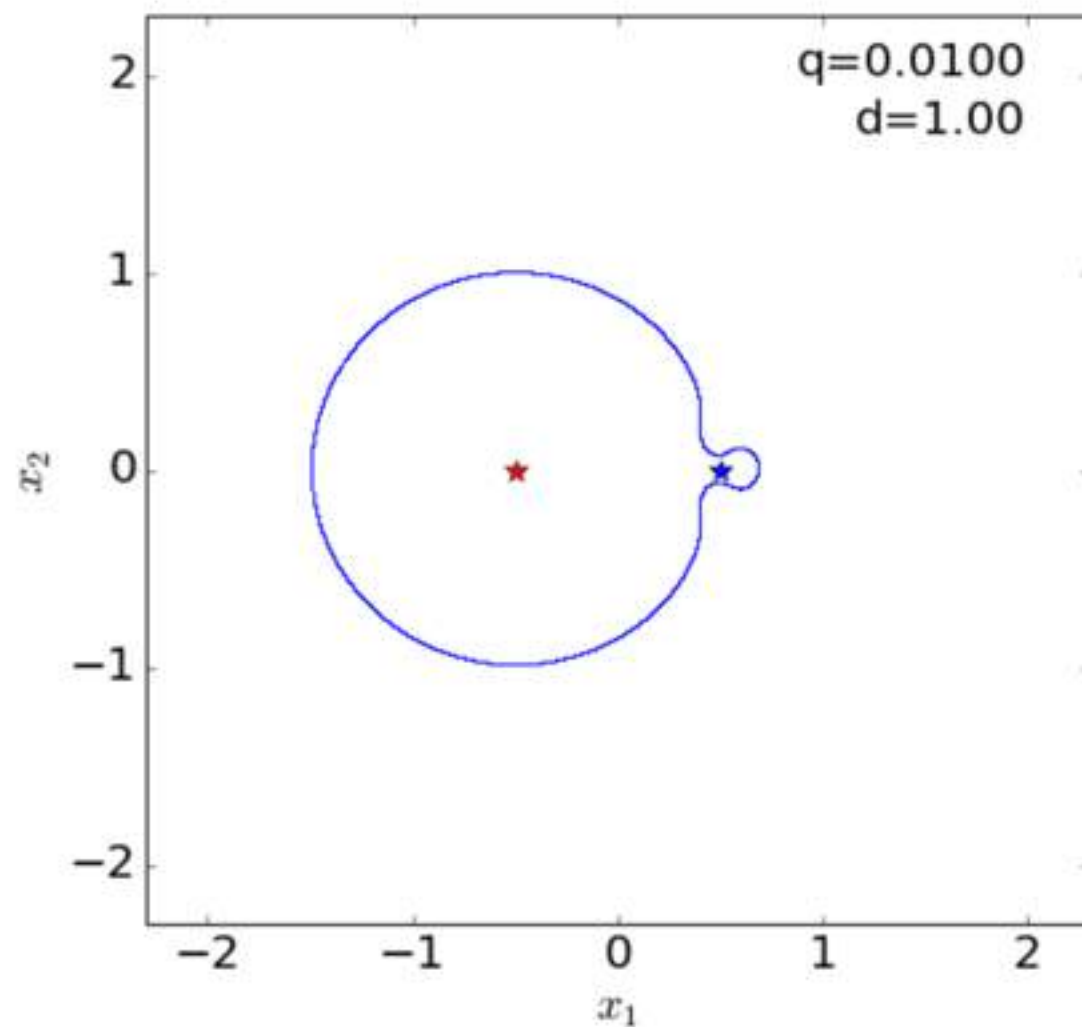


critical lines

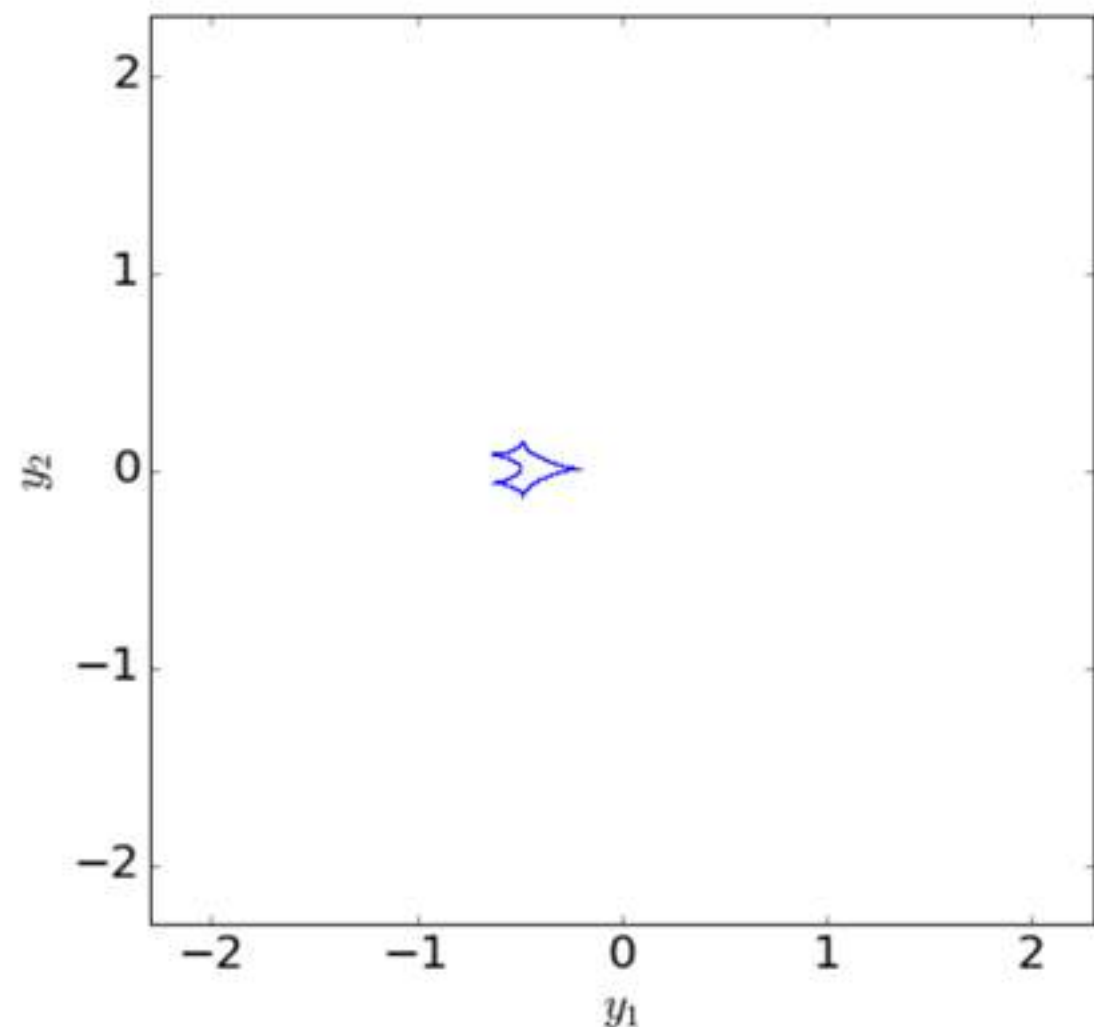


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

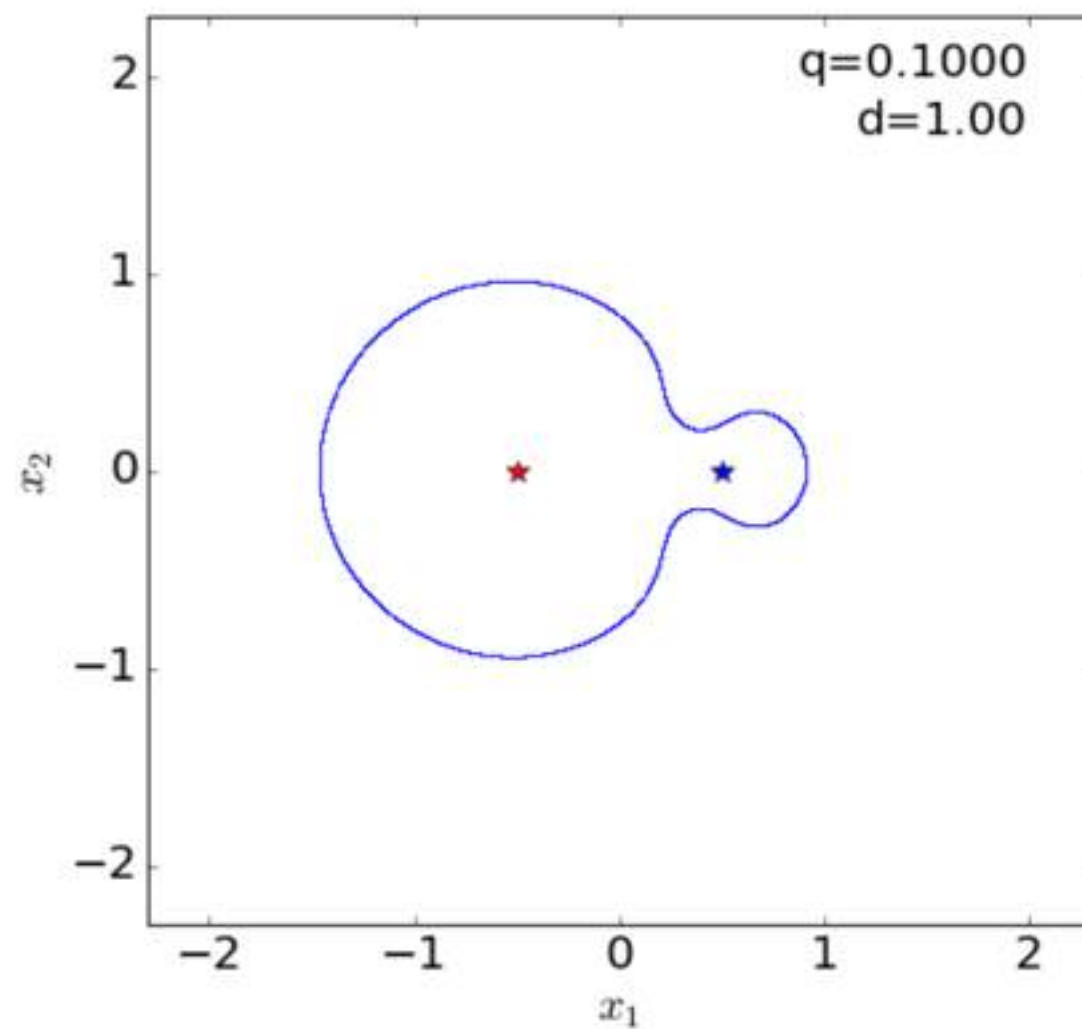


critical lines

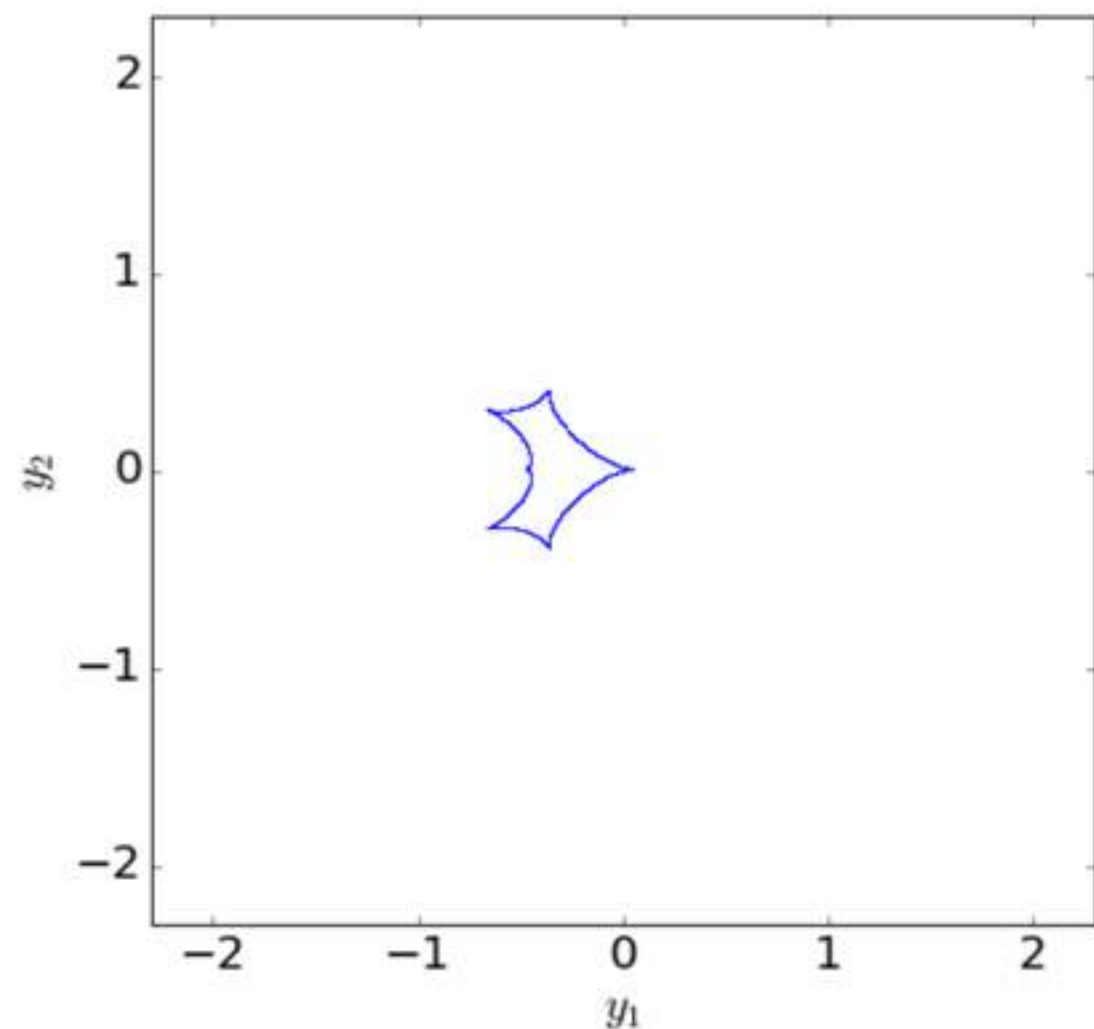


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

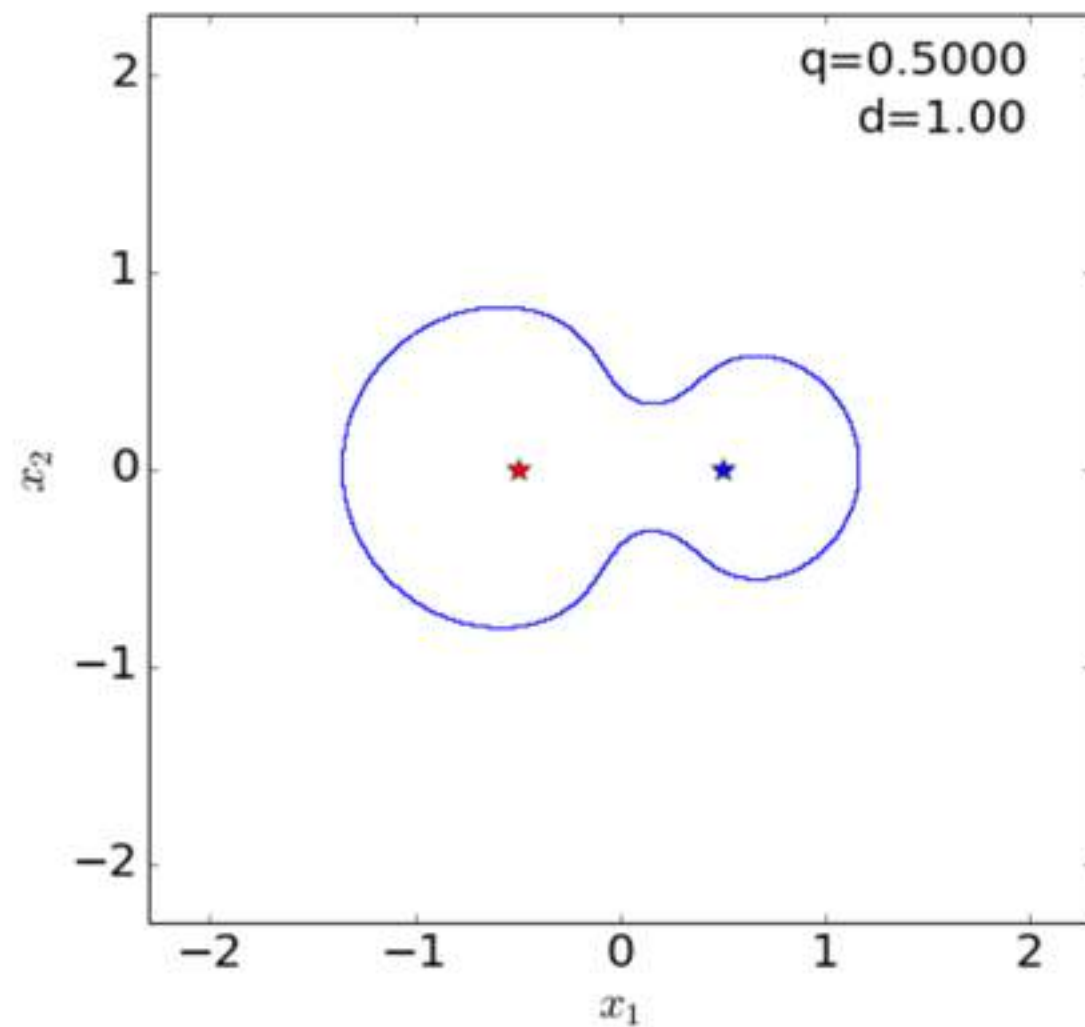


critical lines

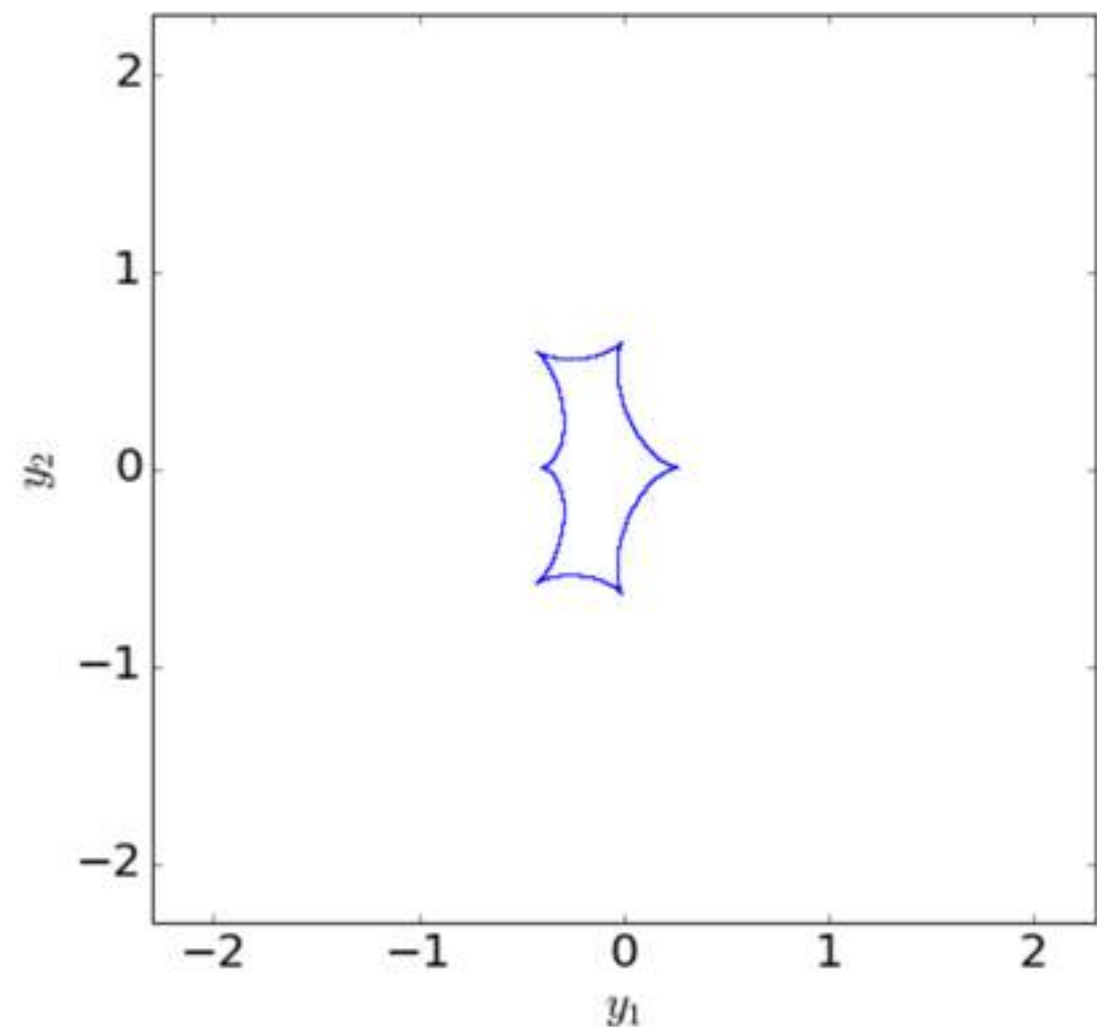


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

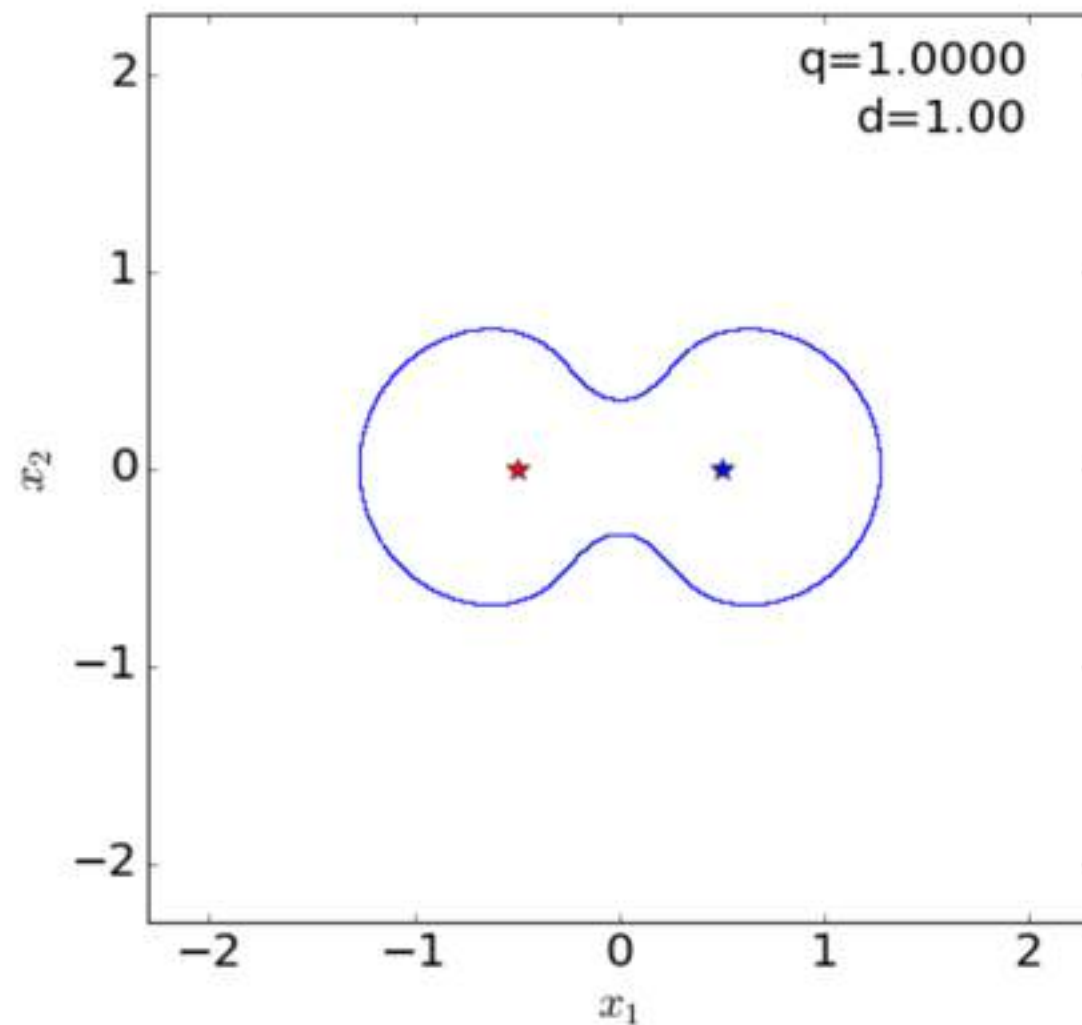


critical lines

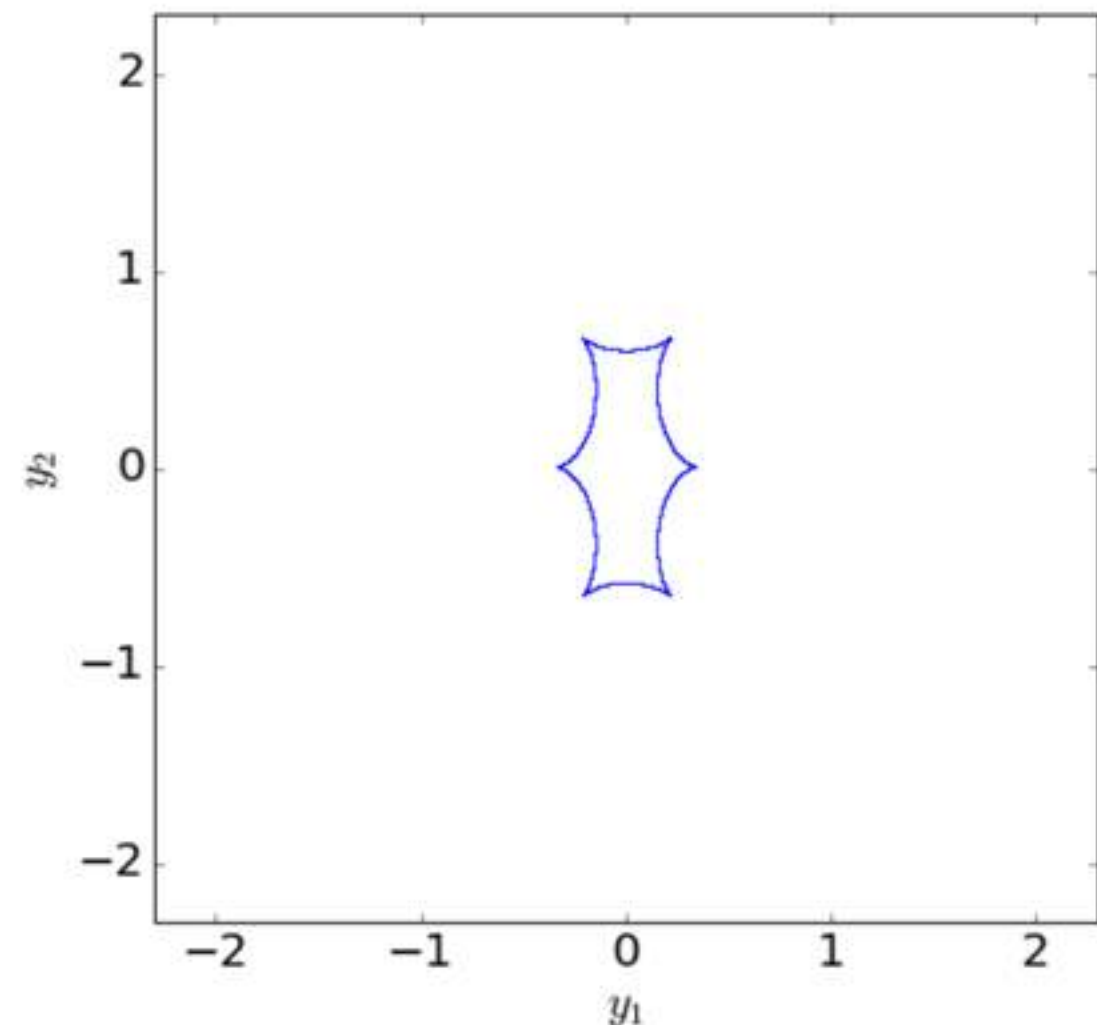


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

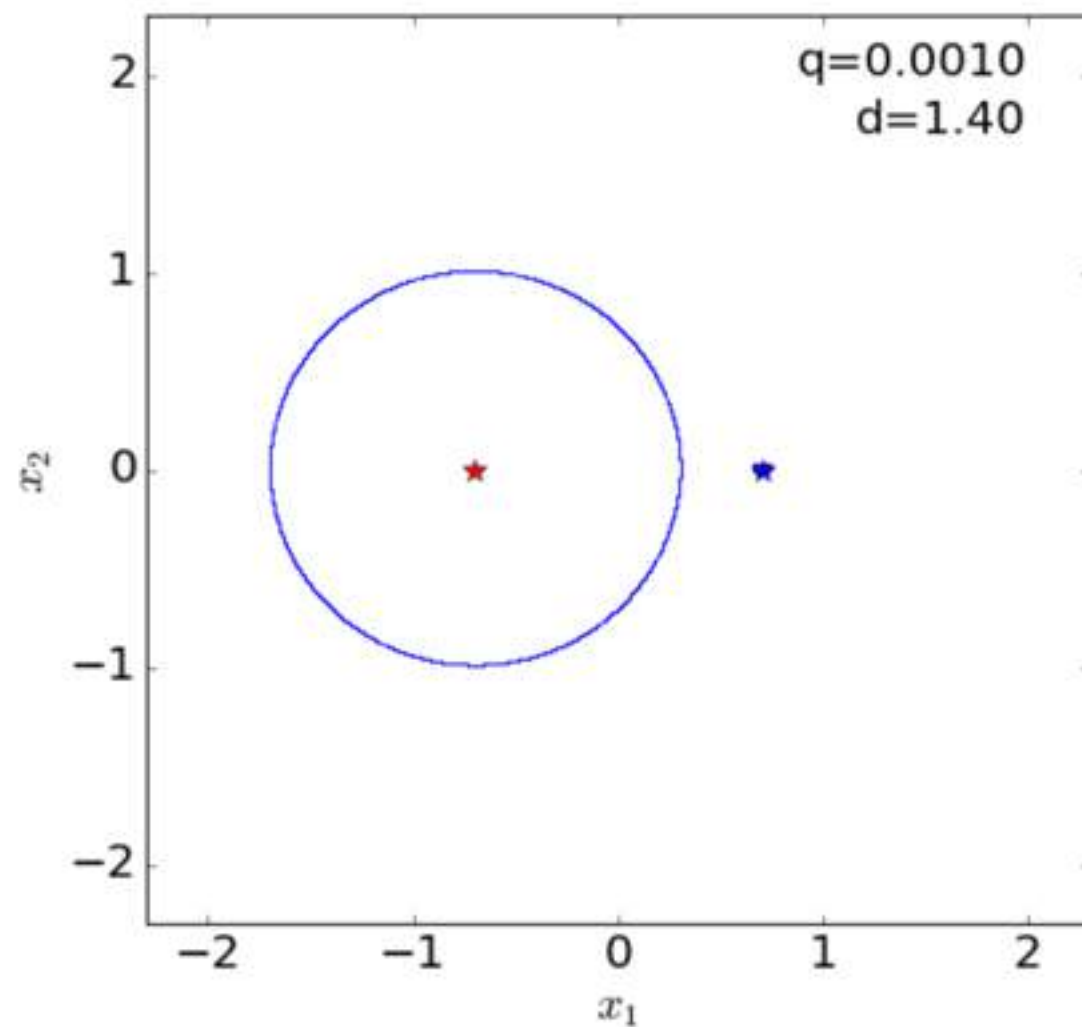


critical lines

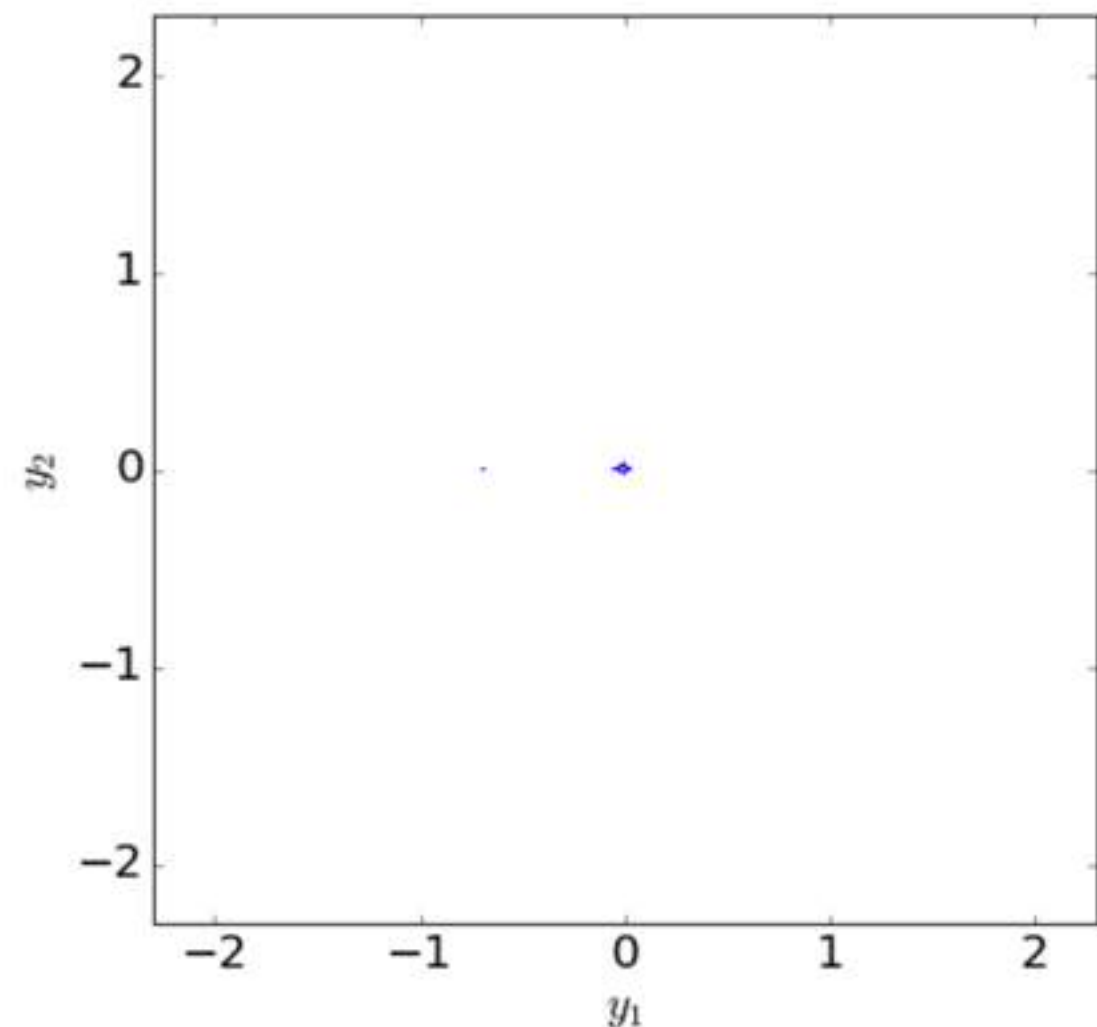


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

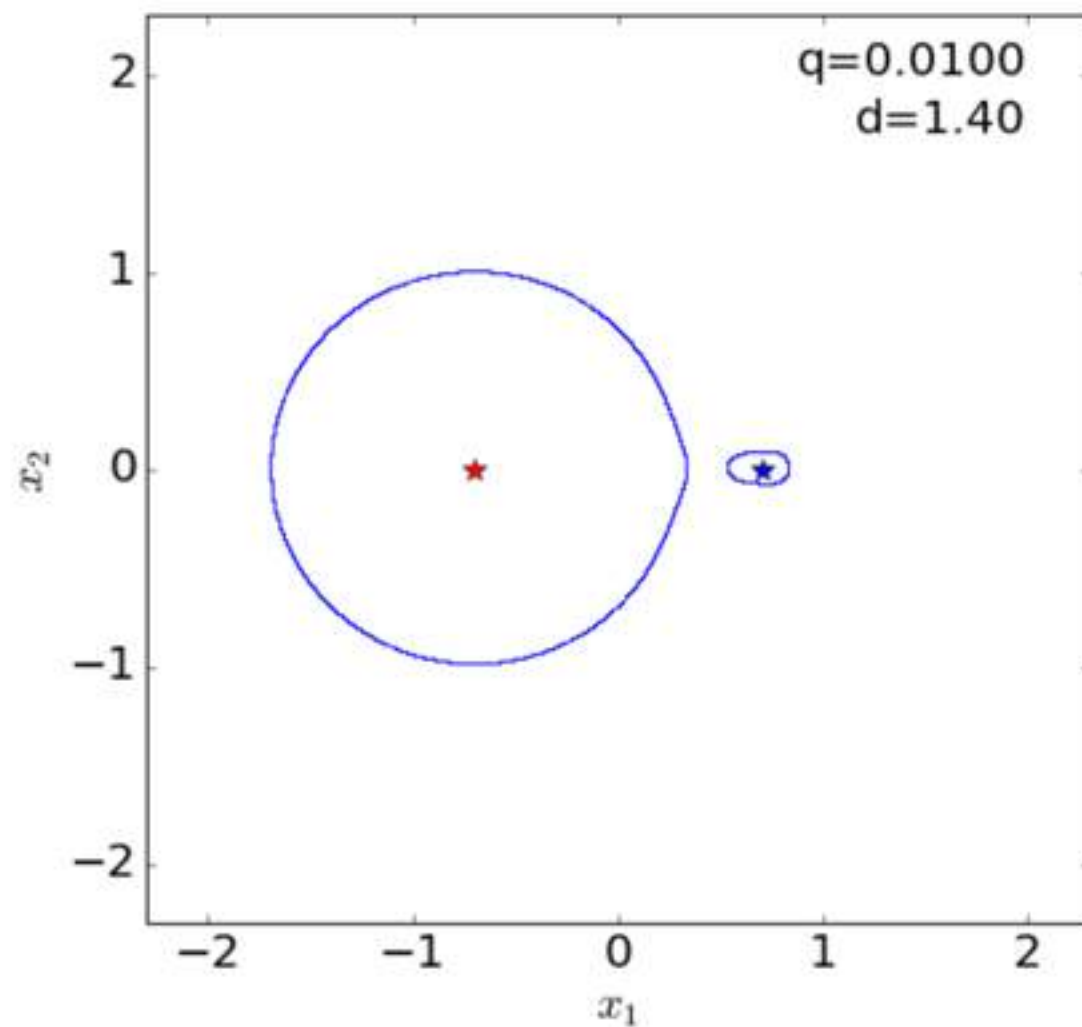


critical lines

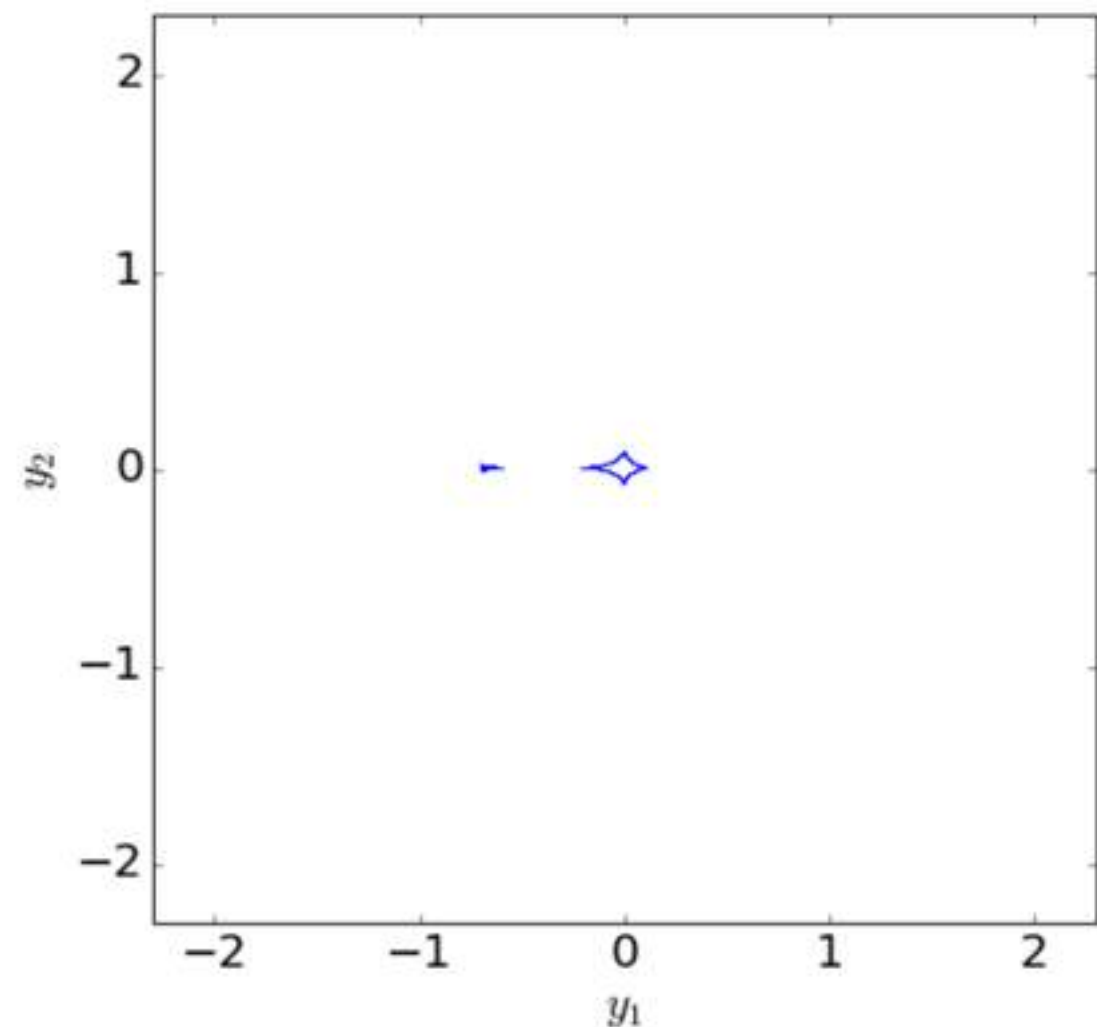


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

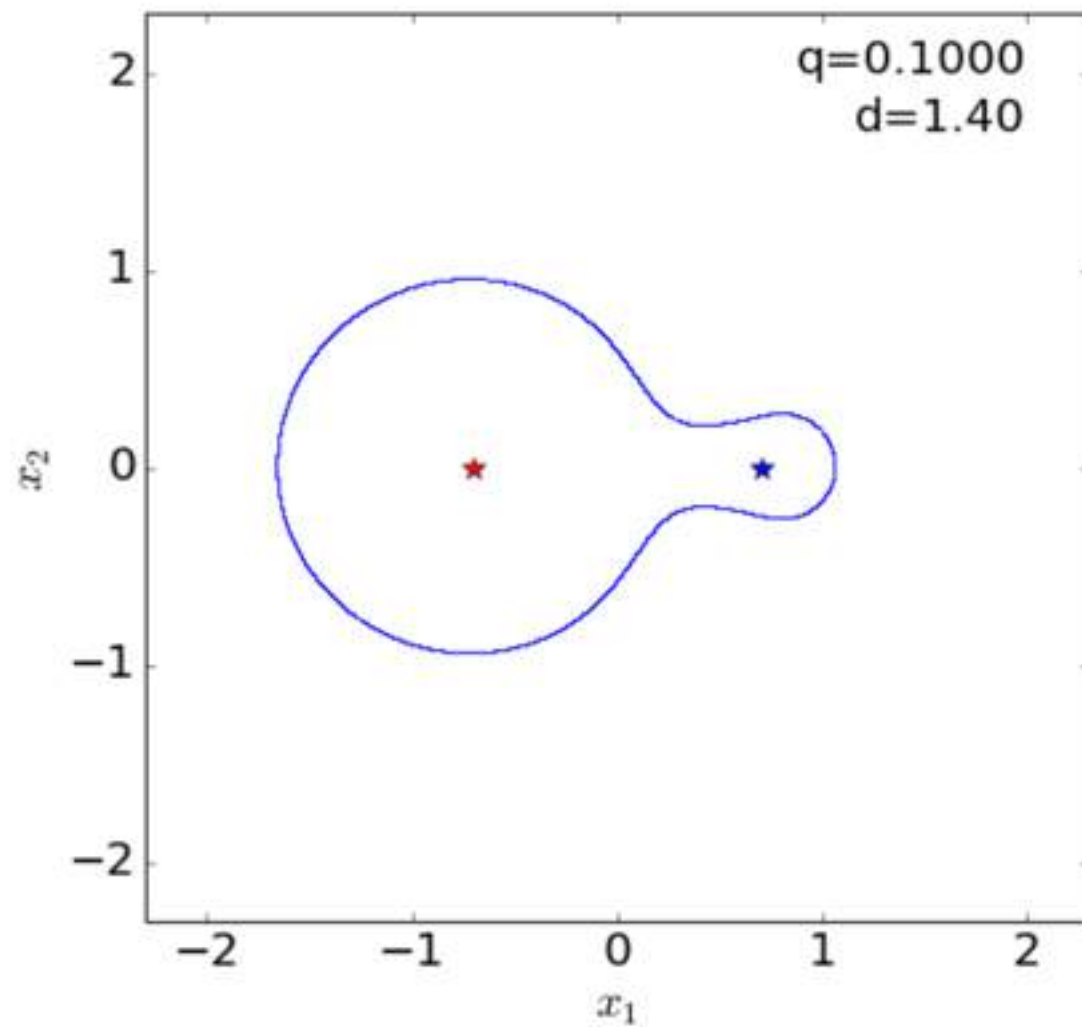


critical lines

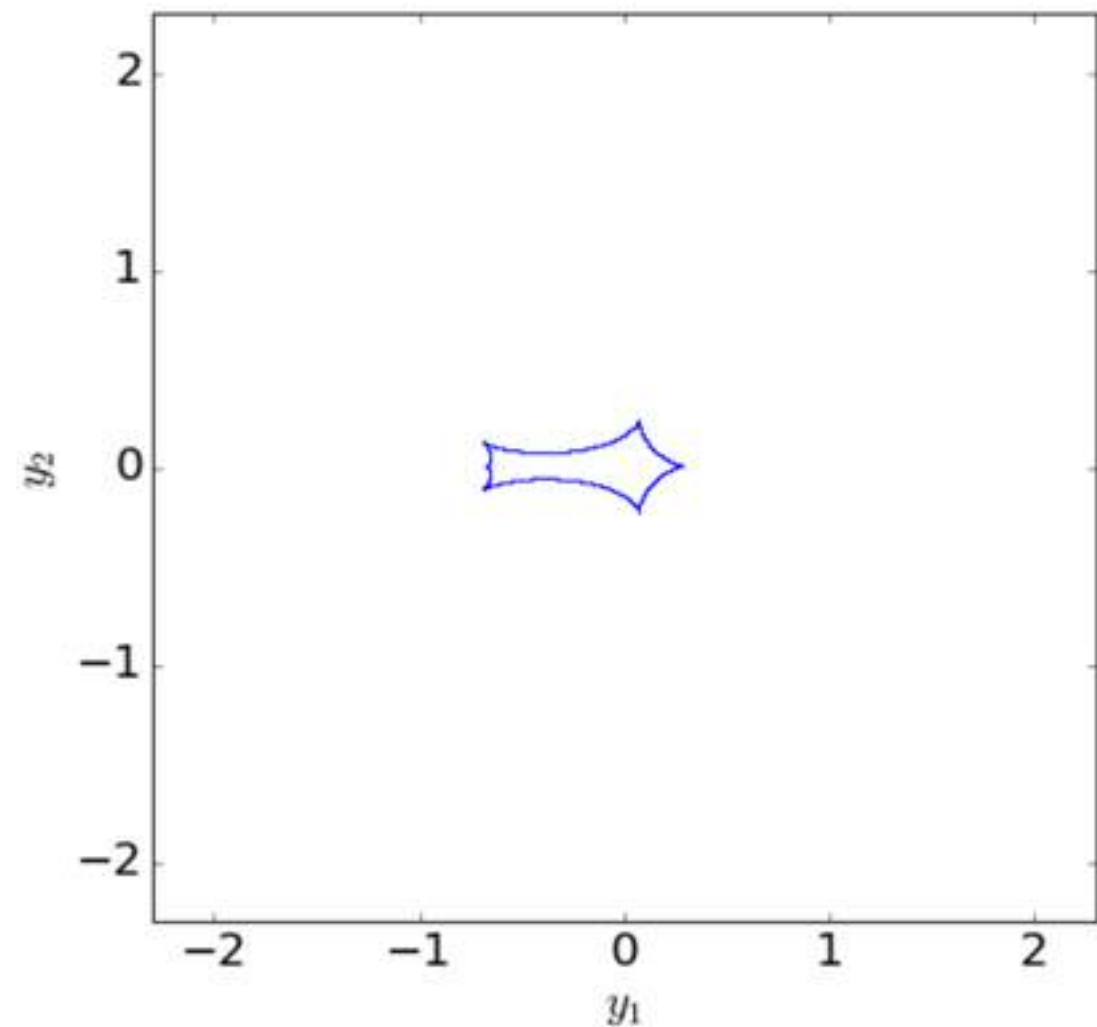


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

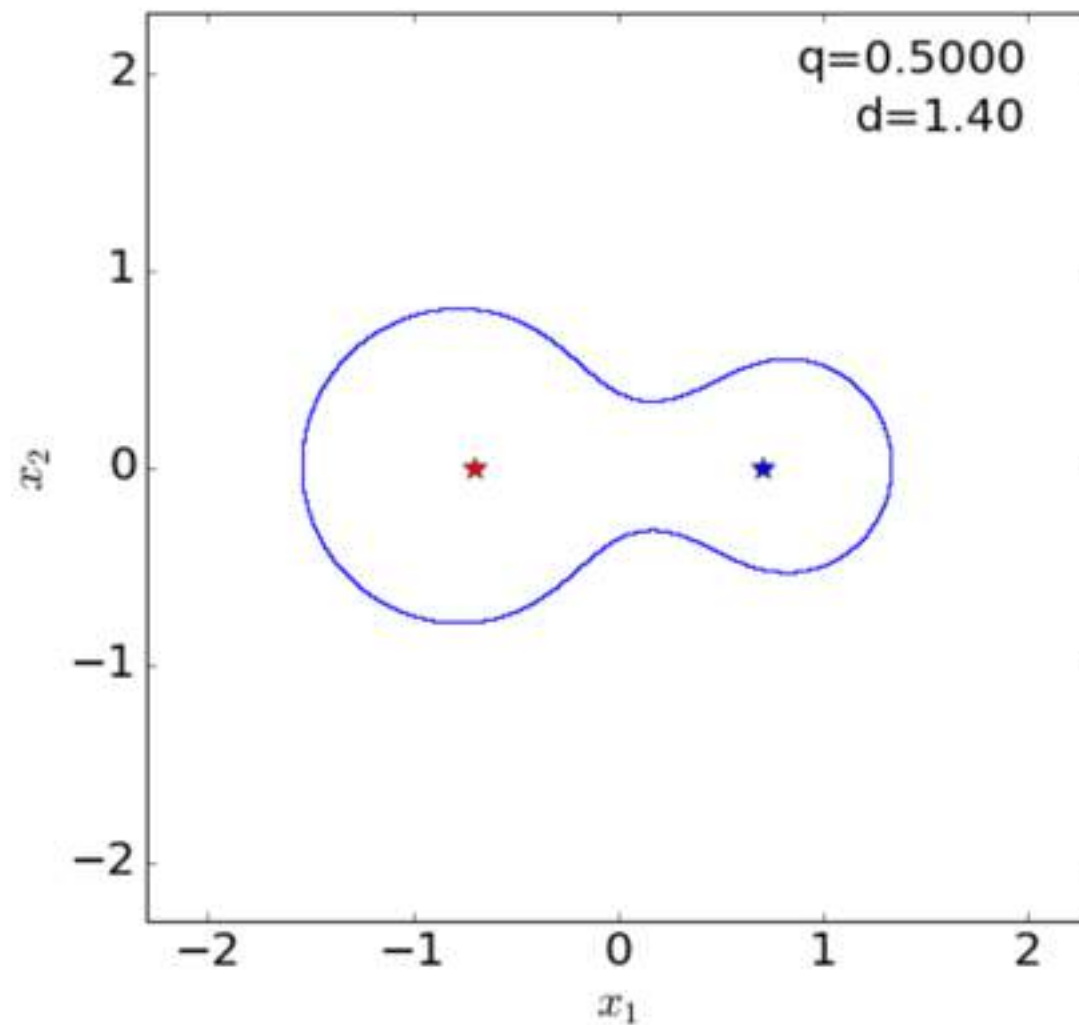


critical lines

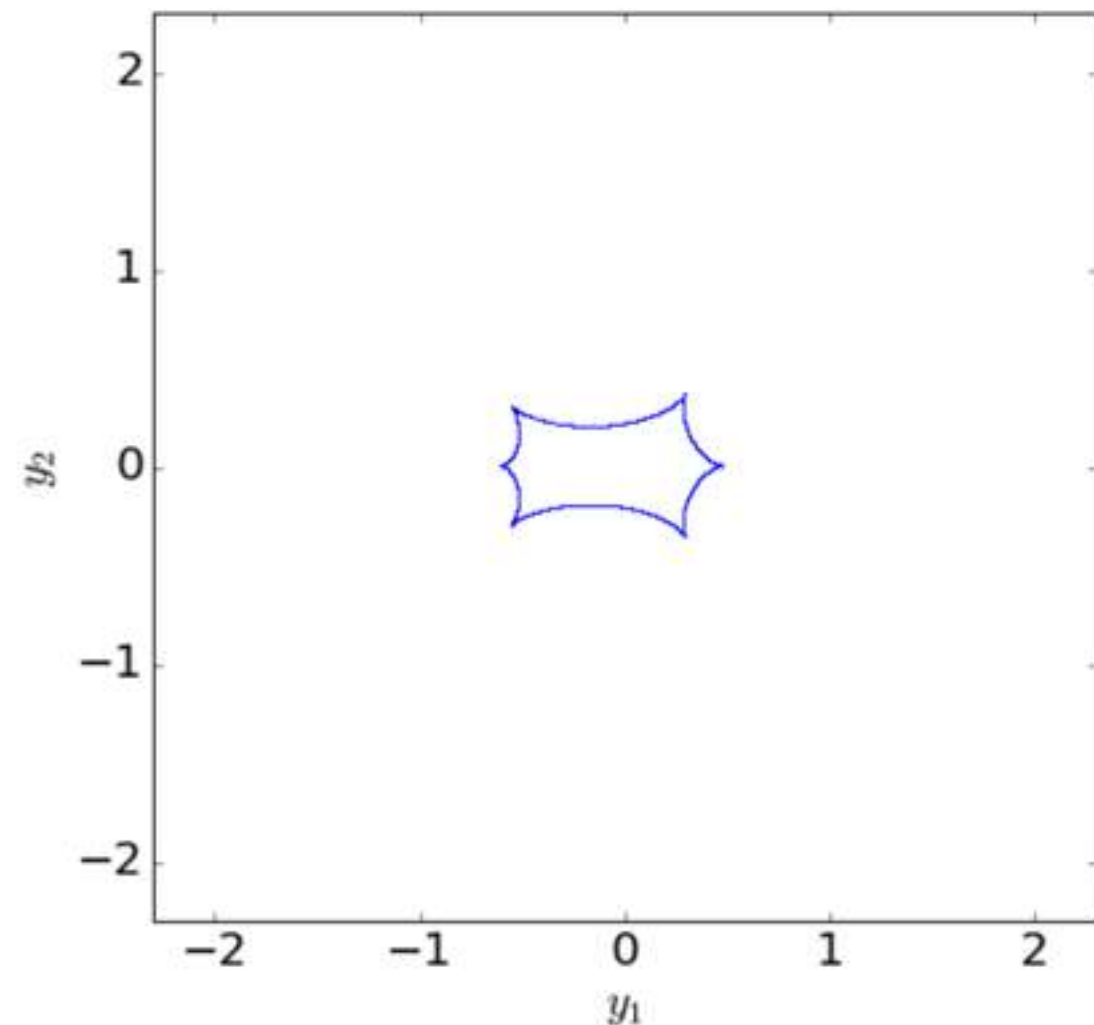


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSEES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

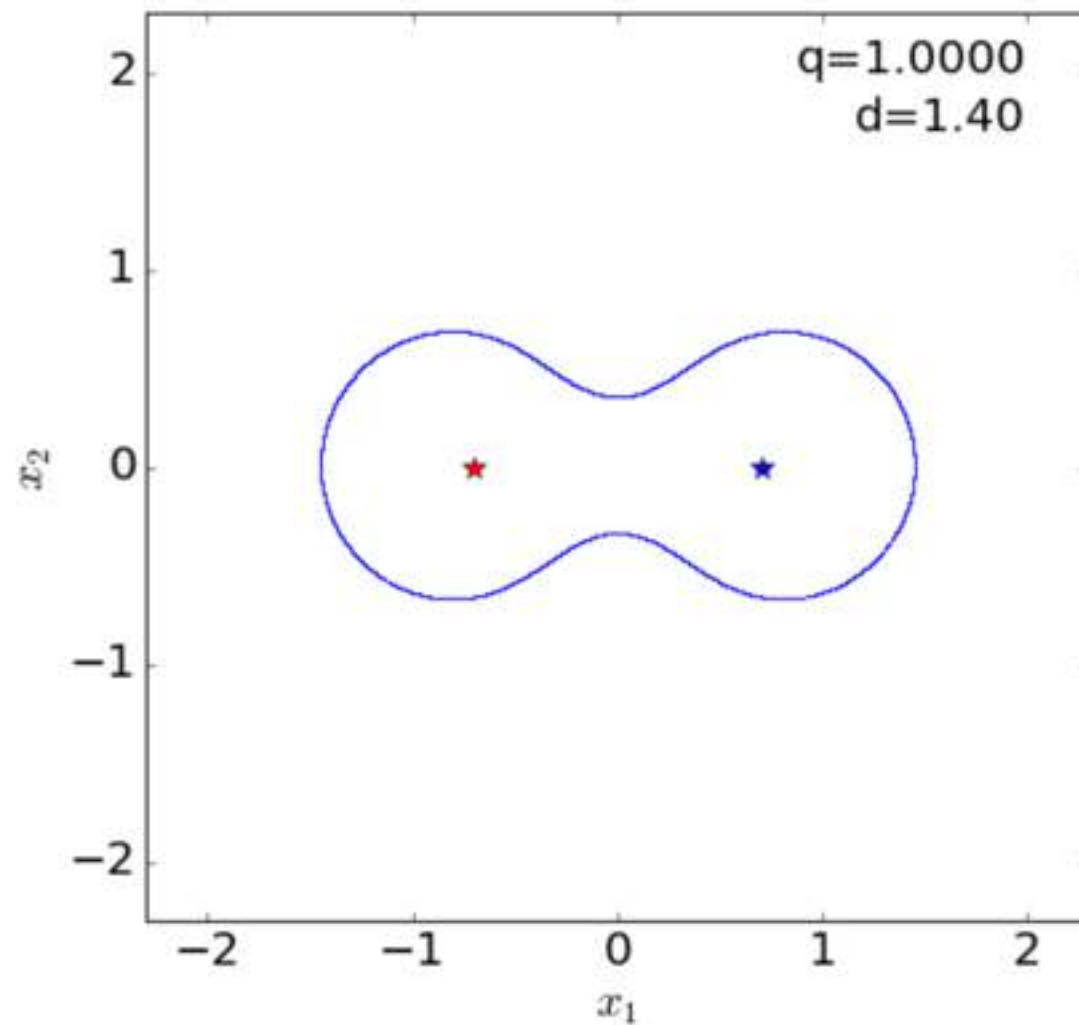


critical lines

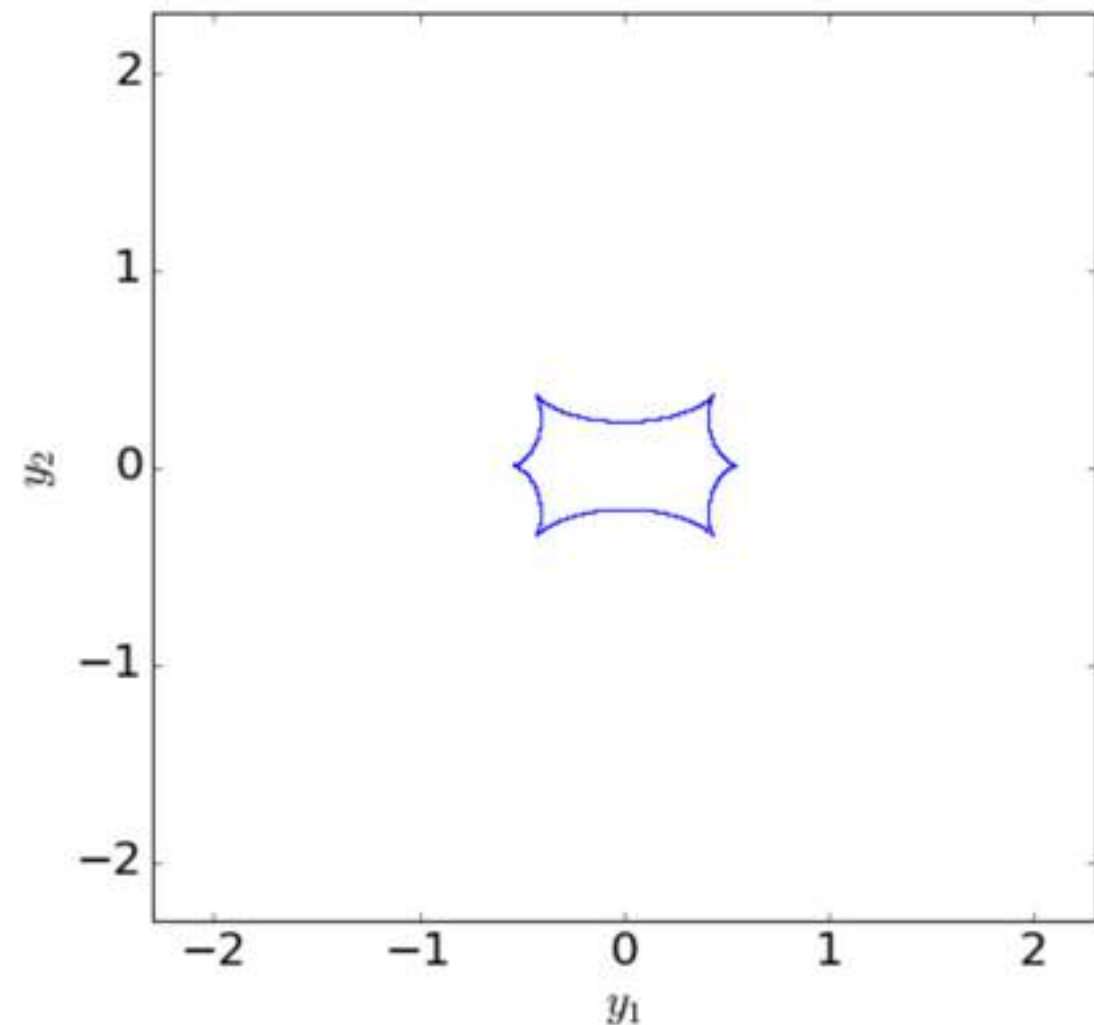


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

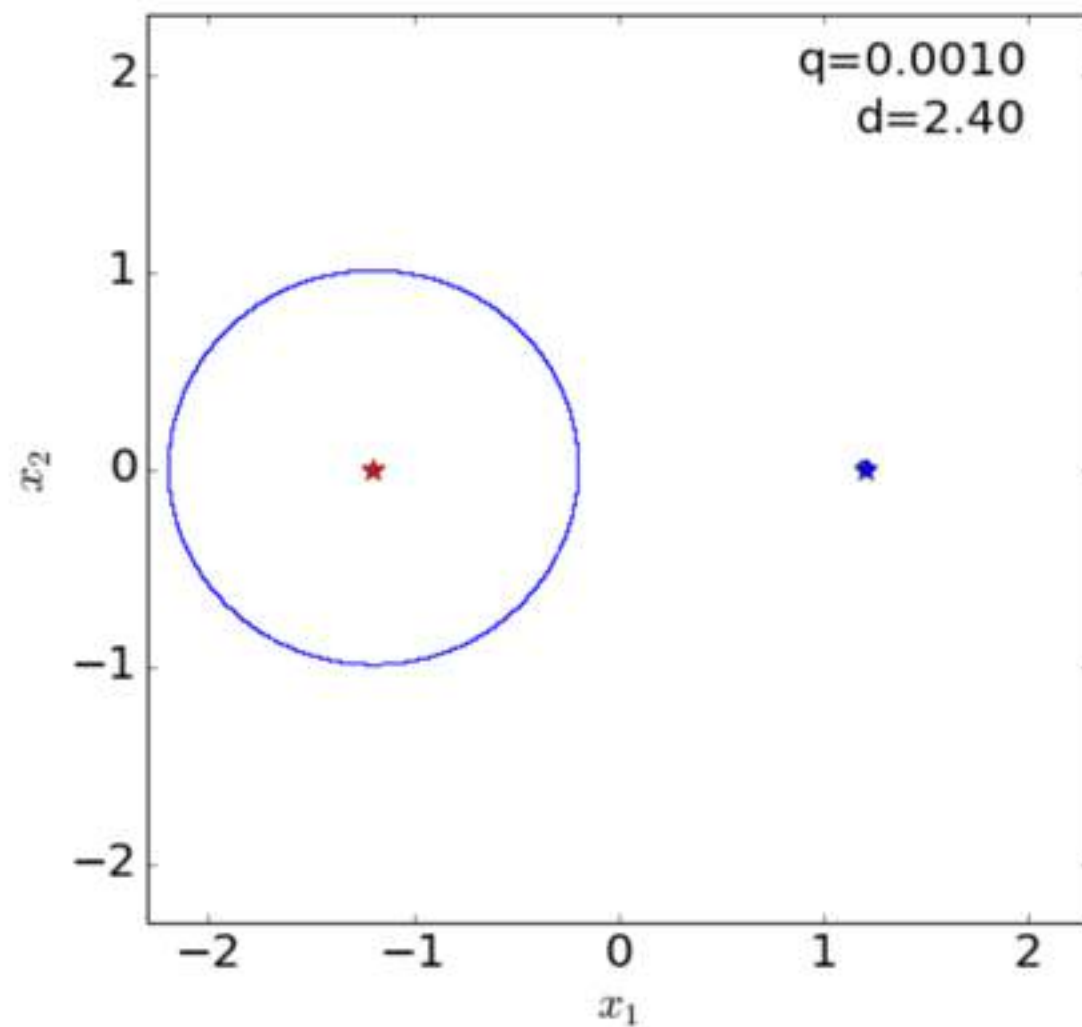


critical lines

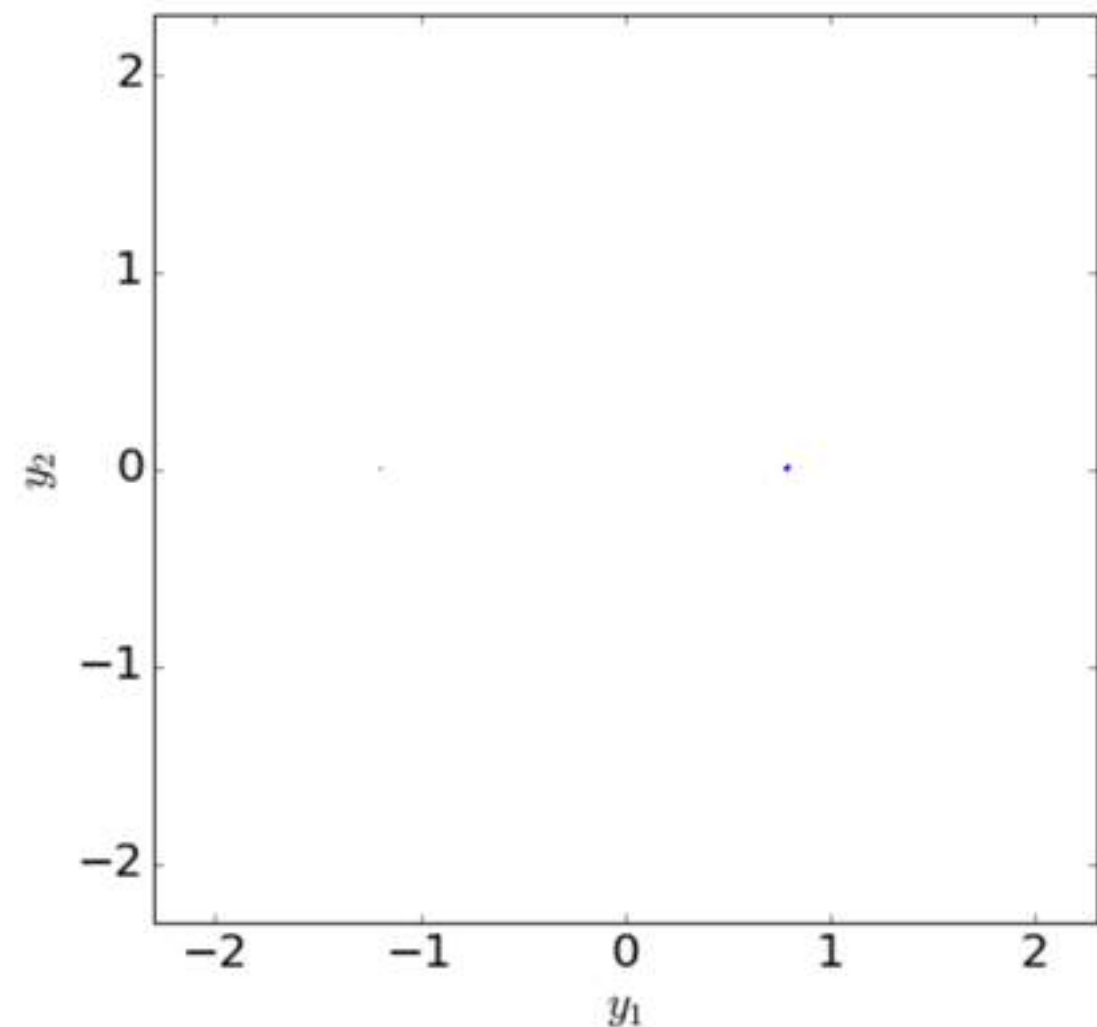


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

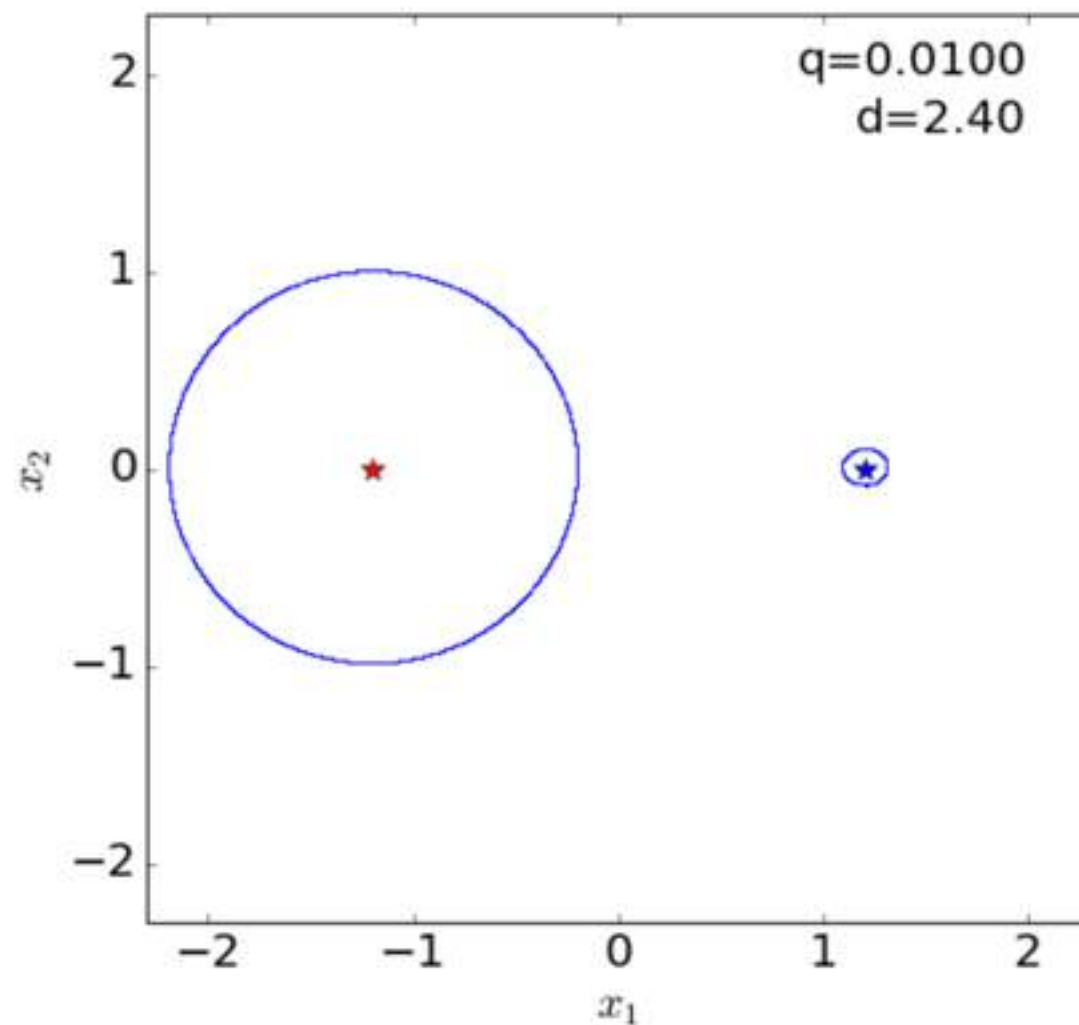


critical lines

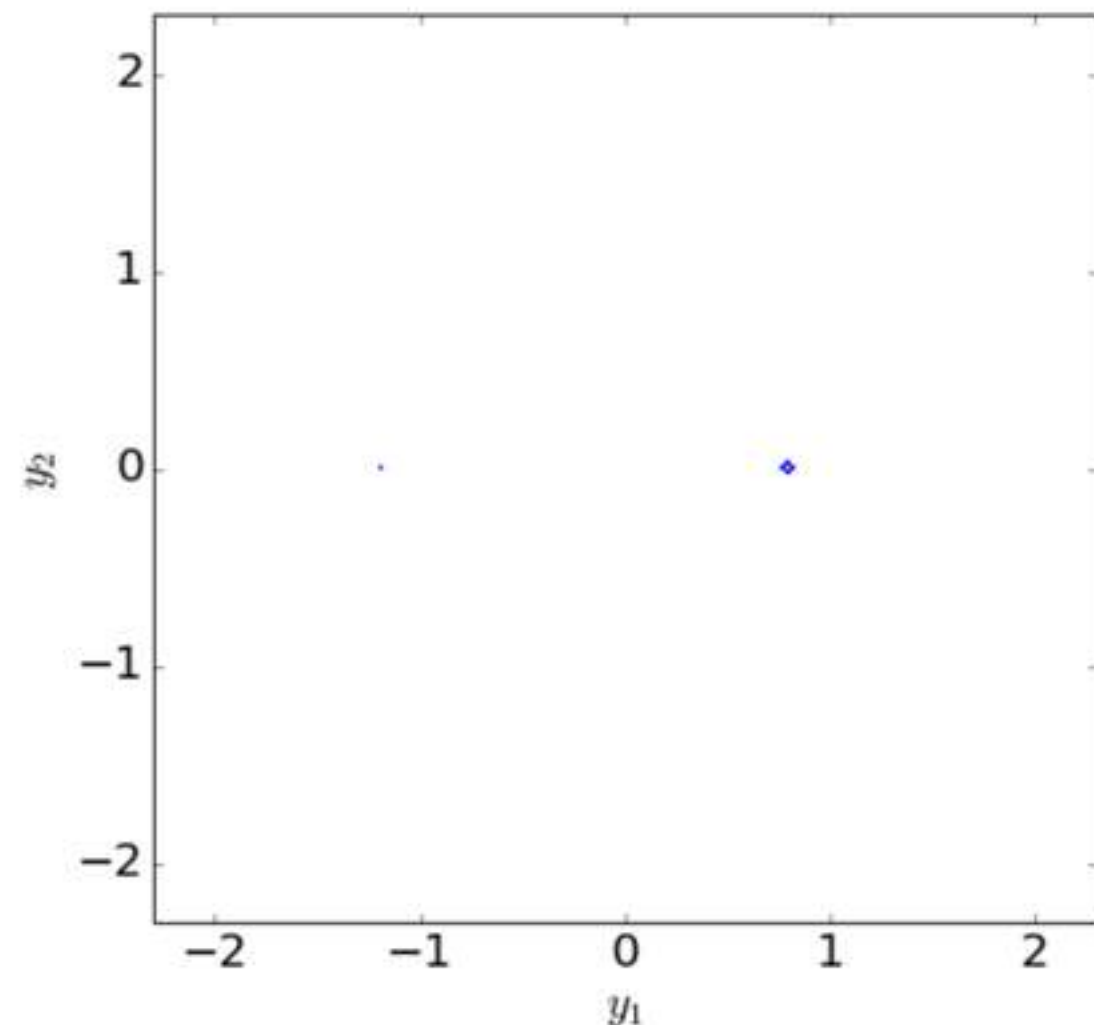


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

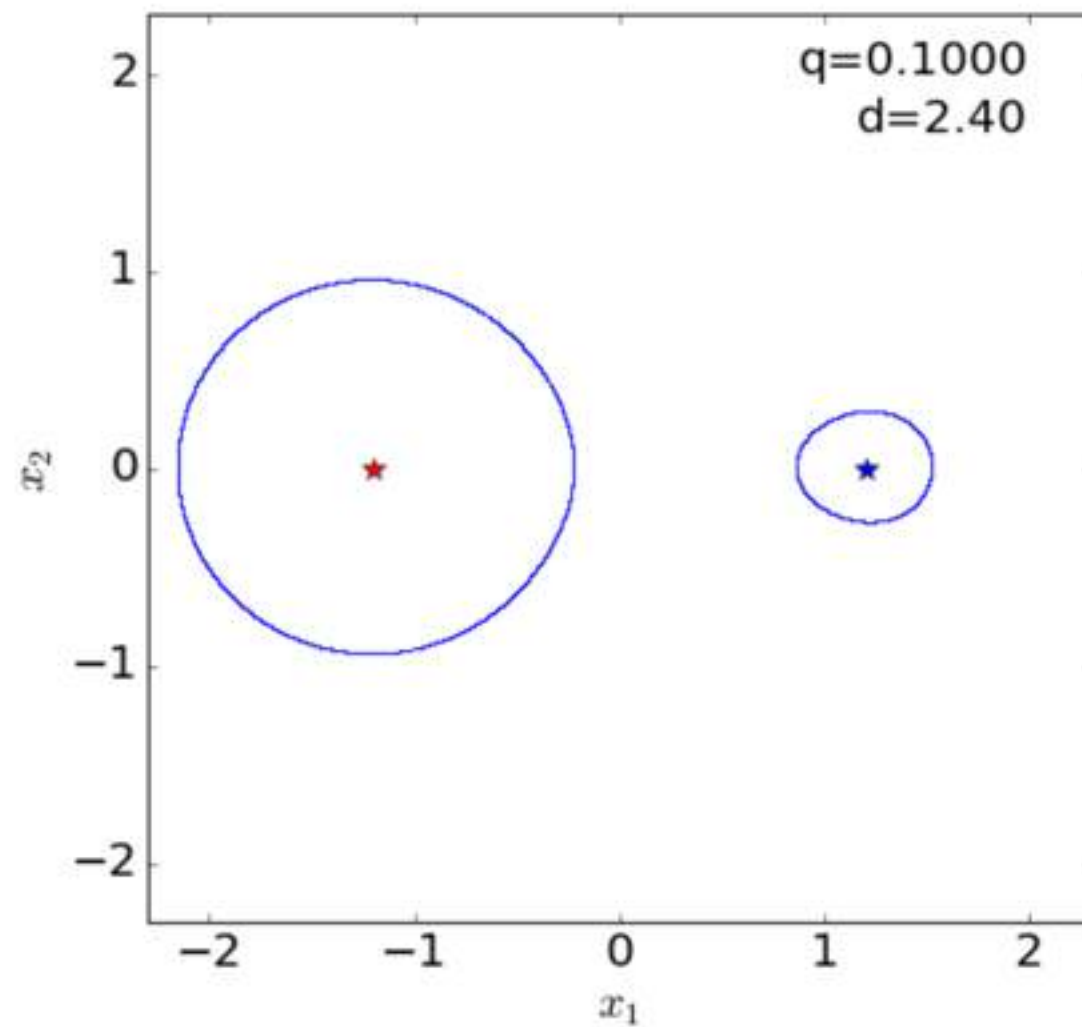


critical lines

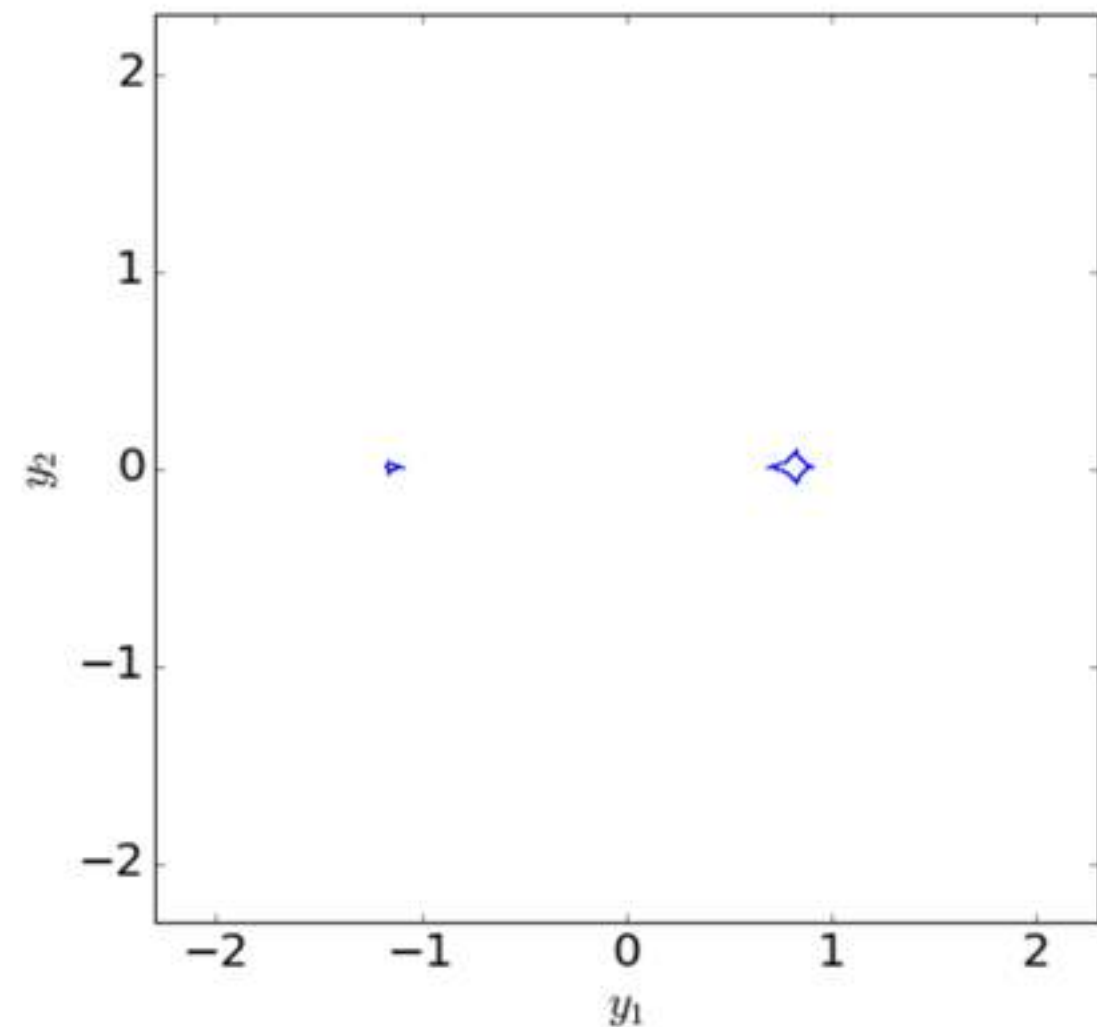


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE

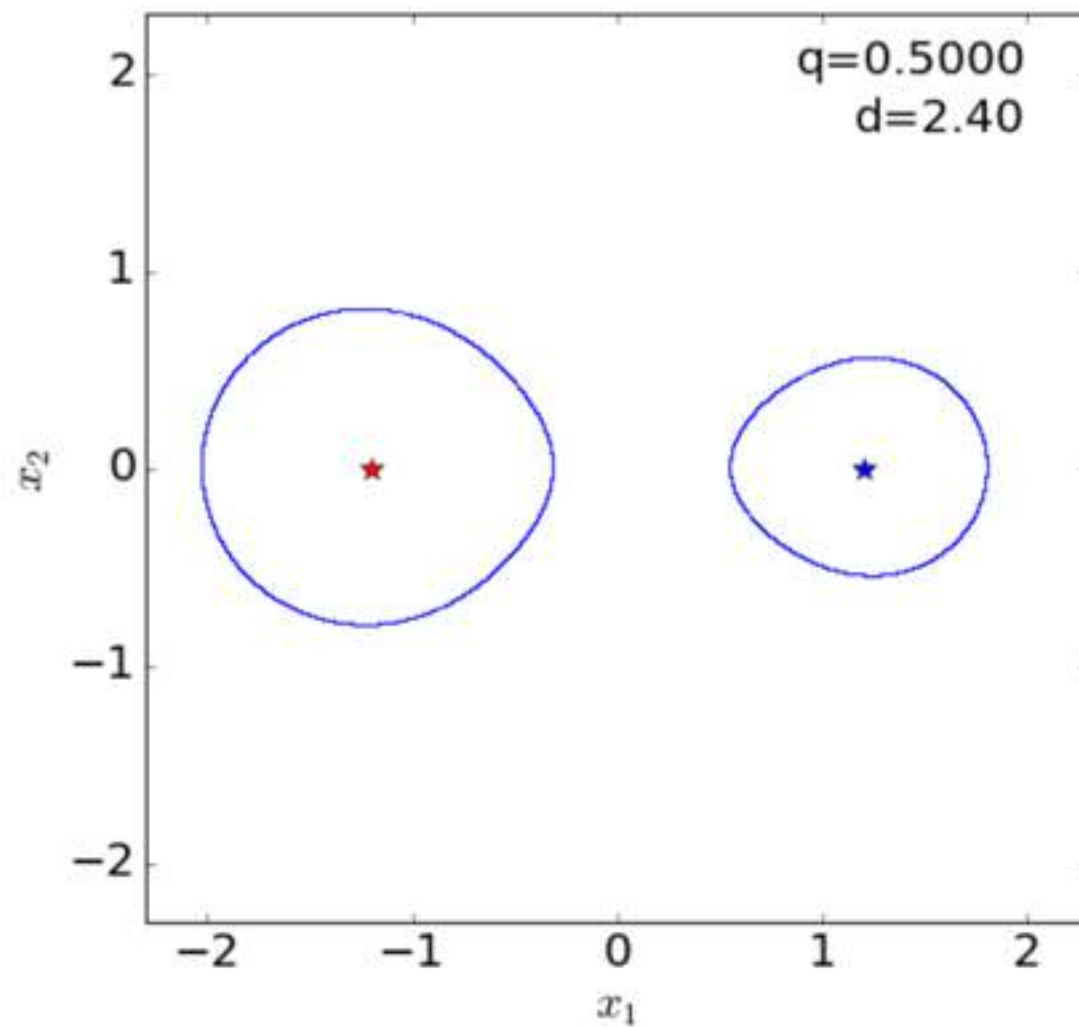


critical lines

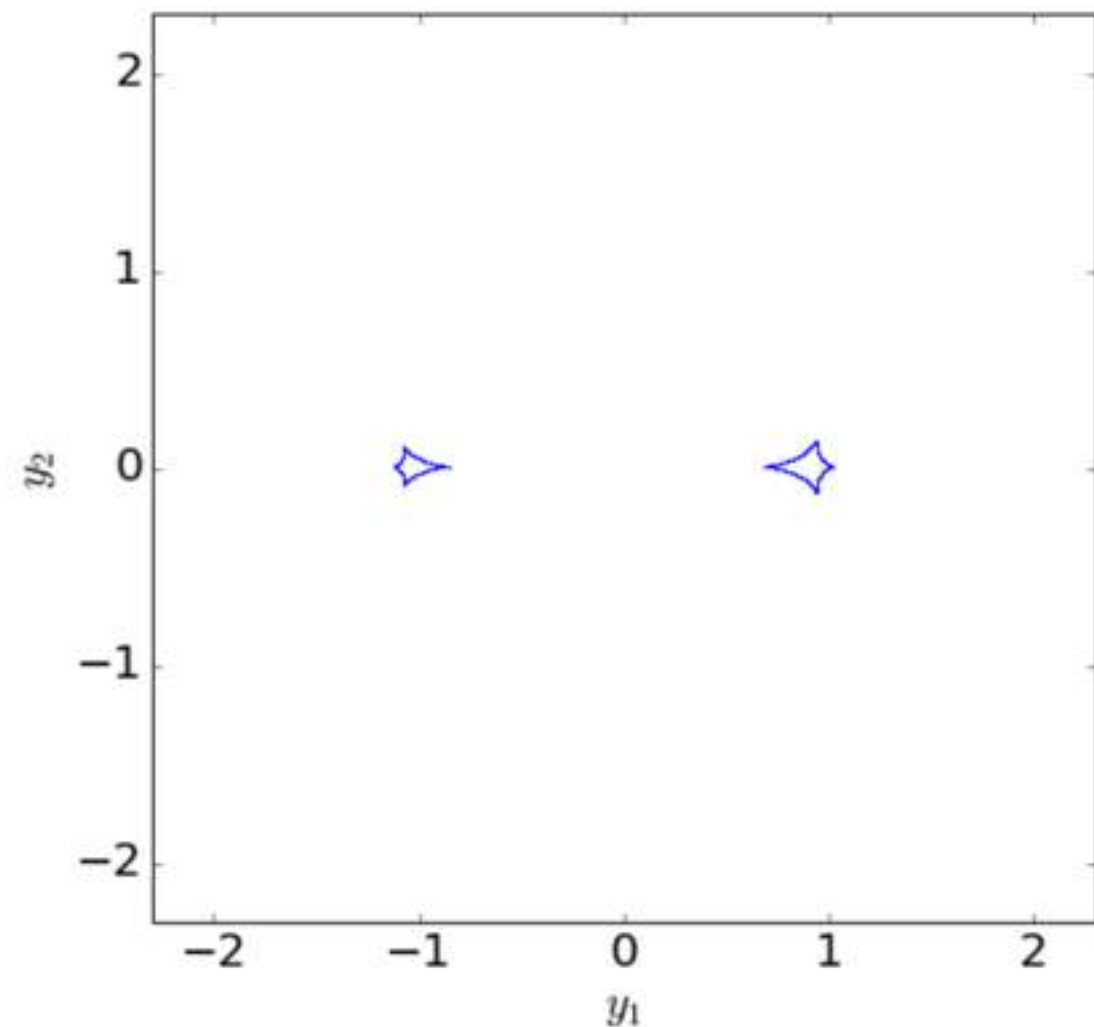


caustics

BINARY LENSES: TWO LENSES WITH THE VARYING MASS AND FIXED DISTANCE



critical lines



caustics

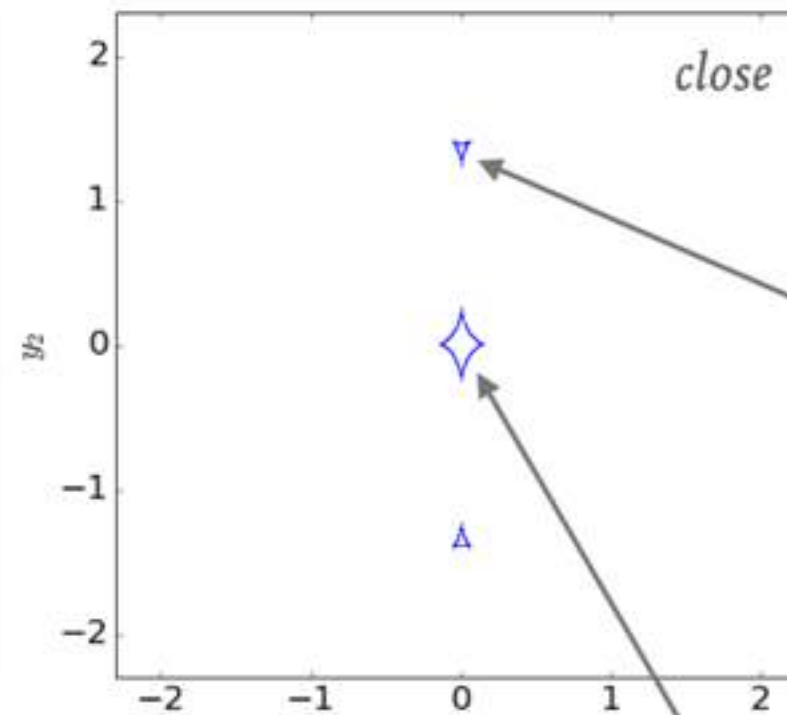
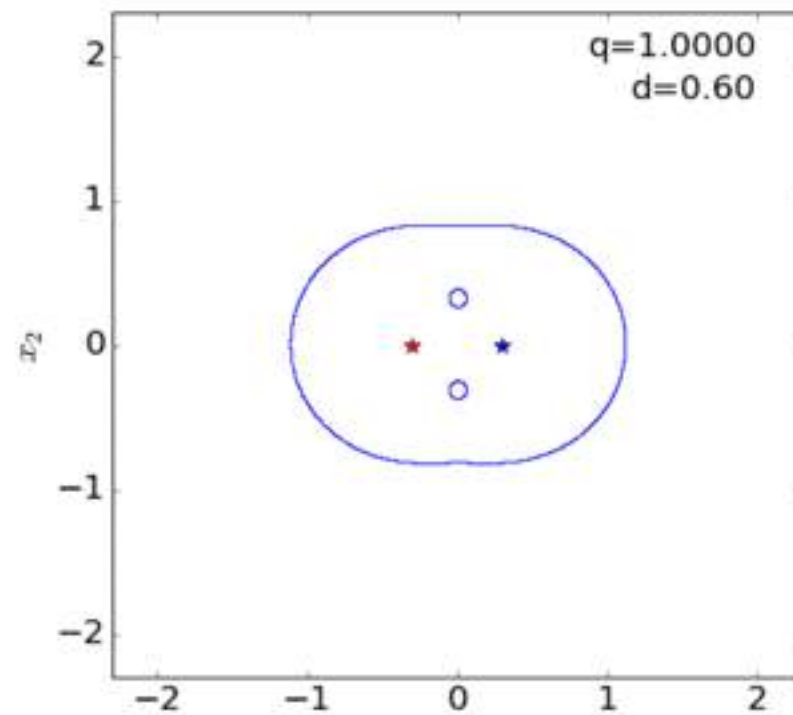
Régimenes

- wide, $d > 1$, 2 cáusticas, 4 cúspides cada
- intermediate, $d = 1$, 1 cáustica, 6 cúspides
- $d = 1/\sqrt{8} \simeq 0.35$ los “bucles” de las cc se destacan
- close, $d < 0.35$, 3 cáusticas

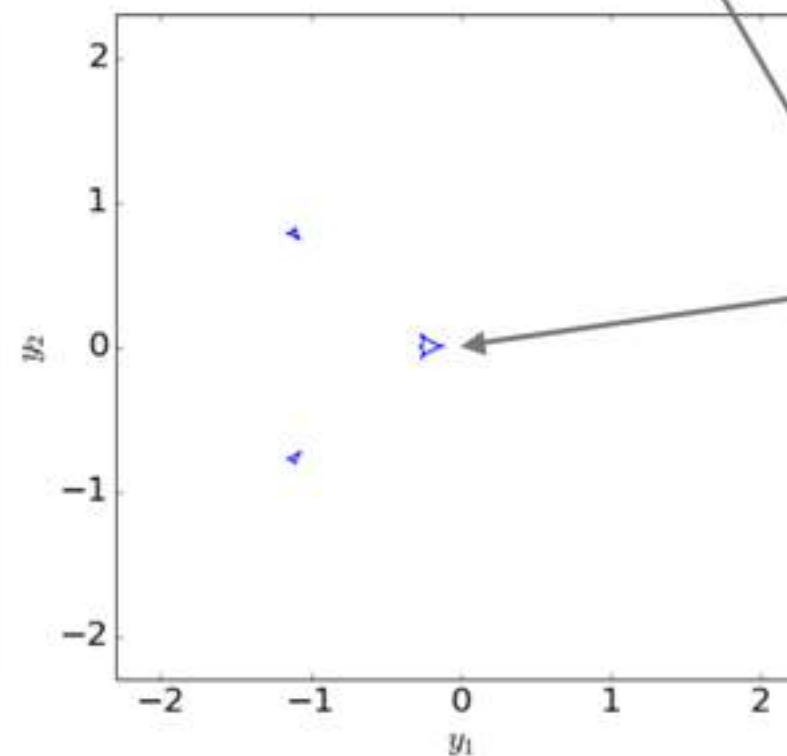
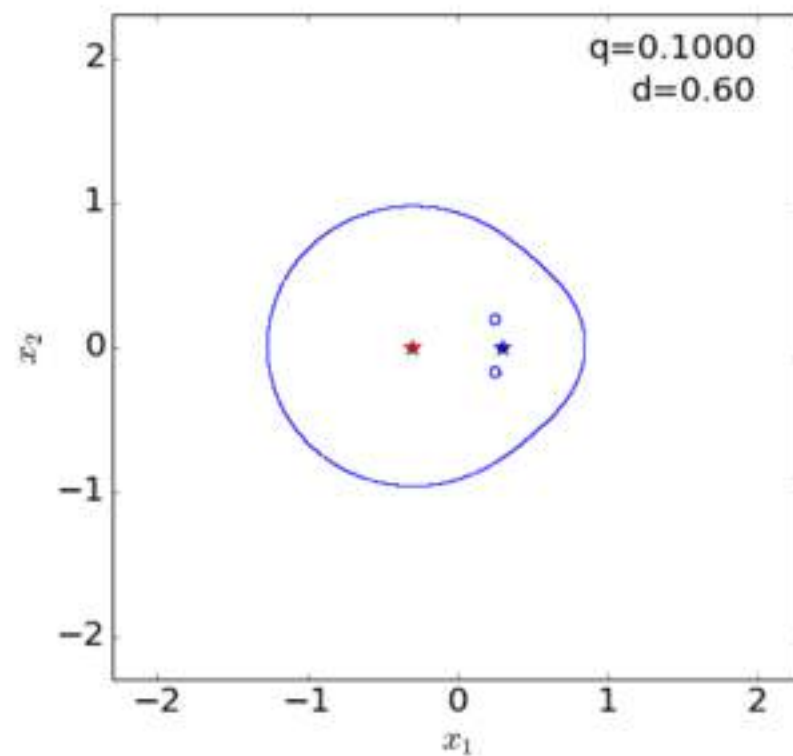
Ejercicio

- Ver como cambia la forma/estructura/topología de las cáusticas y curvas críticas variando el espacio 2D de d y q
- <http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching/notebooks/Lecture%2011.ipynb>

BINARY LENSES: TOPOLOGY CLASSIFICATION

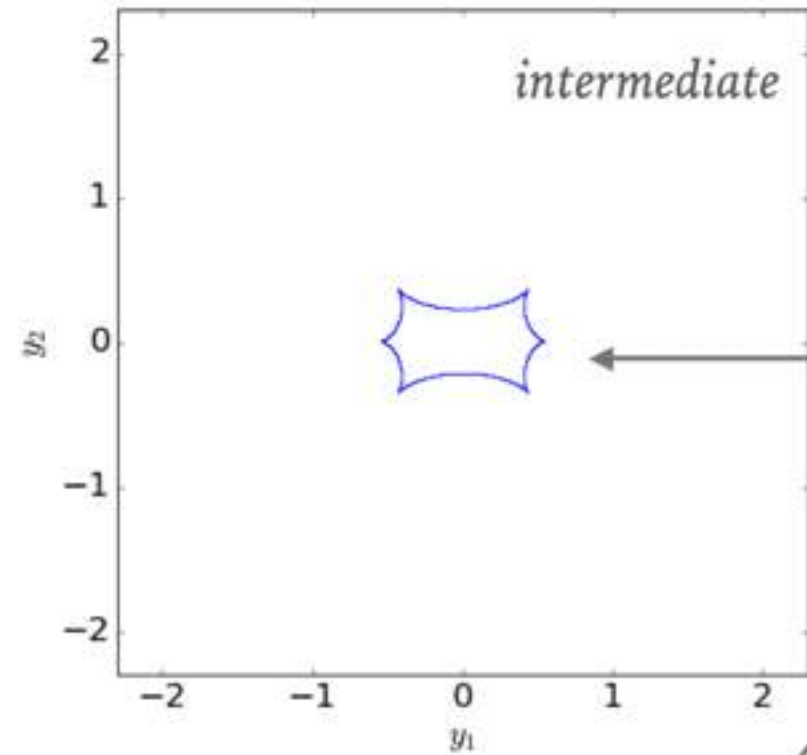
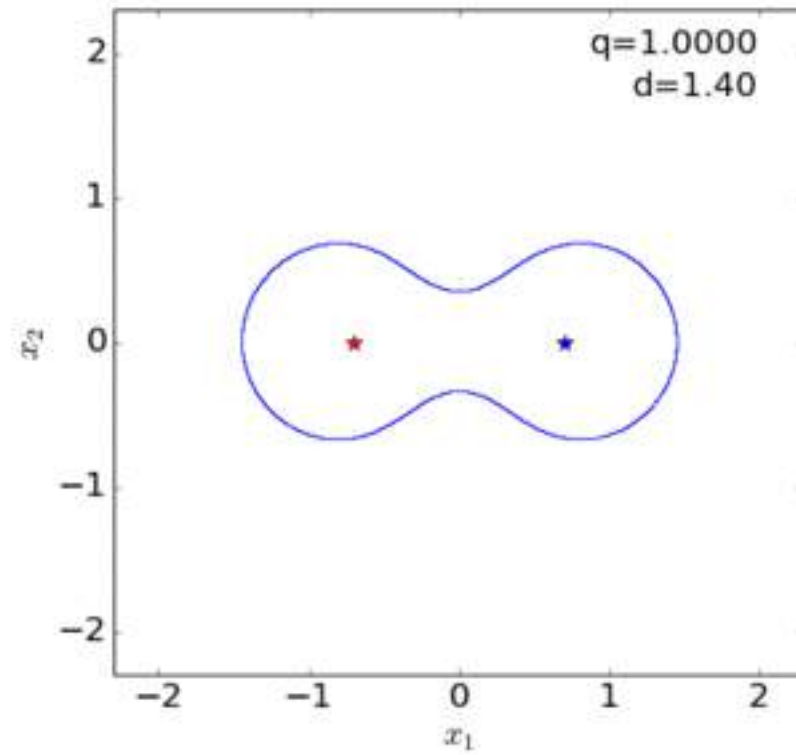


*two
triangular
caustics*

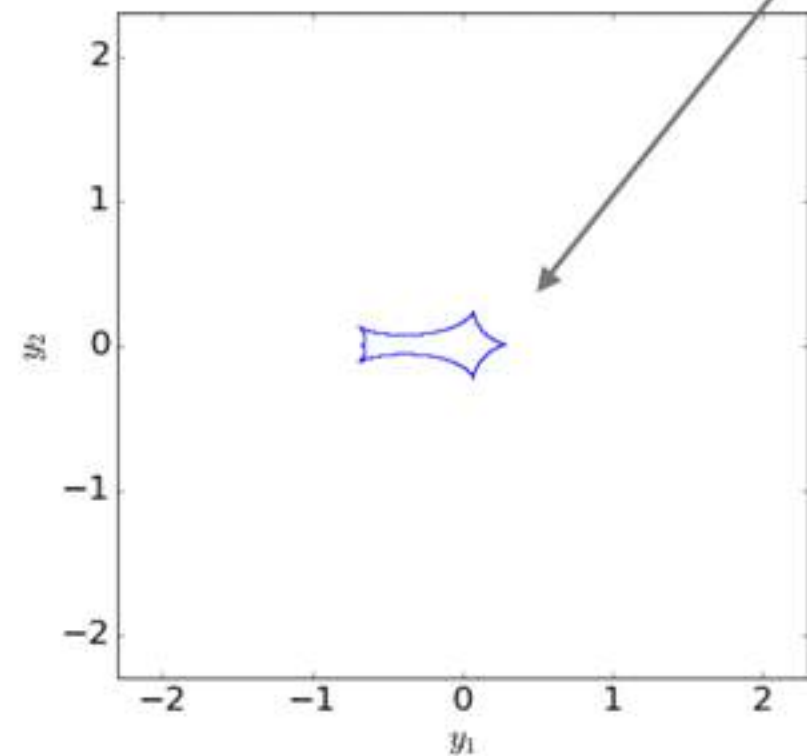
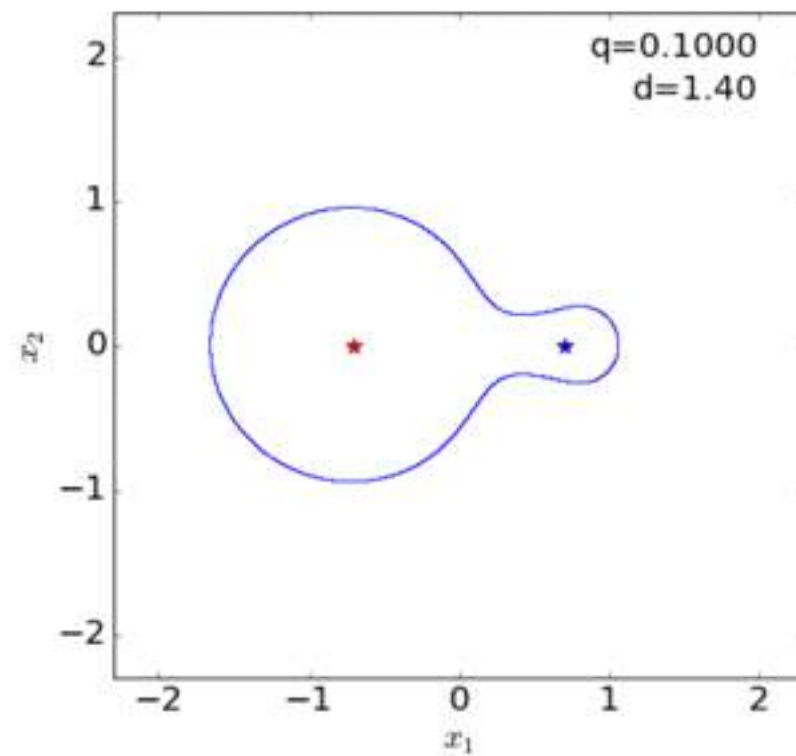


*single 4-cusp
caustic*

BINARY LENSES: TOPOLOGY CLASSIFICATION



*single 6-cusp
caustic*

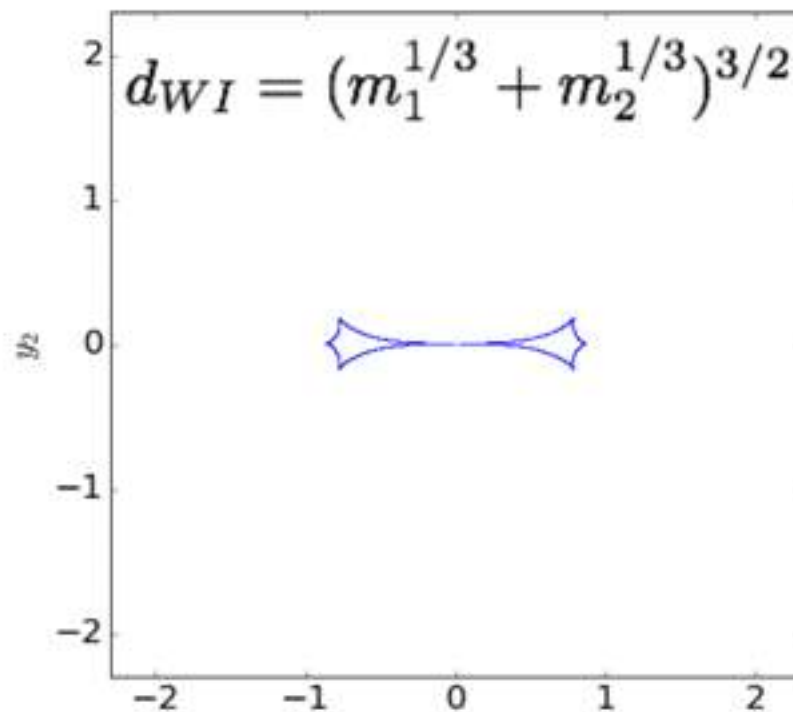
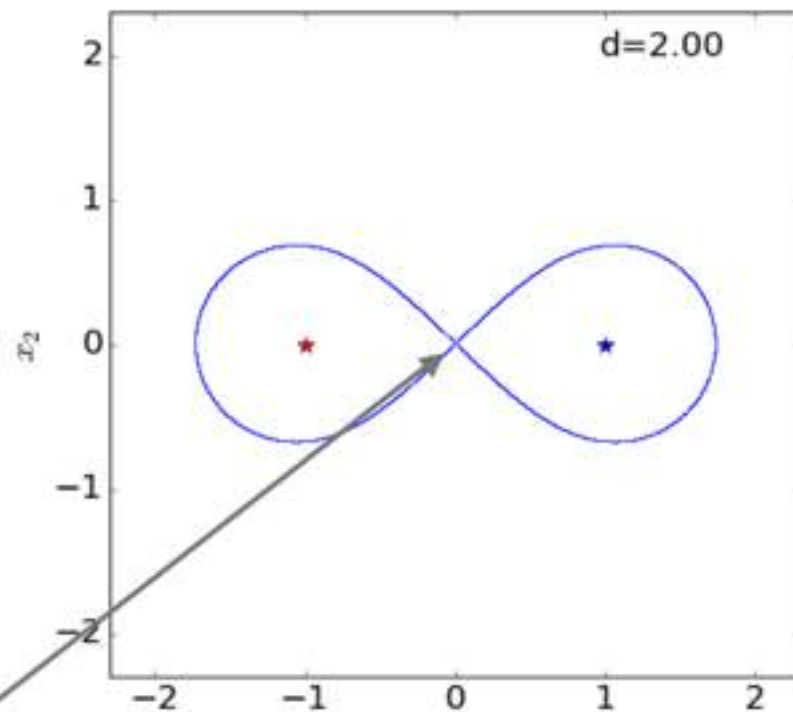


TRANSITIONS

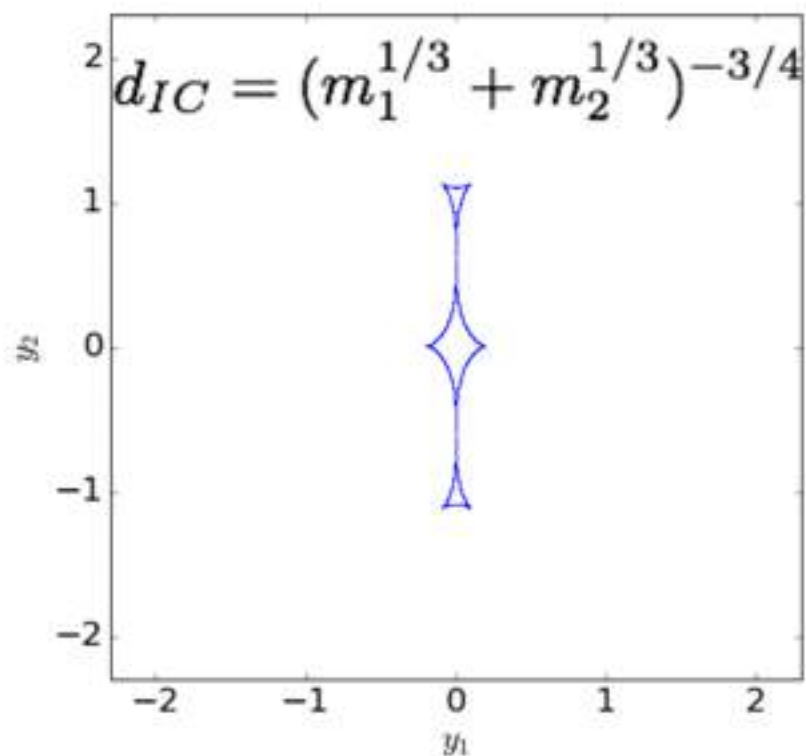
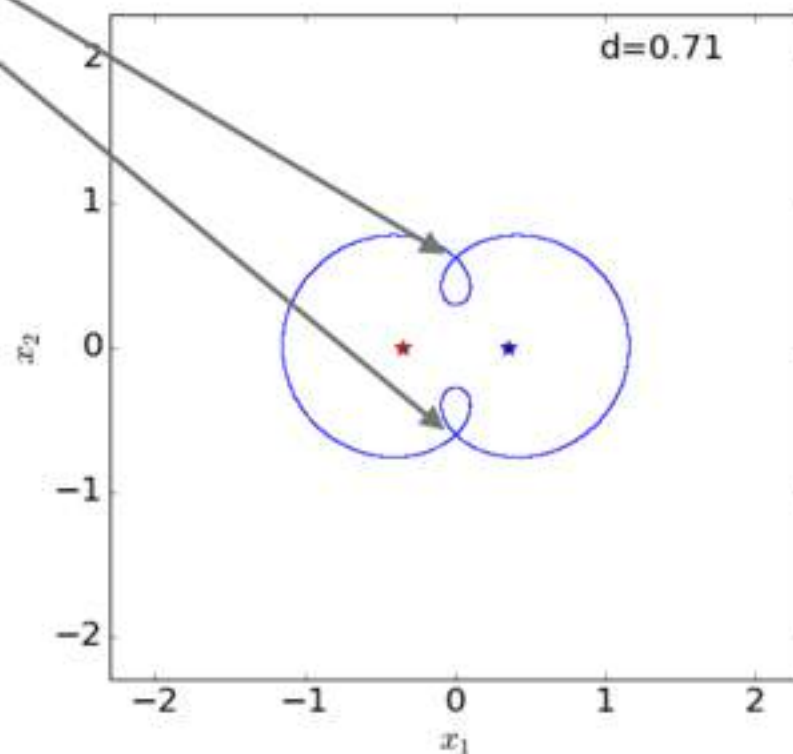
*Touching
critical lines*

$$\det A = 0$$

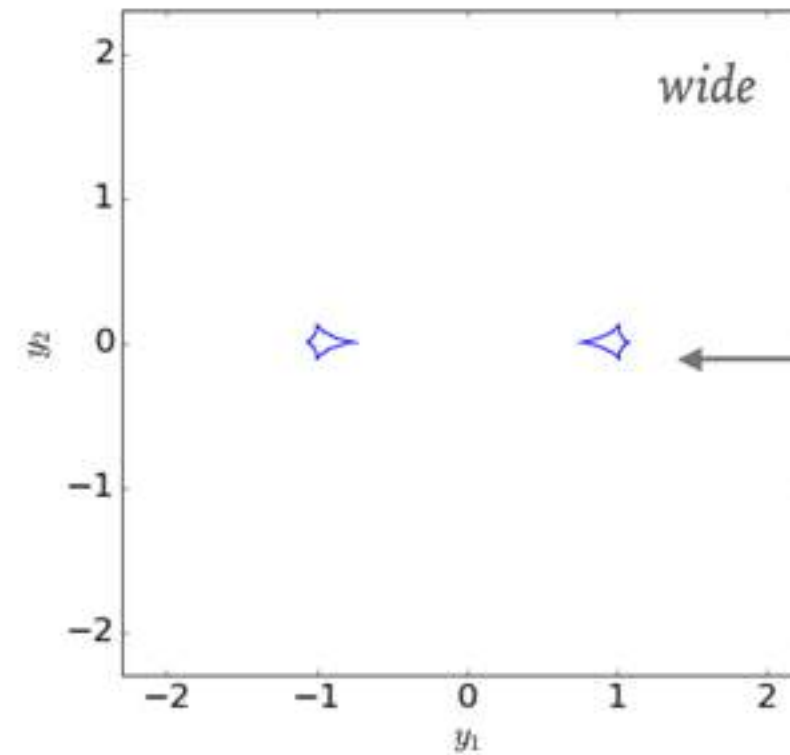
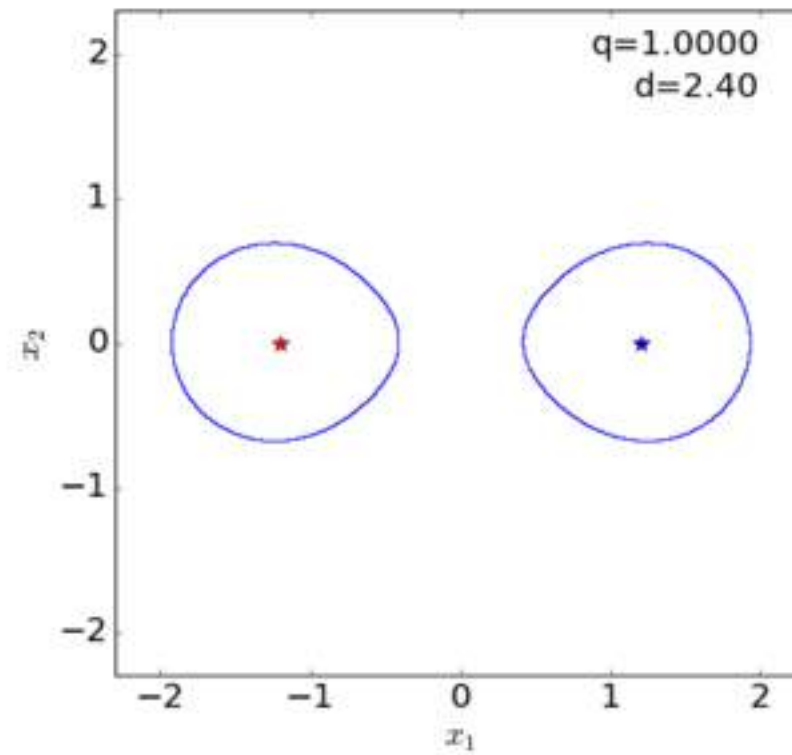
$$\frac{\partial \det A}{\partial z^*} = 0$$



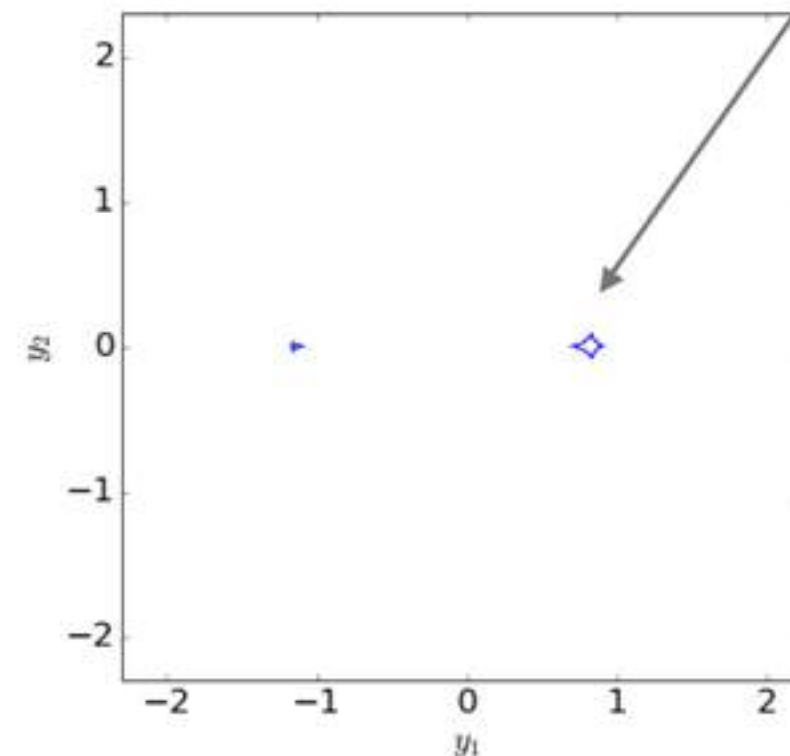
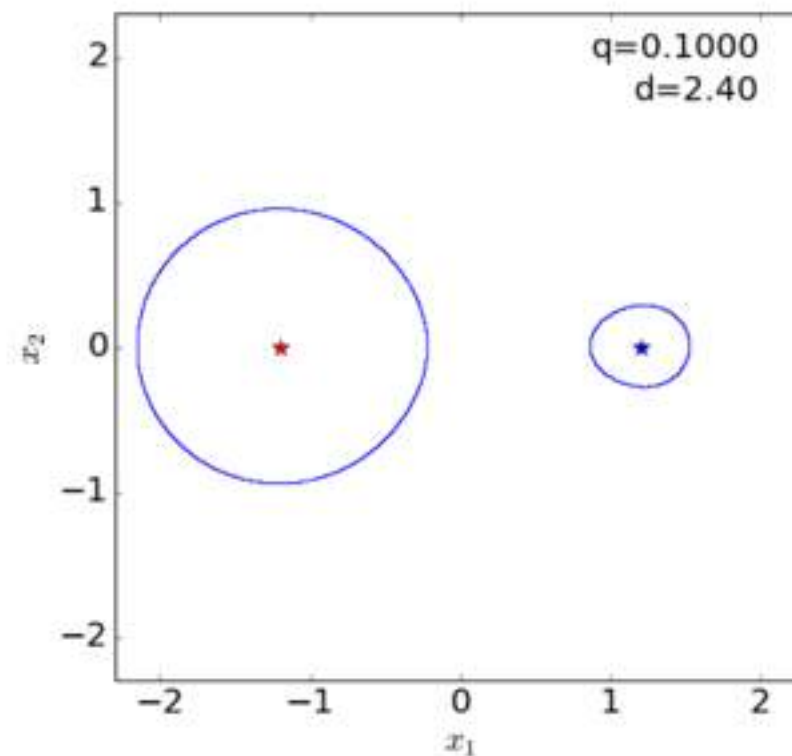
(ejercicio)



BINARY LENSES: TOPOLOGY CLASSIFICATION



separate 4-cusp caustics



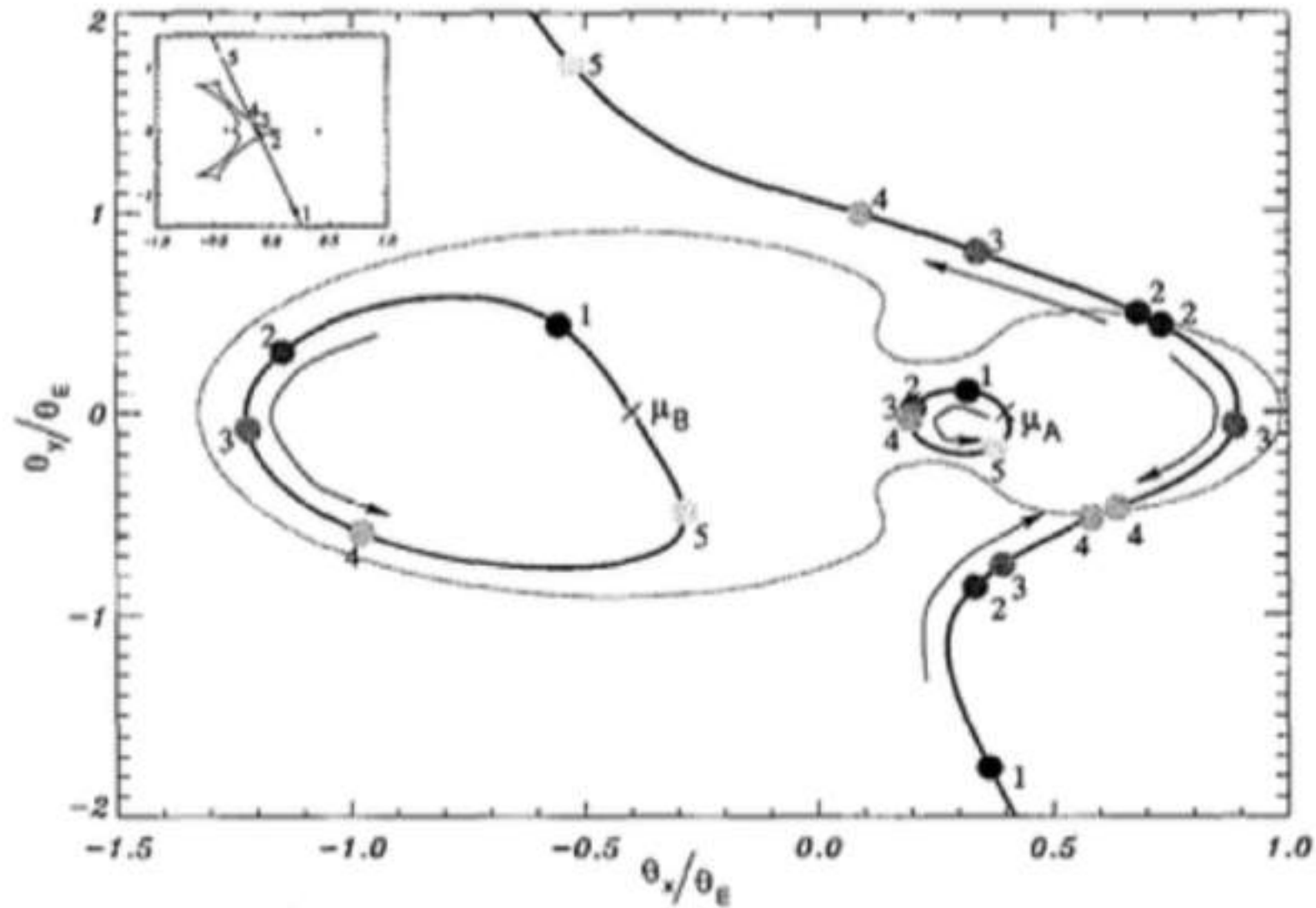
MULTIPLE IMAGES

- Lens equation:
$$z_s = z - \frac{m_1}{z^* - z_1^*} - \frac{m_2}{z^* - z_2^*}$$
 - complex polynomial:
$$p_5(z) = \sum_{i=0}^5 c_i z^i$$
- $$\Delta m = \frac{m_1 - m_2}{2} \quad m = \frac{m_1 + m_2}{2} \quad z_2 = -z_1 \quad z_1 = z_1^*$$
- $$c_0 = z_1^2 [4(\Delta m)^2 z_s + 4m\Delta m z_1 + 4\Delta m z_s z_s^* z_1 + 2m z_s^* z_1^2 + z_s z_s^{*2} z_1^2 - 2\Delta m z_1^3 - z_s z_1^4]$$
- $$c_1 = -8m\Delta m z_s z_1 - 4(\Delta m)^2 z_1^2 - 4m^2 z_1^2 - 4m z_s z_s^* z_1^2 - 4\Delta m z_s^* z_1^3 - z_s^{*2} z_1^4 + z_1^6$$
- $$c_2 = 4m^2 z_s + 4m\Delta m z_1 - 4\Delta m z_s z_s^* z_1 - 2z_s z_s^{*2} z_1^2 + 4\Delta m z_1^3 + 2z_s z_1^4$$
- $$c_3 = 4m z_s z_s^* + 4\Delta m z_s^* z_1 + 2z_s^{*2} z_1^2 - 2z_1^4$$
- $$c_4 = -2m z_s^* + z_s z_s^{*2} - 2\Delta m z_1 - z_s z_1^2$$
- $$c_5 = z_1^2 - z_s^{*2}$$

Witt & Mao, 1995,
ApJ, 447, L105

- 3 or 5 images

MULTIPLE IMAGES



Mollerach & Roulet, "Gravitational Lensing and Microlensing"

IMAGE MAGNIFICATION

- magnification at the image position:

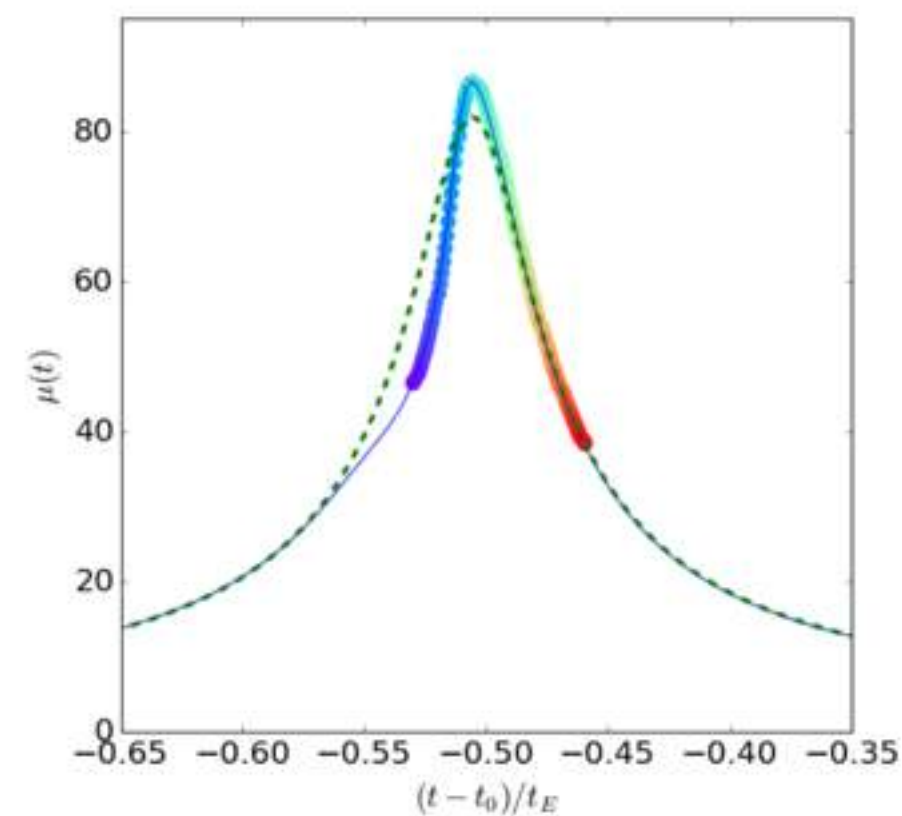
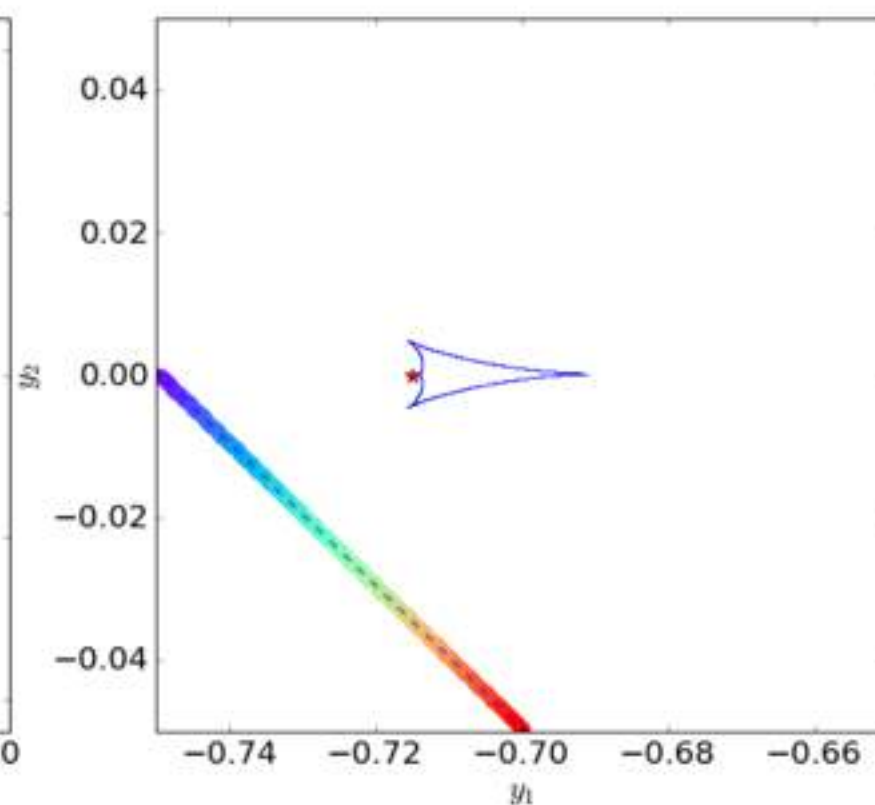
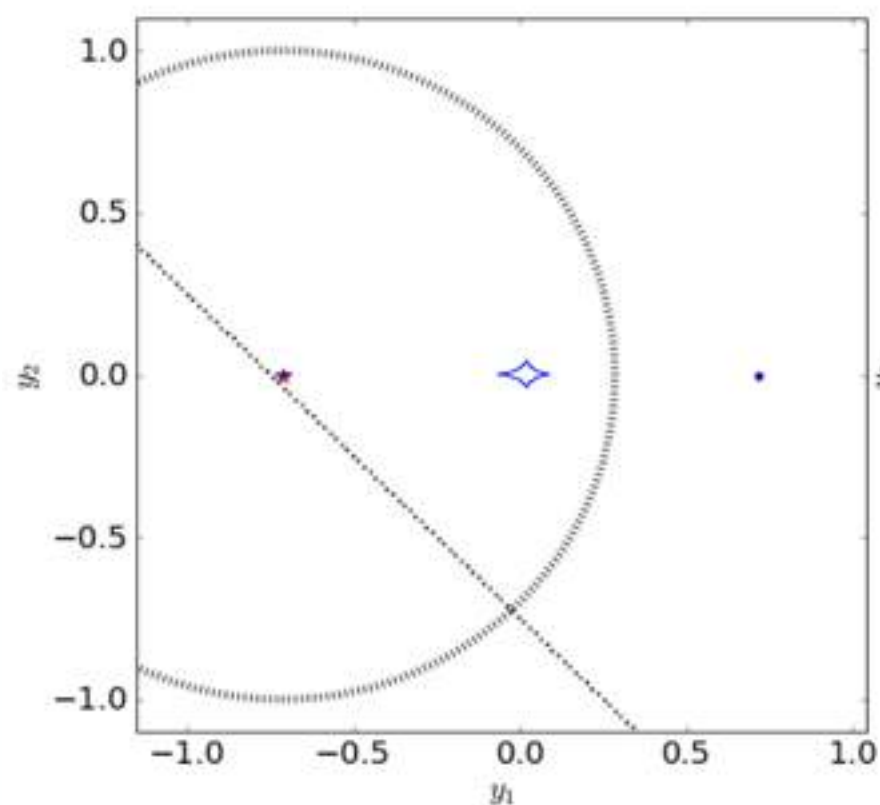
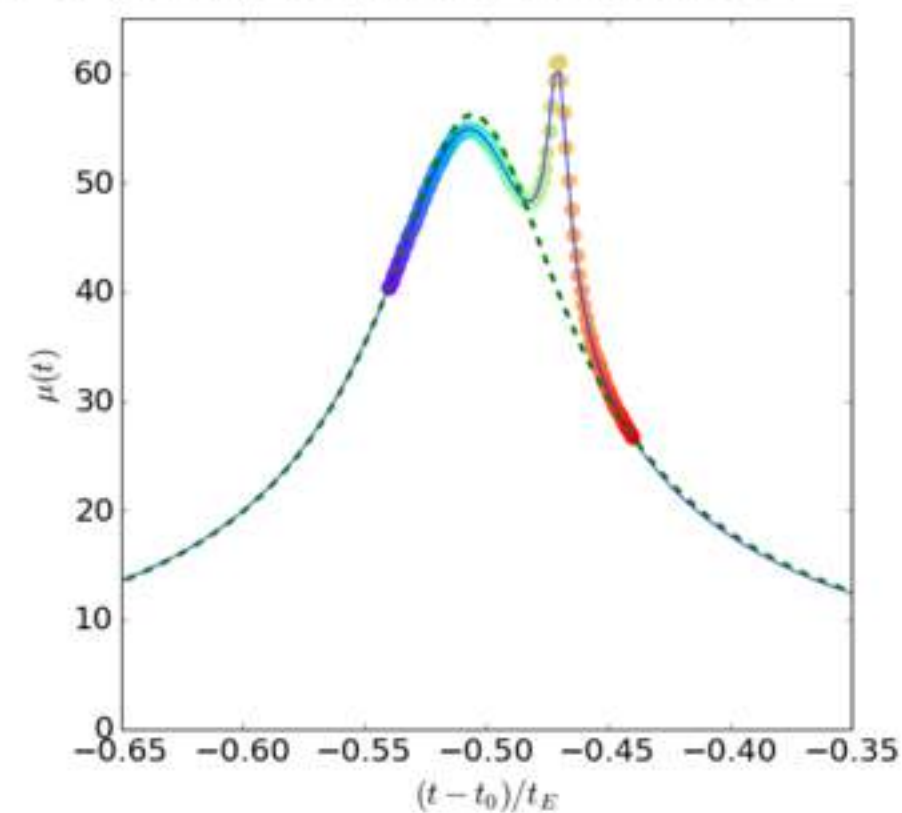
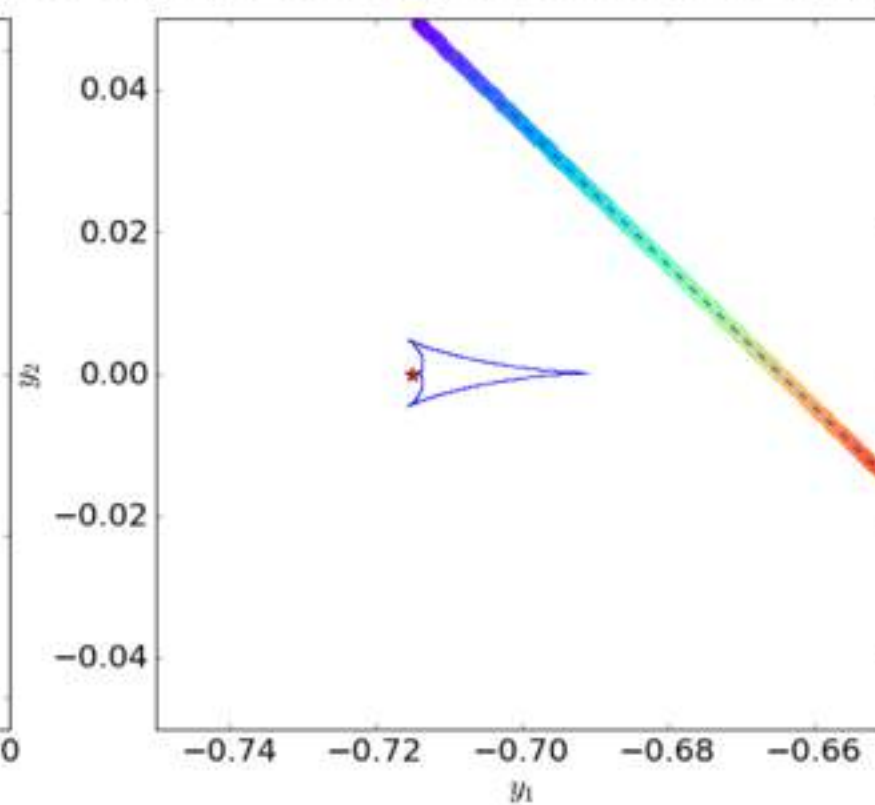
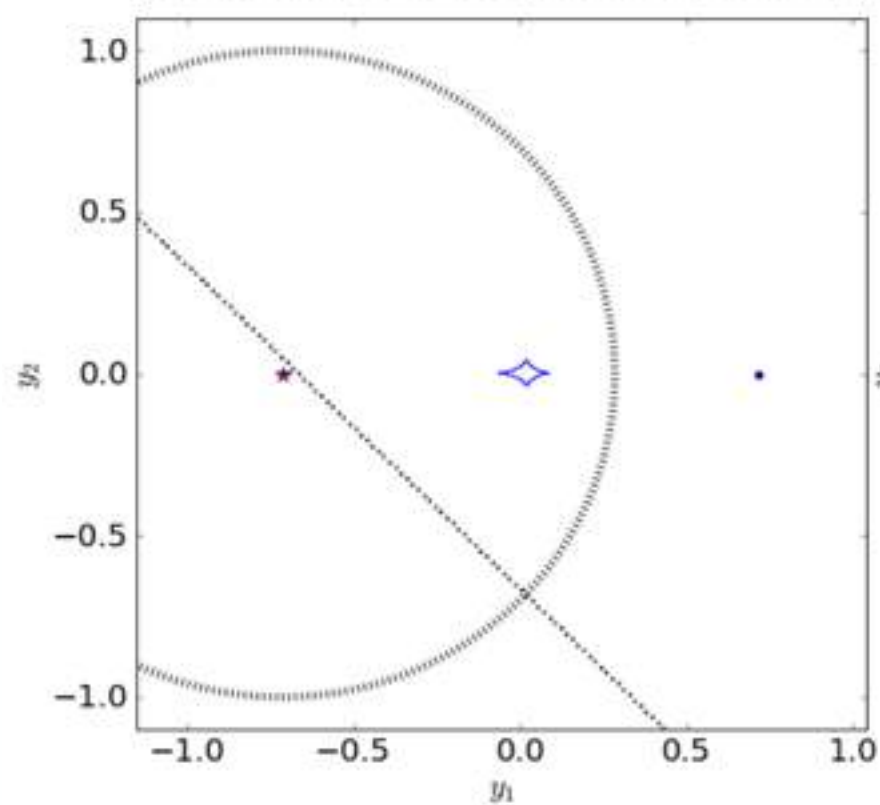
$$\mu = \det A^{-1} = \left[1 - \left| \frac{m_1}{(z^* - z_1^*)^2} + \frac{m_2}{(z^* - z_2^*)^2} \right| \right]^{-1}$$

- total magnification:

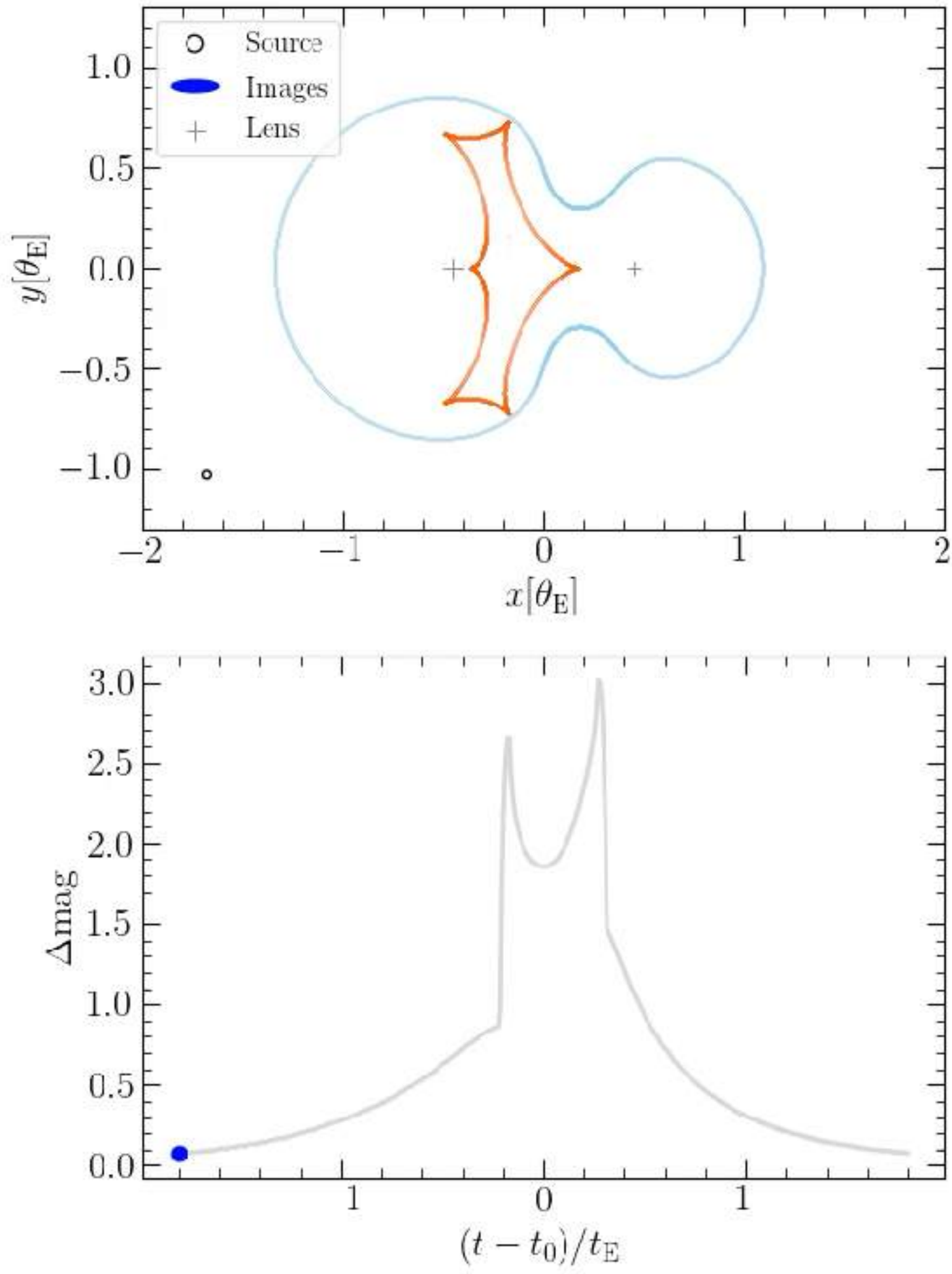
$$\mu_{tot} = \sum_{i=1}^{n_i} |\mu_i|$$

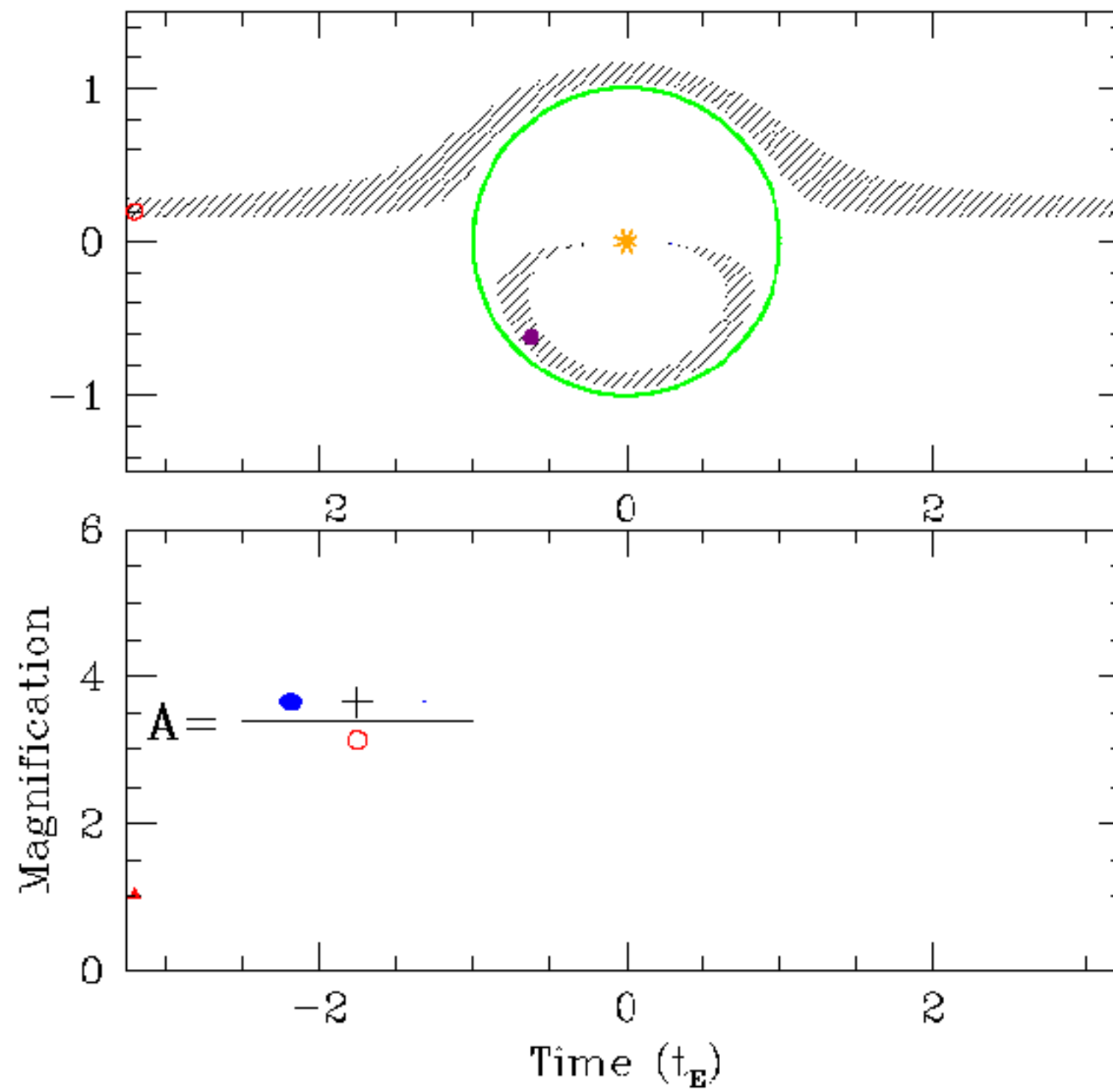
- of course, the magnification varies as a function of z ...

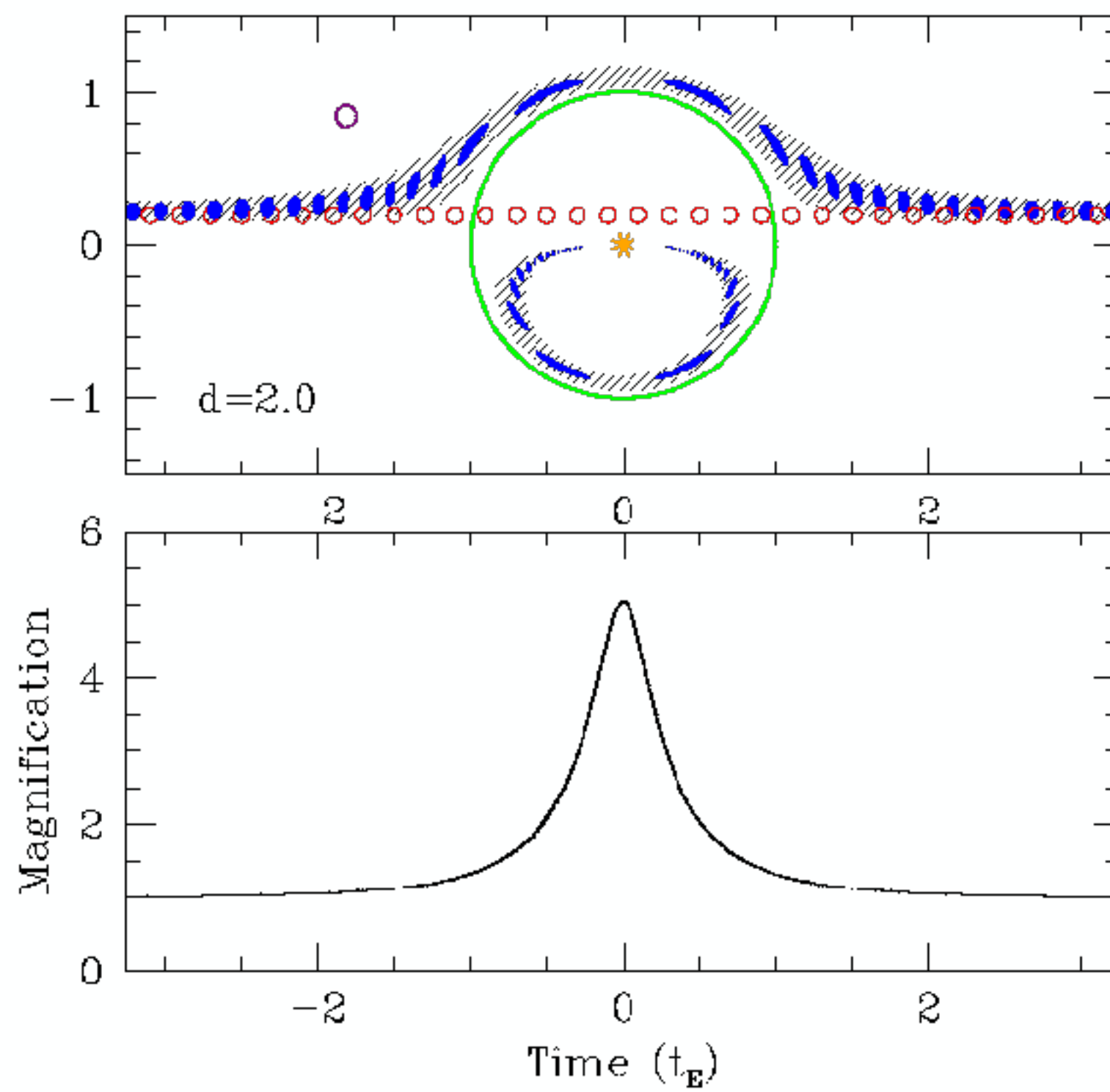
CENTRAL CUSP PERTURBATIONS

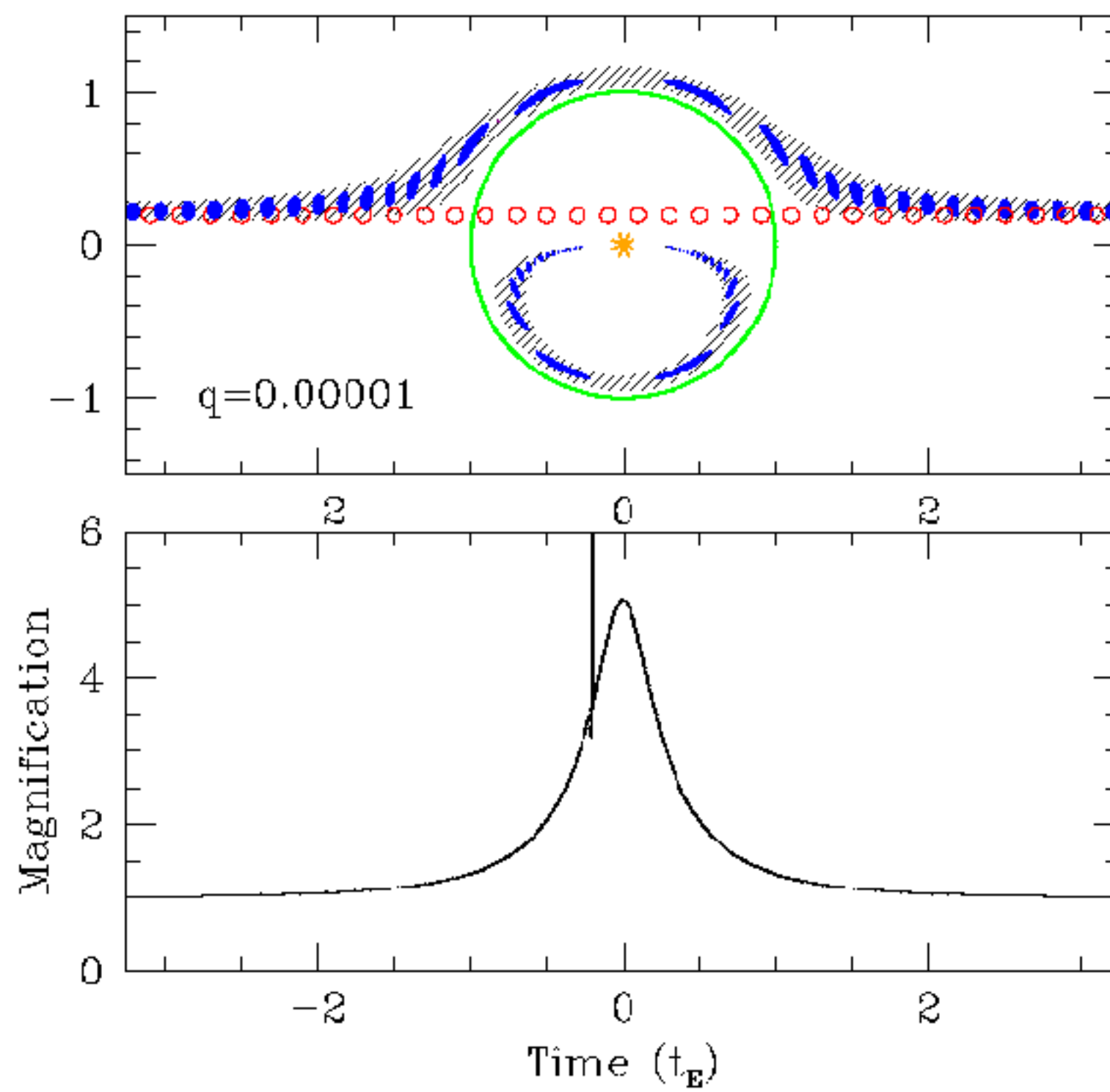


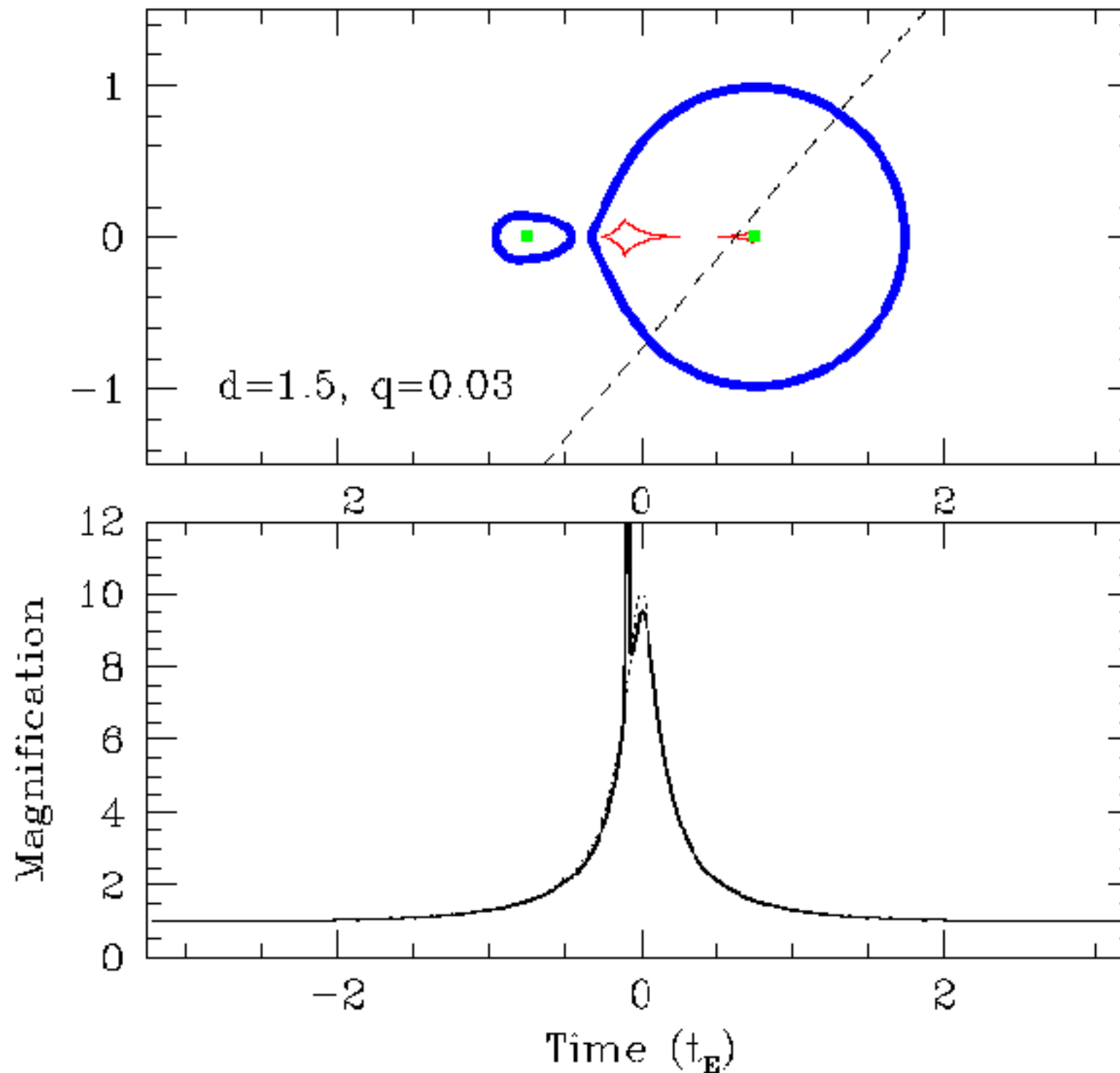
Close





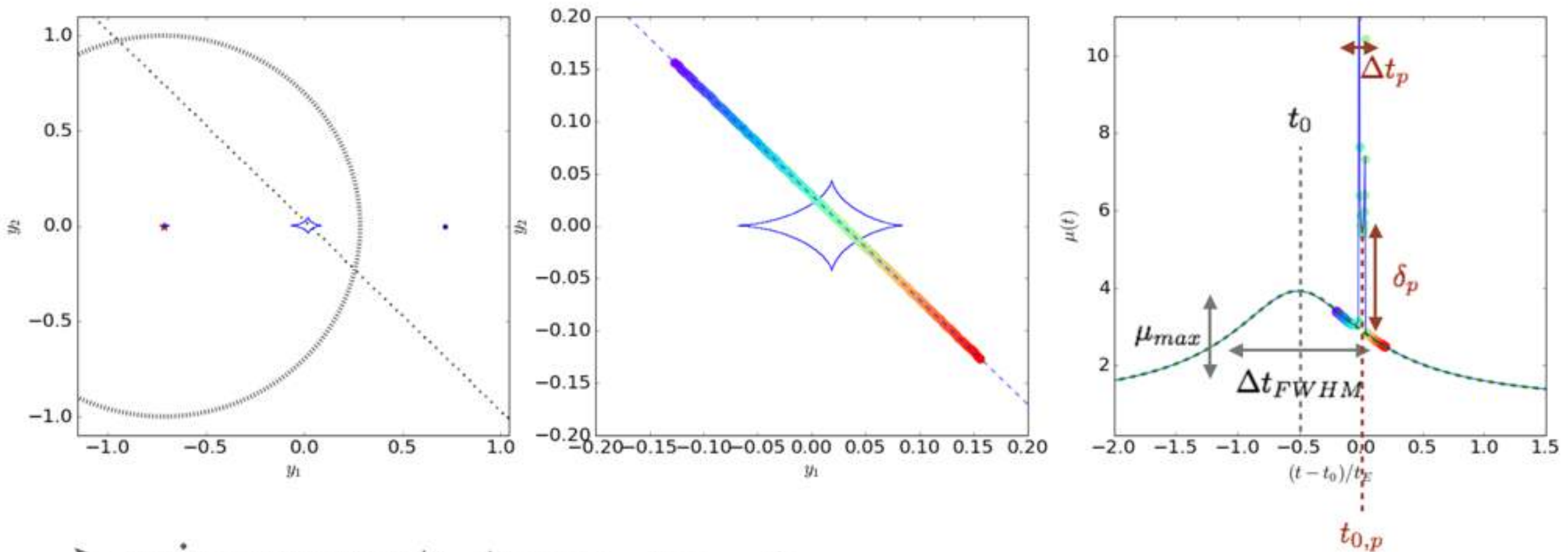






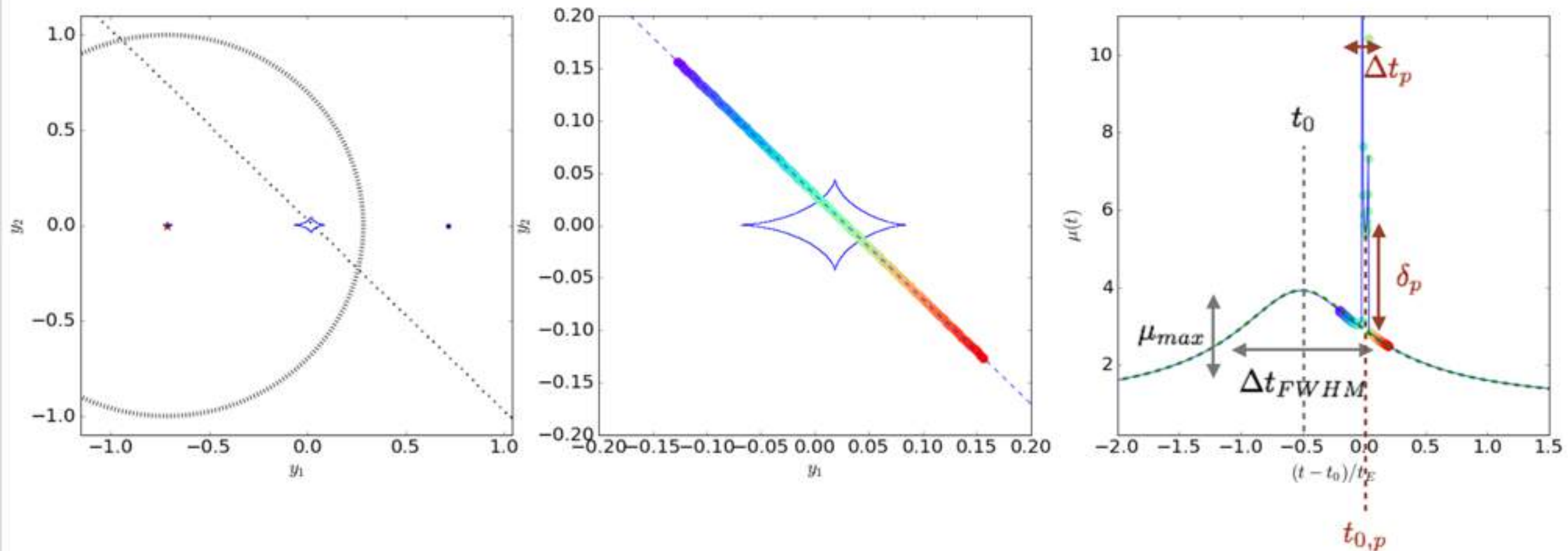
- Gran diversidad de curvas

PLANET PROPERTIES “READ OFF” OF THE LIGHT CURVES



- primary event: Δt_{FWHM} μ_{max} t_0
- planetary perturbation: Δt_p δ_p $t_{0,p}$

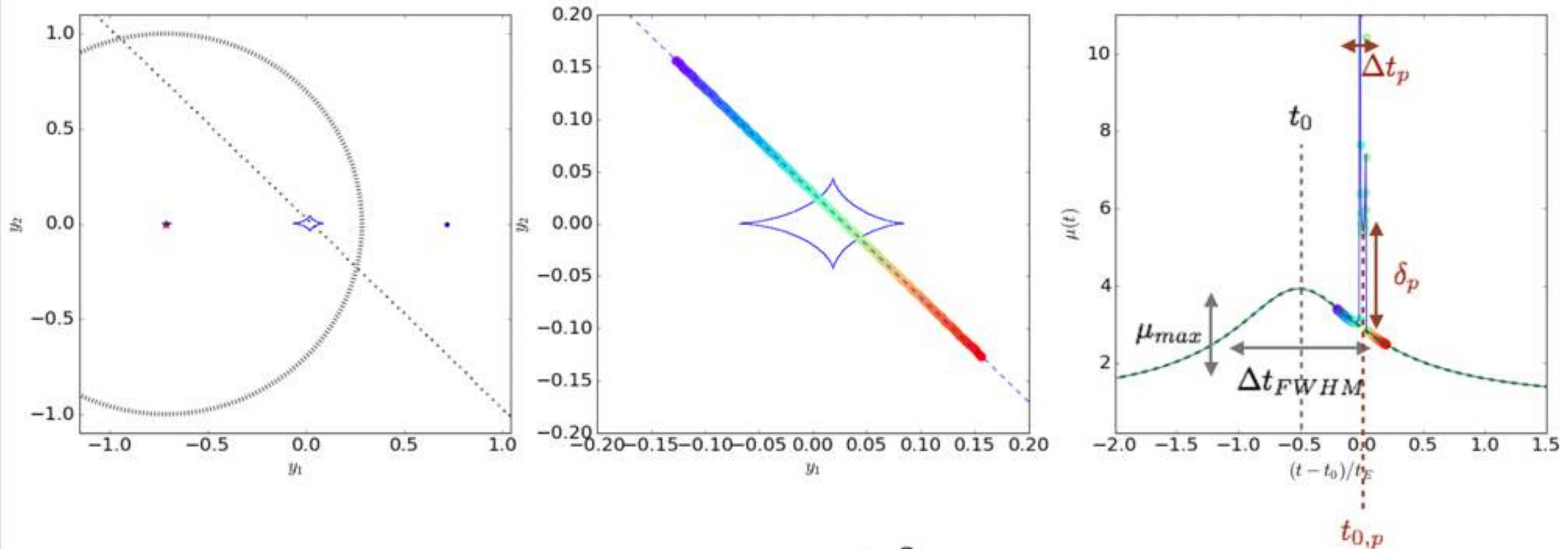
PLANET PROPERTIES “READ OFF” OF THE LIGHT CURVES



$$\Delta t_{FWHM}, \mu_{max}, t_0 \Rightarrow \mu(y) = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \quad y(t) = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{t - t_0}{t_E}\right)^2}$$

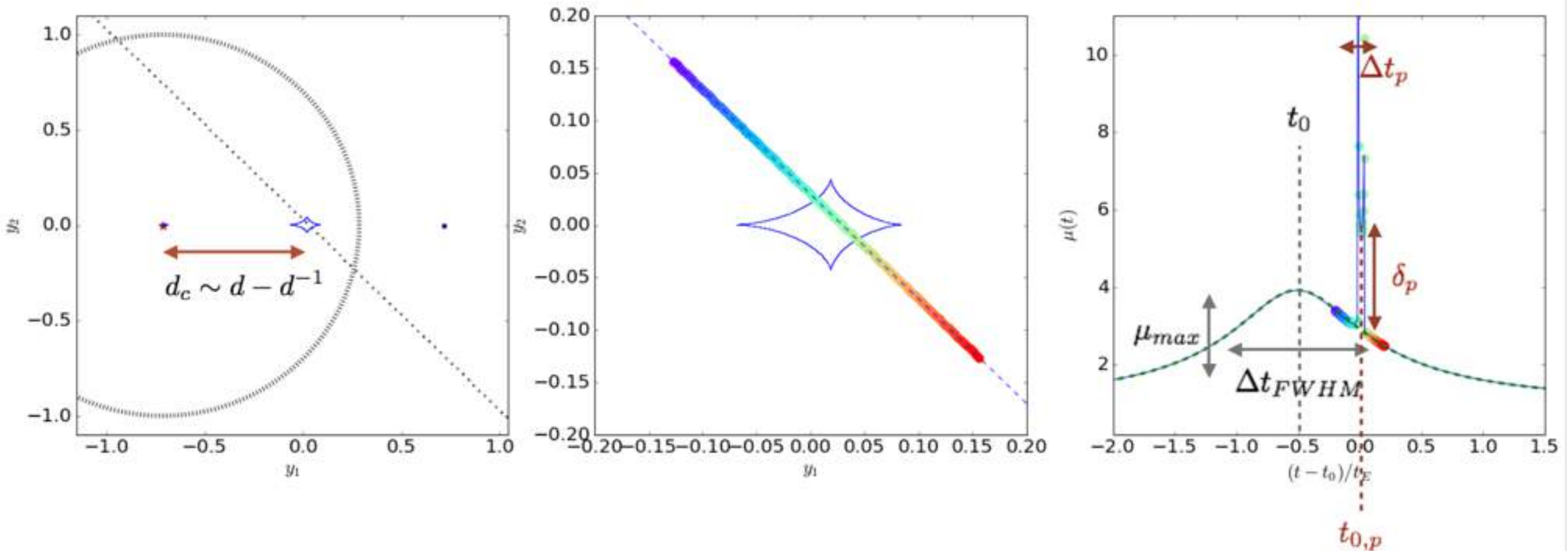
$$\Rightarrow y_0 \quad t_E$$

PLANET PROPERTIES “READ OFF” OF THE LIGHT CURVES



$$\Delta t_p \sim t_{E,p} \Rightarrow t_E \Rightarrow q = \left(\frac{t_{E,p}}{t_E} \right)^2$$

PLANET PROPERTIES “READ OFF” OF THE LIGHT CURVES

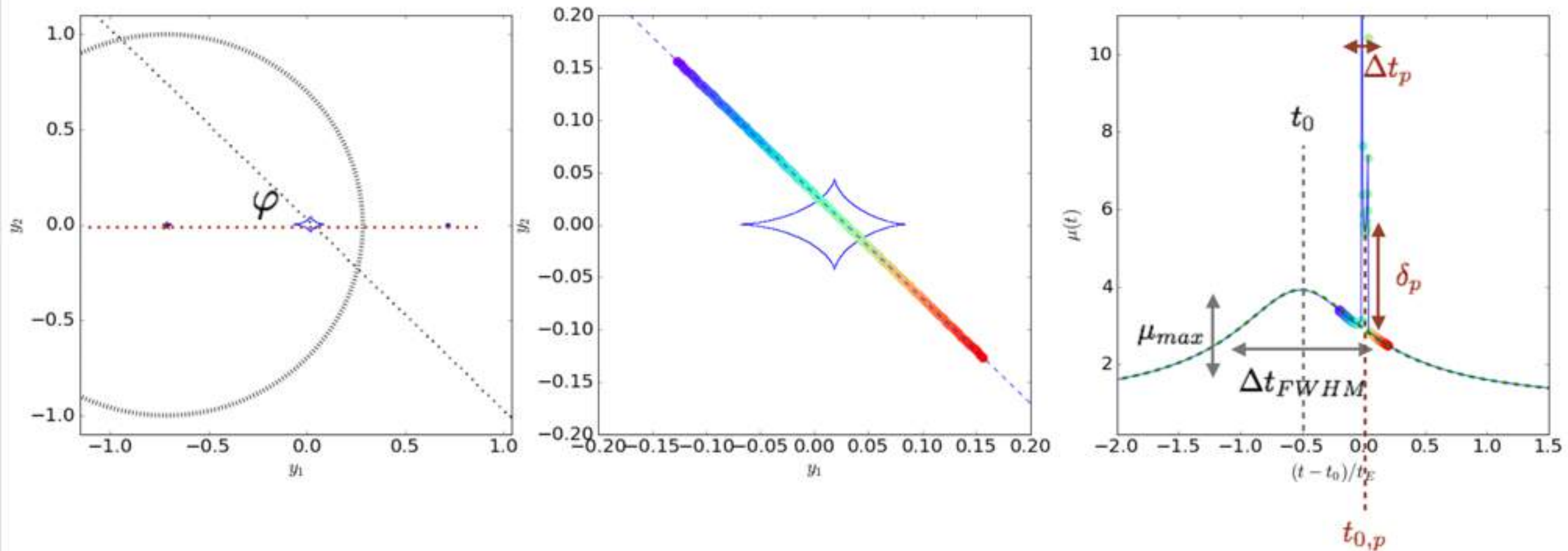


$$\delta_p, t_{0,p} \Rightarrow y_p = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{t_{0,p} - t_0}{t_E} \right)^2}$$

$$\Rightarrow d_c \sim \frac{y_p \pm \sqrt{y_p^2 + 4}}{2} \Rightarrow d$$

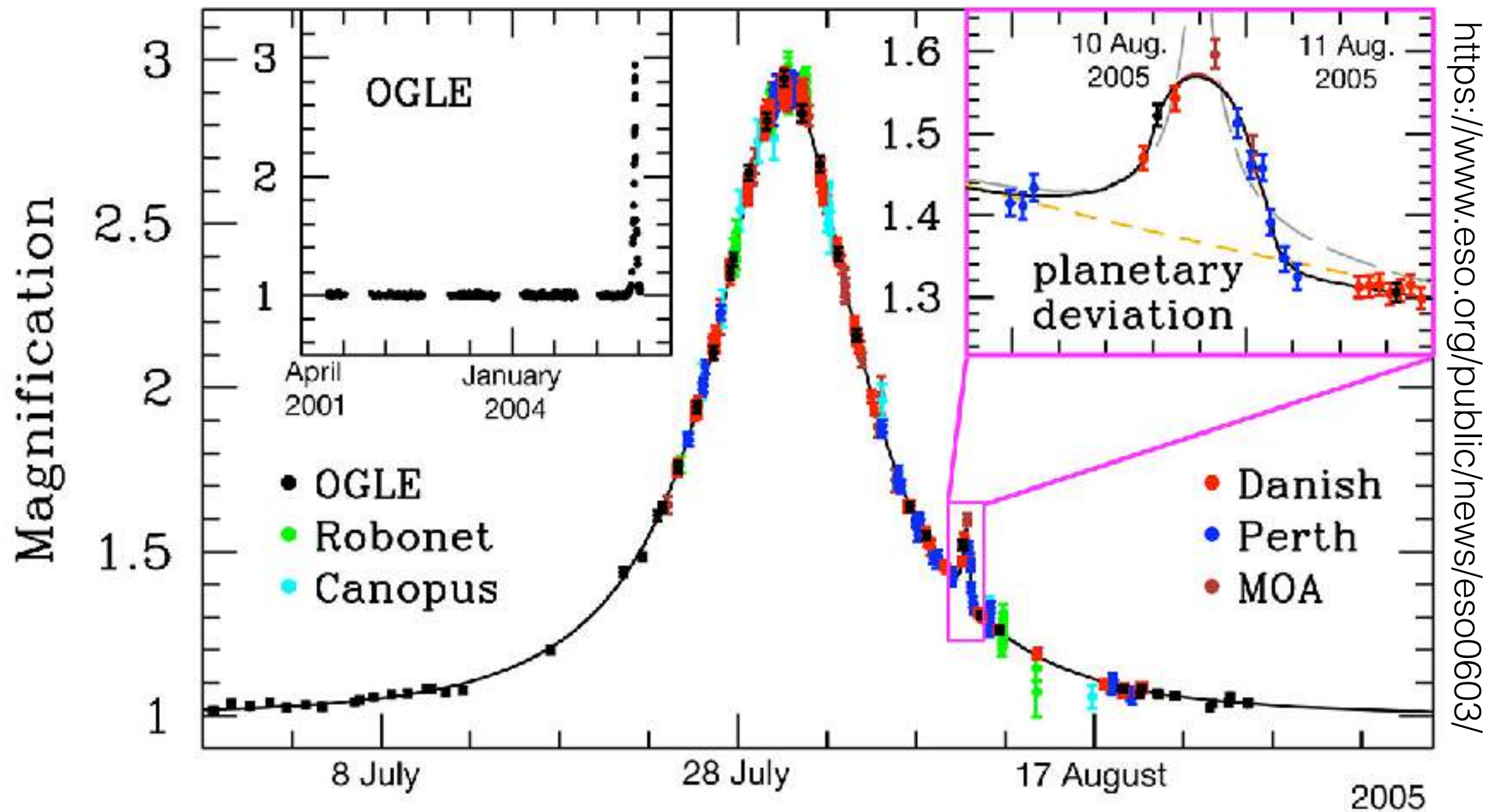
up to the degeneracy in d

PLANET PROPERTIES “READ OFF” OF THE LIGHT CURVES



$$y_0, y_p \Rightarrow \varphi = \sin^{-1} \frac{y_0}{y_p}$$

Exoplanetas

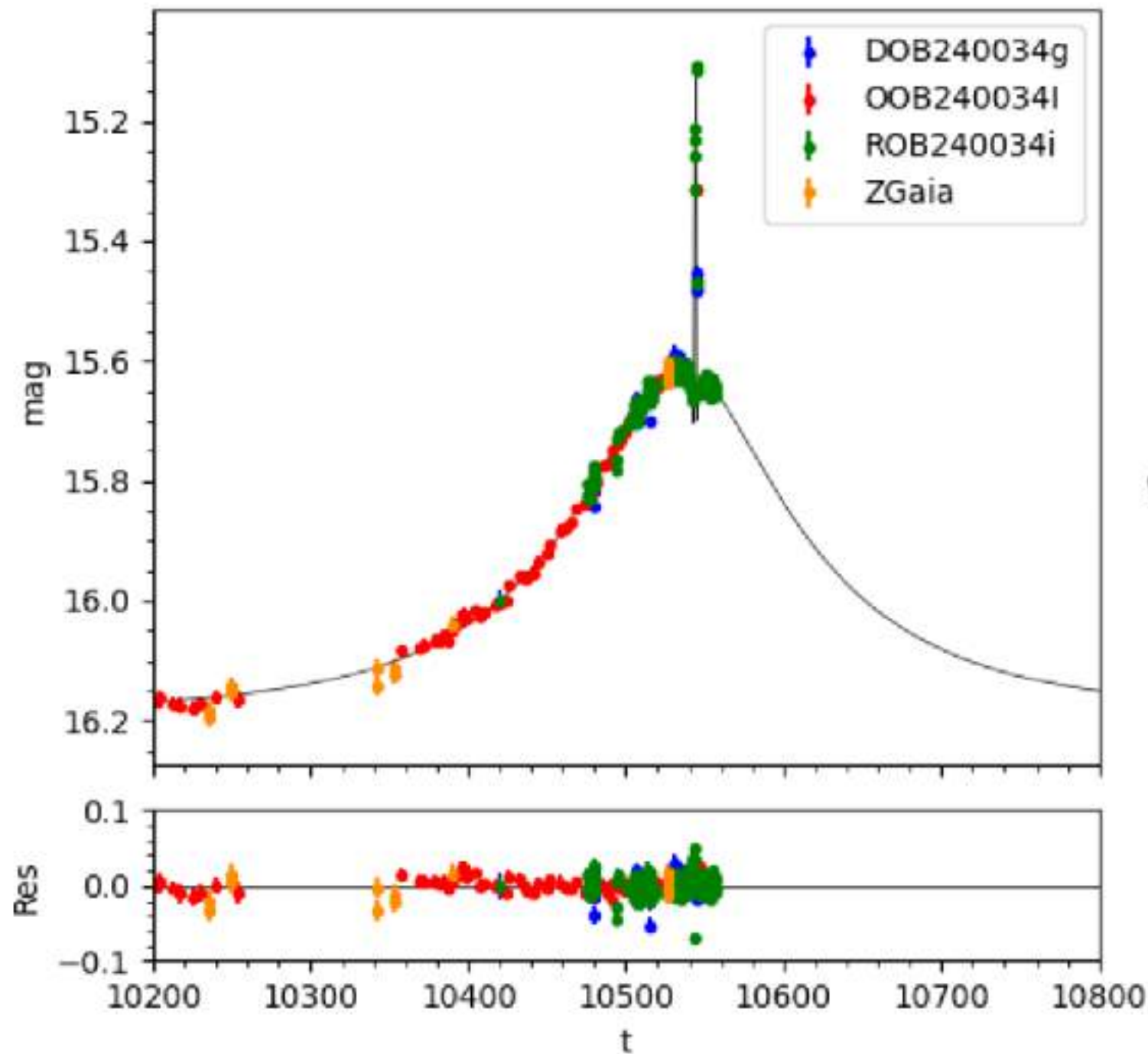


<https://www.eso.org/public/news/eso0603/>

<http://exoplanet.eu/catalog/>

- 329 planetas / 12 sistemas con múltiples planetas (en 01/09/2025)
- Anomalías planetarias características
- Necesitan cadencia mayor

Evento 0034



Parámetros ajustados con RTModel
(en 12/09/2024)

$$s = 1.1785475 \pm 0.0019$$

$$q = 0.0001575027 \pm 0.00000063$$

$$u_0 = 0.3432 \pm 0.0024$$

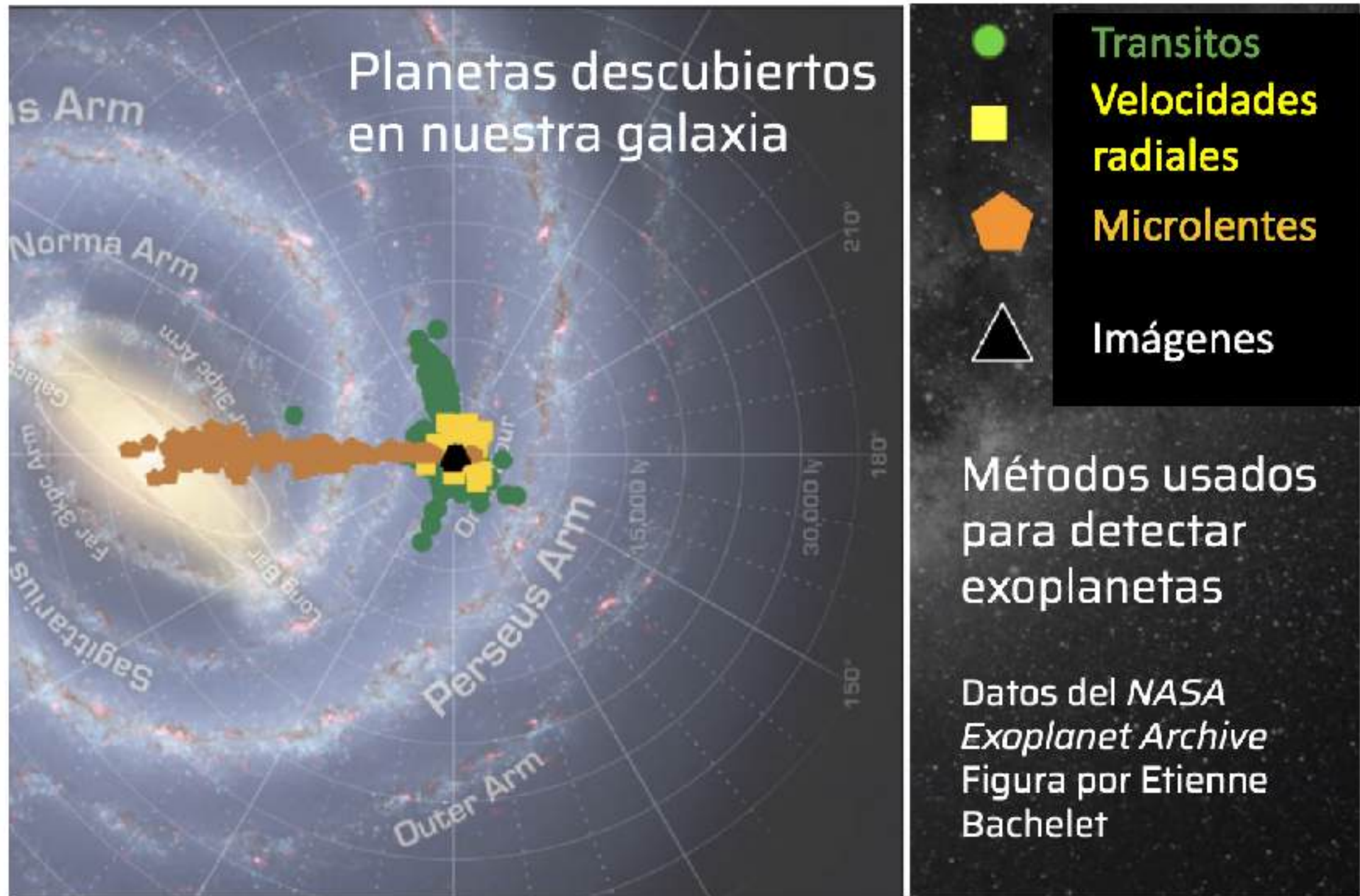
$$\alpha = 1.7161 \pm 0.0018$$

$$Q^* = 0.002198 \pm 0.0000081$$

$$t_E = 164.28 \pm 0.71$$

$$- t_0 = 10535.832 \pm 0.050$$

Detección de exoplanetas

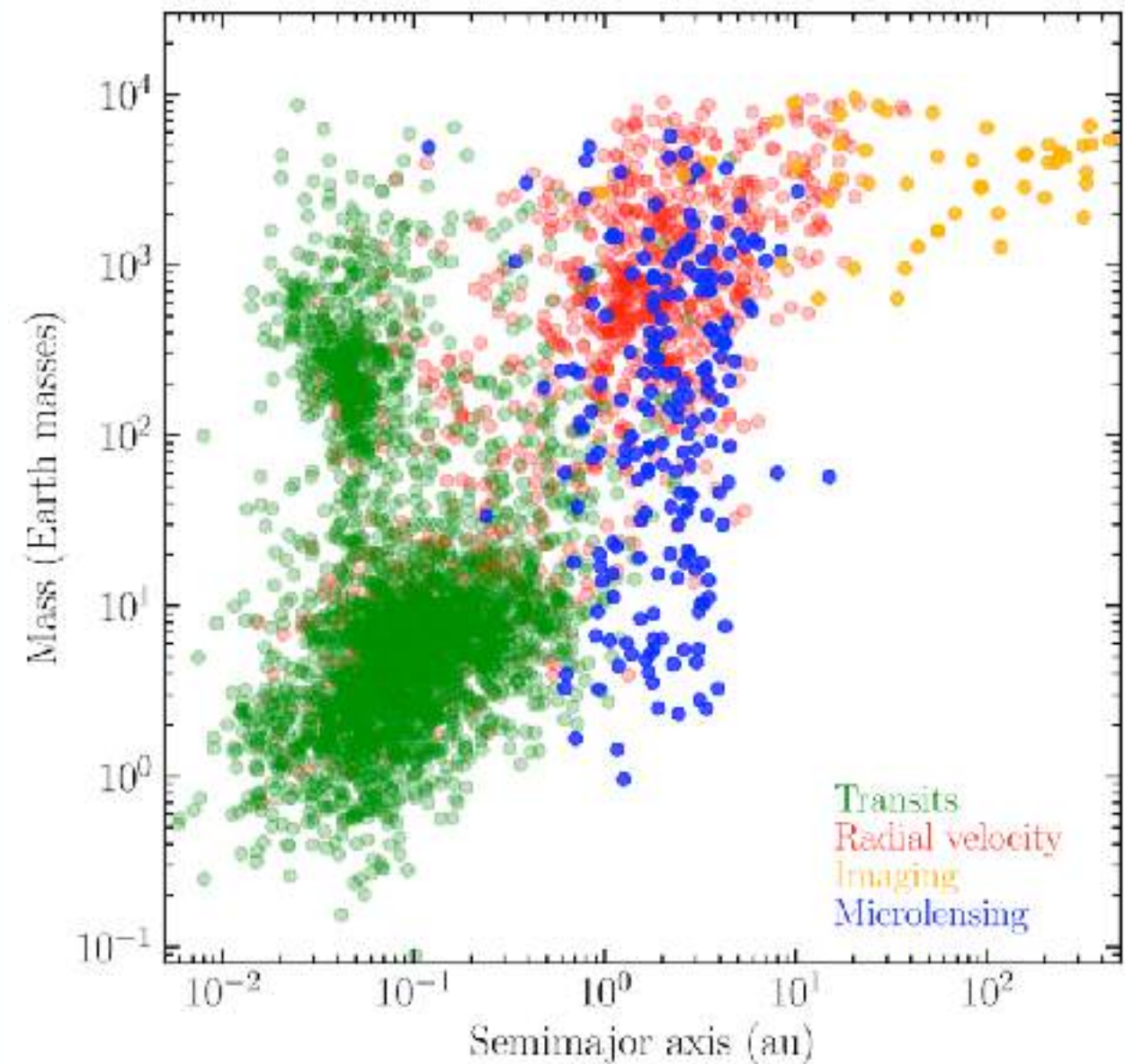
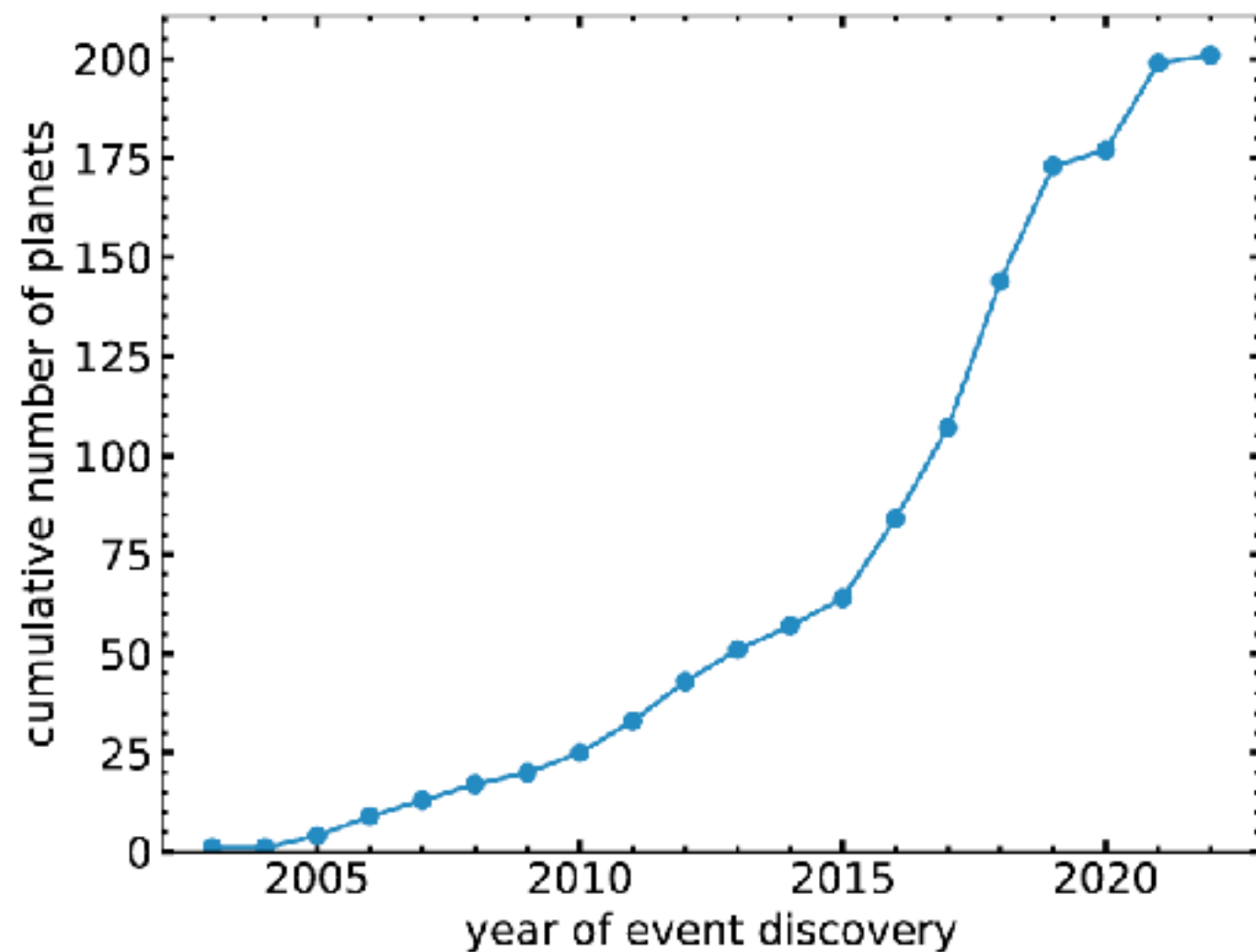


Descubiertas de exoplanetas

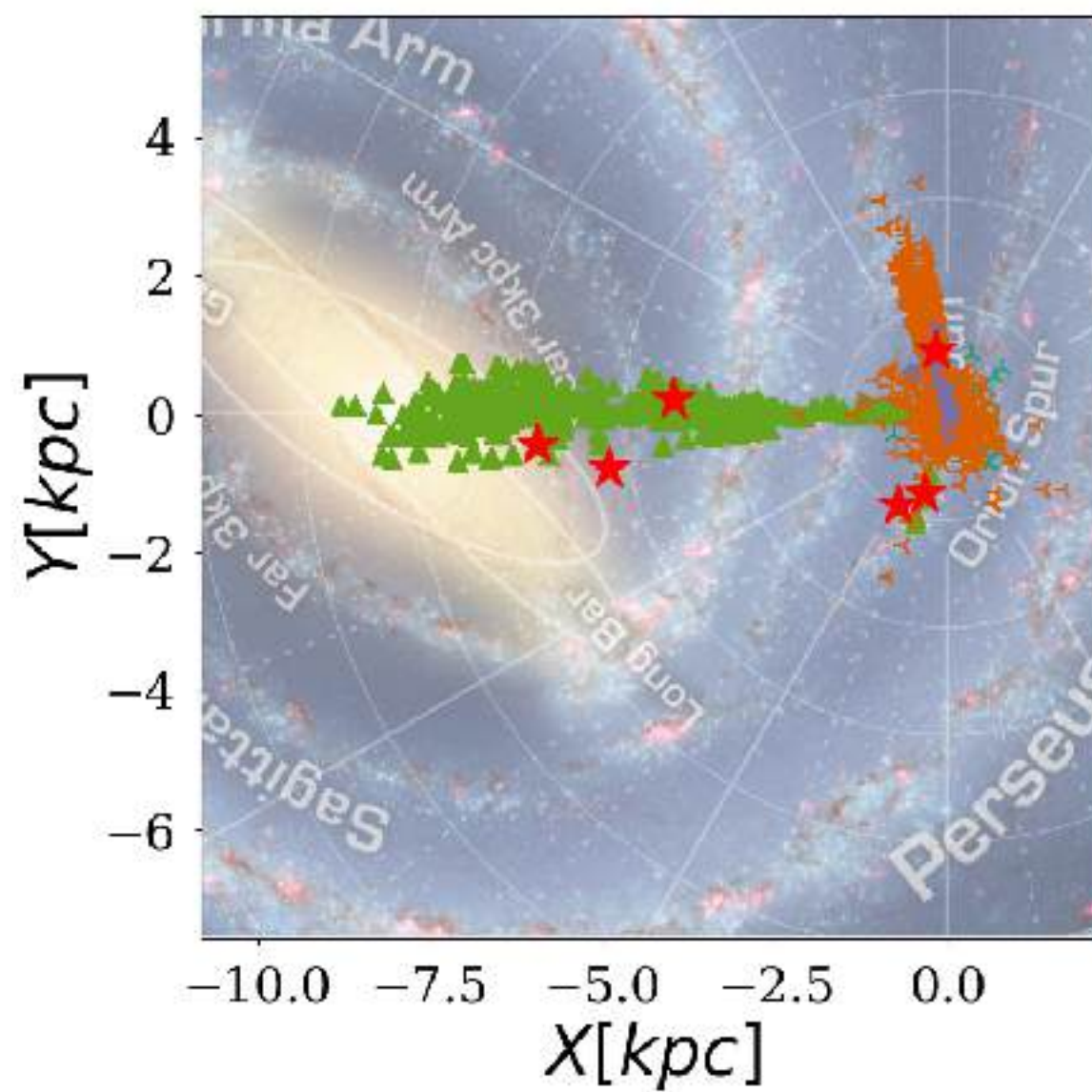
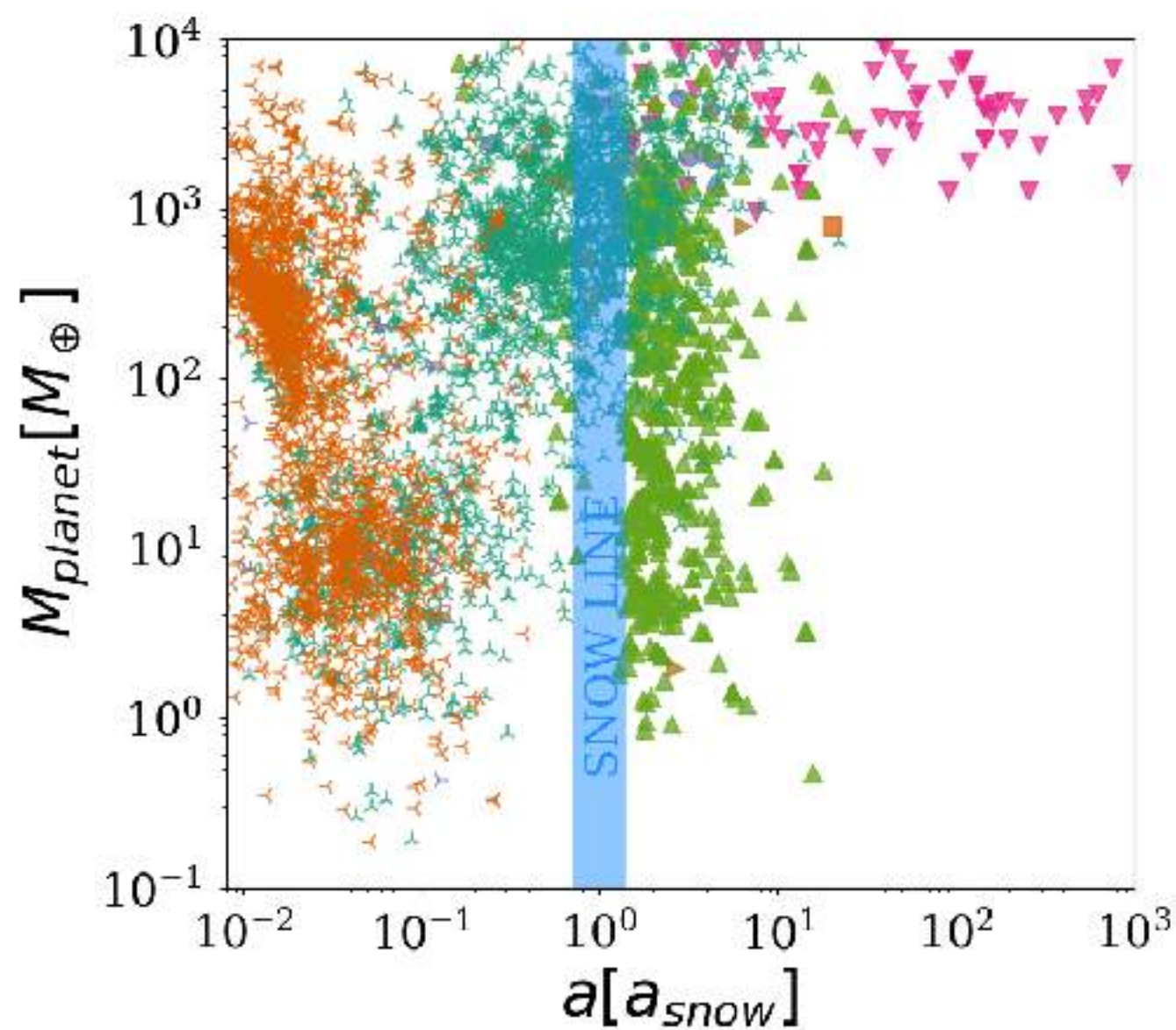
Exoplanet Occurrence Rates from Microlensing Surveys

Przemek Mróz and Radosław Poleski

arXiv:2310.07502

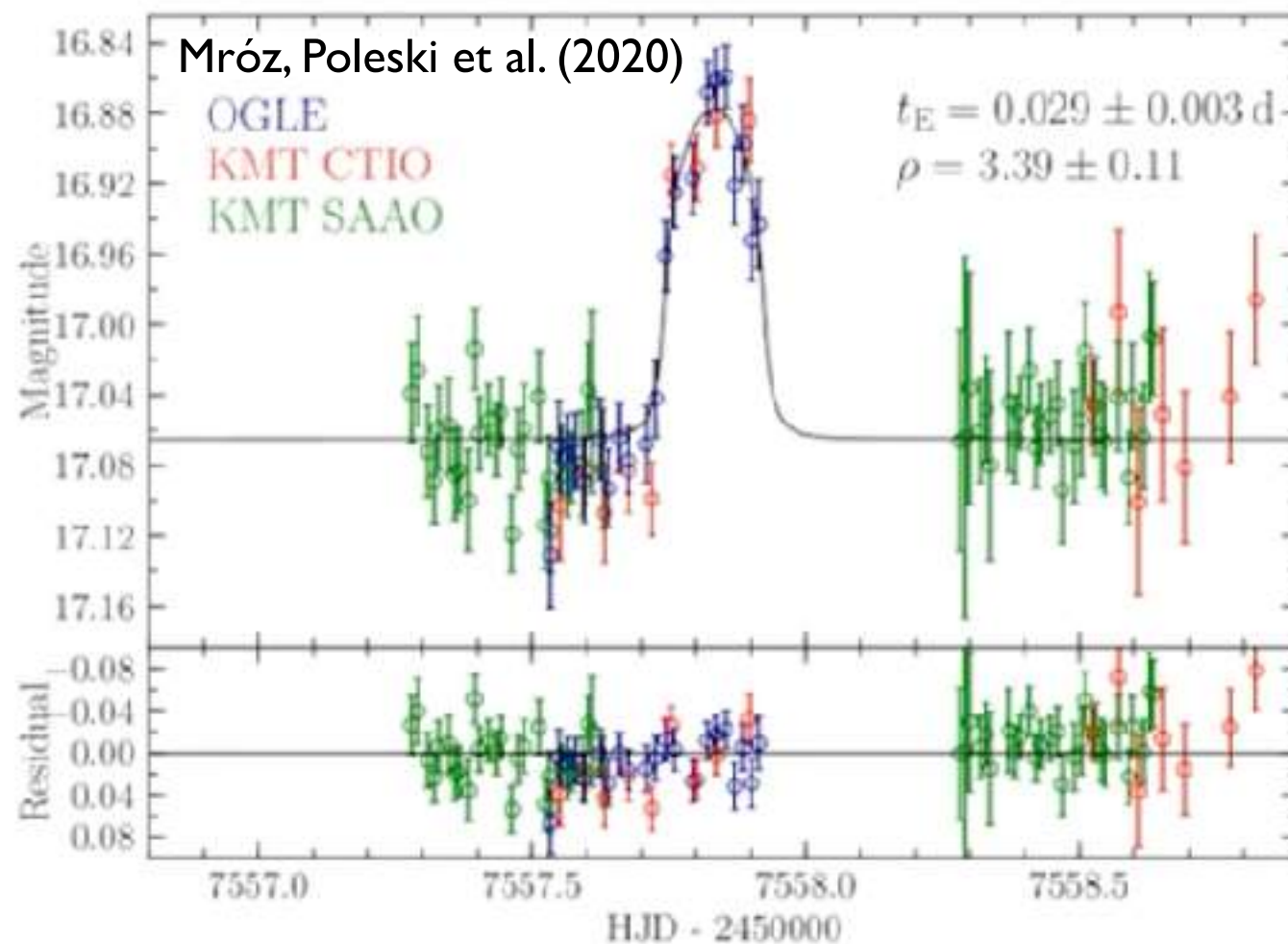


- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| • Astrometry | ▲ Microlensing | ✧ Radial Velocity |
| ■ Disk Kinematics | ◀ Orbital Brightness Modulation | ✧ Transit |
| ● Eclipse Timing Variations | ▶ Pulsar Timing | ✧ Transit Timing Variations |
| ▼ Imaging | ⋈ Pulsation Timing Variations | ★ OMEGA |

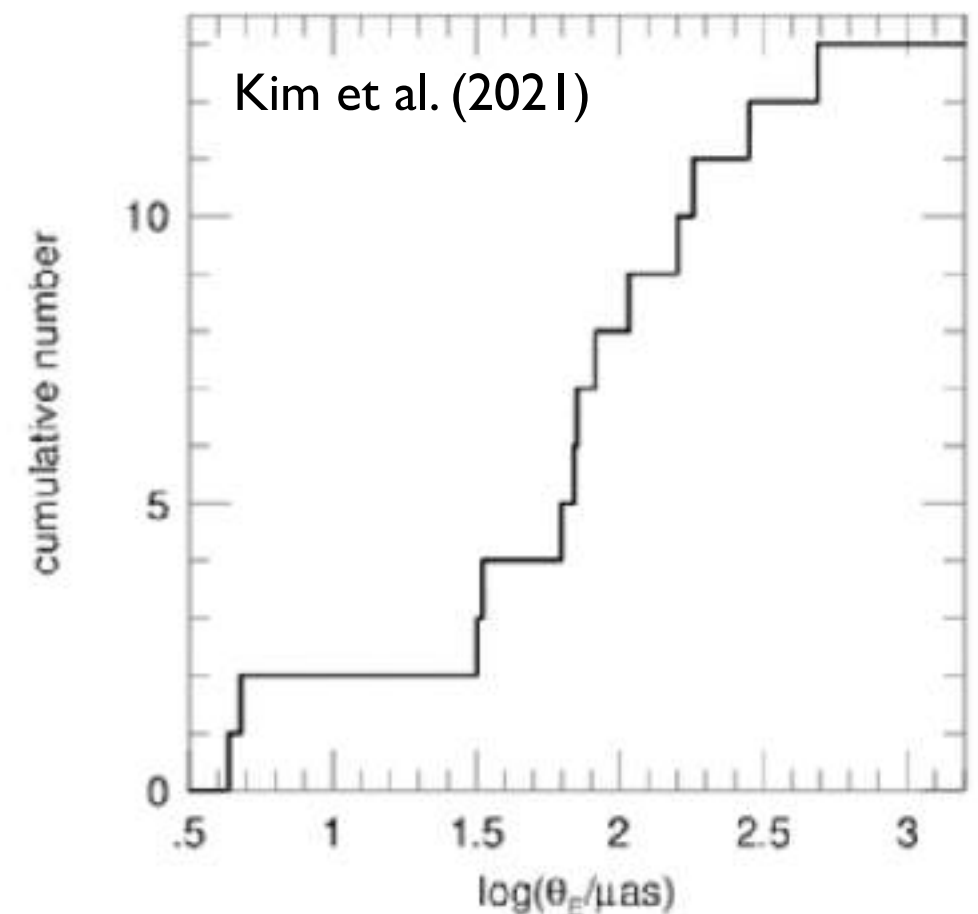


Detección de exoplanetas

- Sistemas binarios: medir q (también múltiples), mayor probabilidad
- eventos de planetas libres (*free floating, rogue*)



6 eventos de planetas libres
con efectos de fuente finita



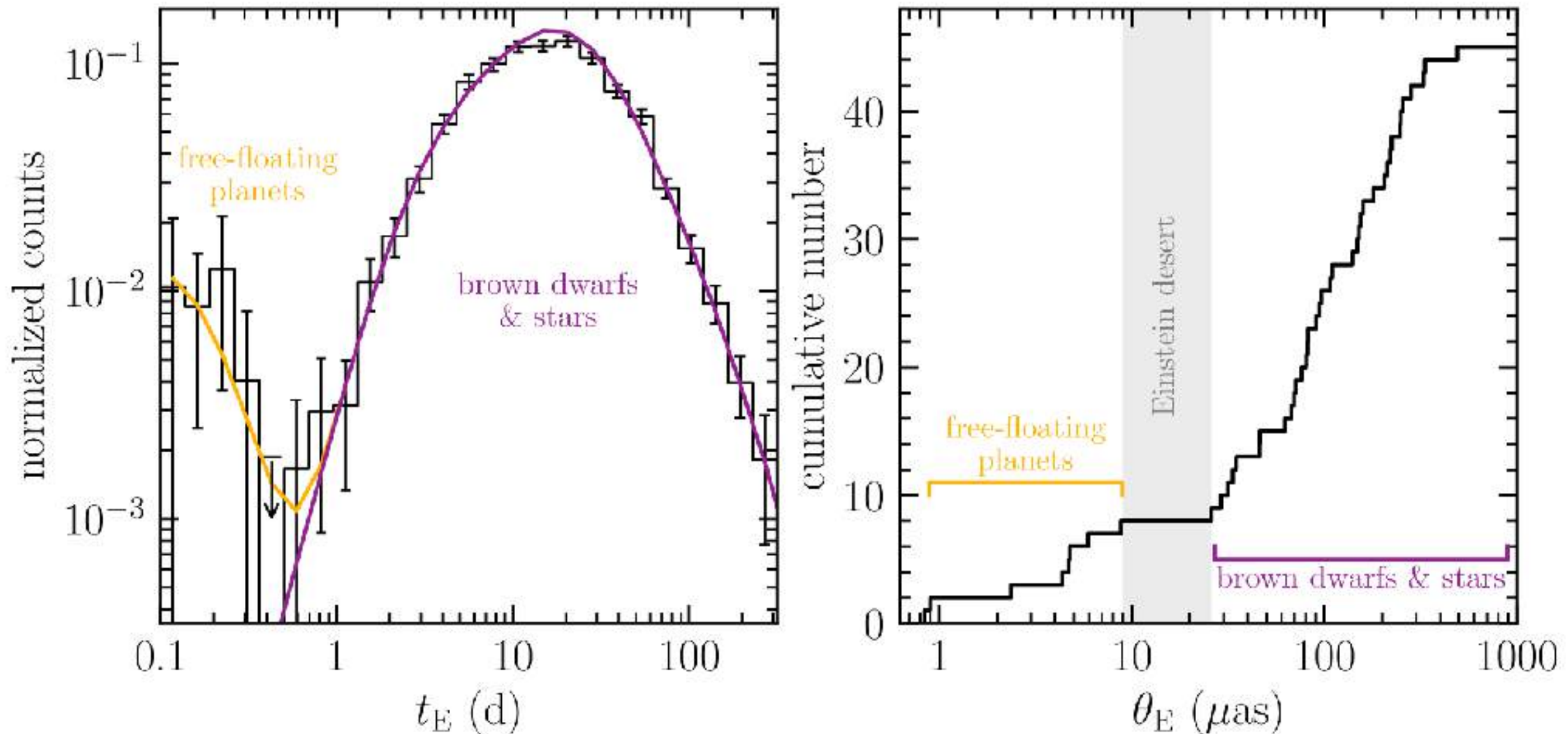
Se observa un “desierto de Einstein”
No se detectan eventos en el rango

$$5 \mu\text{as} < \theta_E < 30 \mu\text{as}$$

Población de exoplanetas libres

Przemek Mróz and Radosław Poleski

arXiv:2310.07502



Sistemas con N lentes y *microlensing* de cuásares

- For a system of N -lenses we obtained:

$$z_s = z - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{z^* - z_i^*}$$

- Taking the conjugate:

$$z_s^* = z^* - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{z - z_i}$$

- We obtain z^* and substitute it back into the original equation, which results in a $(N^2 + 1)$ th order complex polynomial equation

$$p(z) = \sum_{i=0}^N c_i z^i$$

- This equation can be solved only numerically, even in the case of a binary lens

- For a system of N -lenses we obtained:

$$z_s = z - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{z^* - z_i^*}$$

- Taking the conjugate:

$$z_s^* = z^* - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{z - z_i}$$

- We obtain z^* and substitute it back into the original equation, which results in a (N^2+1) th order equation

$$p(z) = \sum_{i=0}^N c_i z^i$$

- Note that the solutions are not necessarily solutions of the lens equations (spurious solutions)
- One has to check if the solutions are solutions of the lens equation
- Rhie 2001,2003: maximum number of images is $5(N-1)$ for $N > 2$

- In the complex form, the magnification can still be derived from the lensing Jacobian:

$$\det A = \left(\frac{\partial z_s}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial z_s}{\partial z^*} \left(\frac{\partial z_s}{\partial z^*} \right)^* = 1 - \frac{\partial z_s}{\partial z^*} \left(\frac{\partial z_s}{\partial z^*} \right)^*$$

$$\frac{\partial z_s}{\partial z^*} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{(z^* - z_i^*)^2}$$

$$\det A = 1 - \left| \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{(z^* - z_i^*)^2} \right|^2$$

- Therefore the critical lines form where

$$\left| \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{(z^* - z_i^*)^2} \right|^2 = 1$$

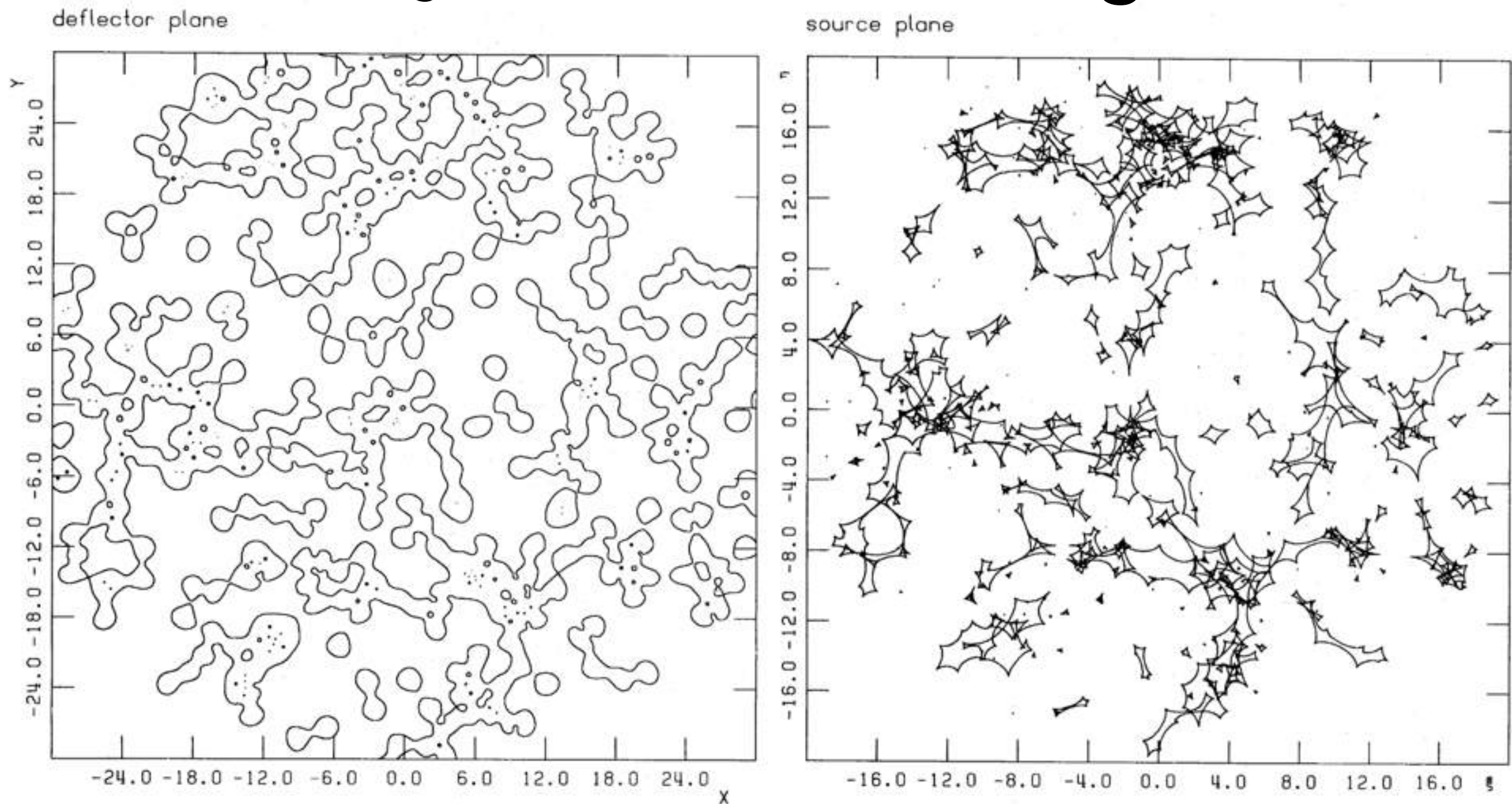
- Thus, to find the critical points we solve

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{(z^* - z_i^*)^2} = e^{i\phi} \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

- Again, this can be turned into a complex polynomial of order $2N$: for N lenses, there are $2N$ critical lines and caustics. The solutions can be found numerically.

Sistemas con N estrellas

Quasar microlensing

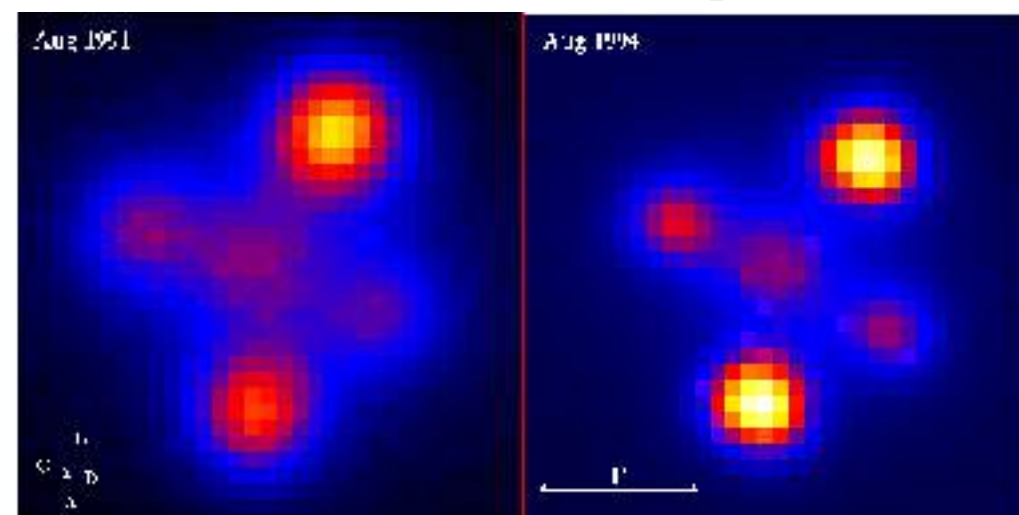
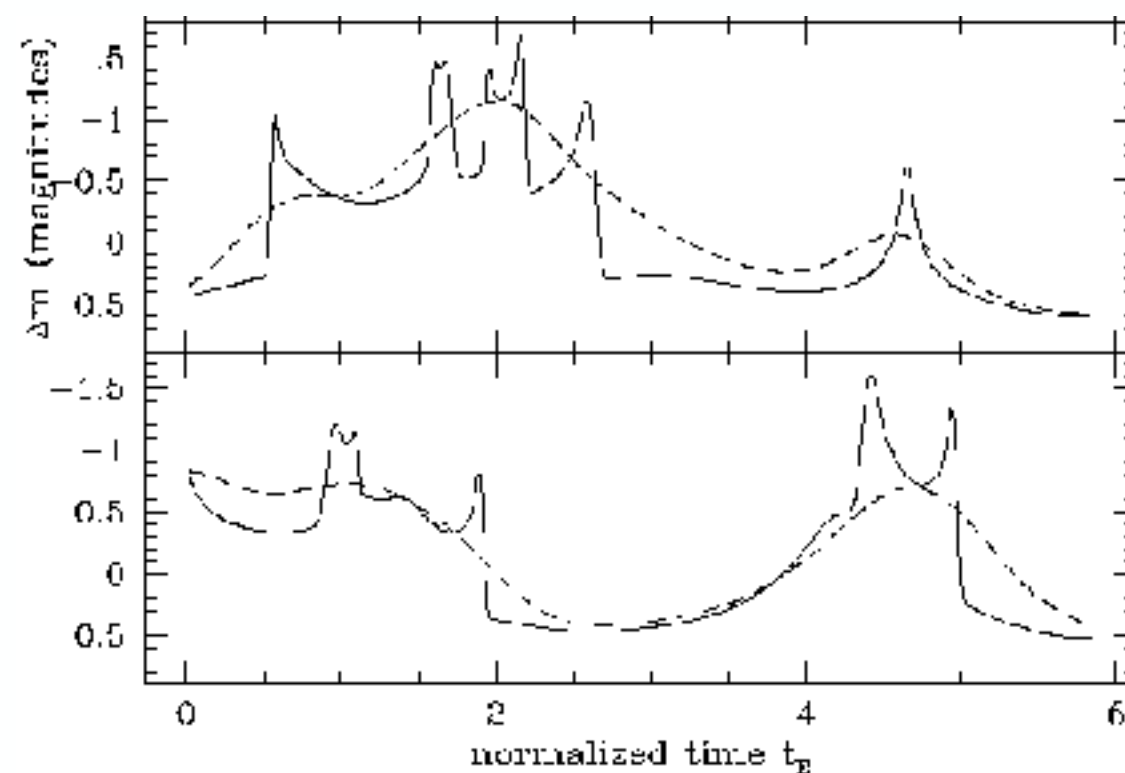
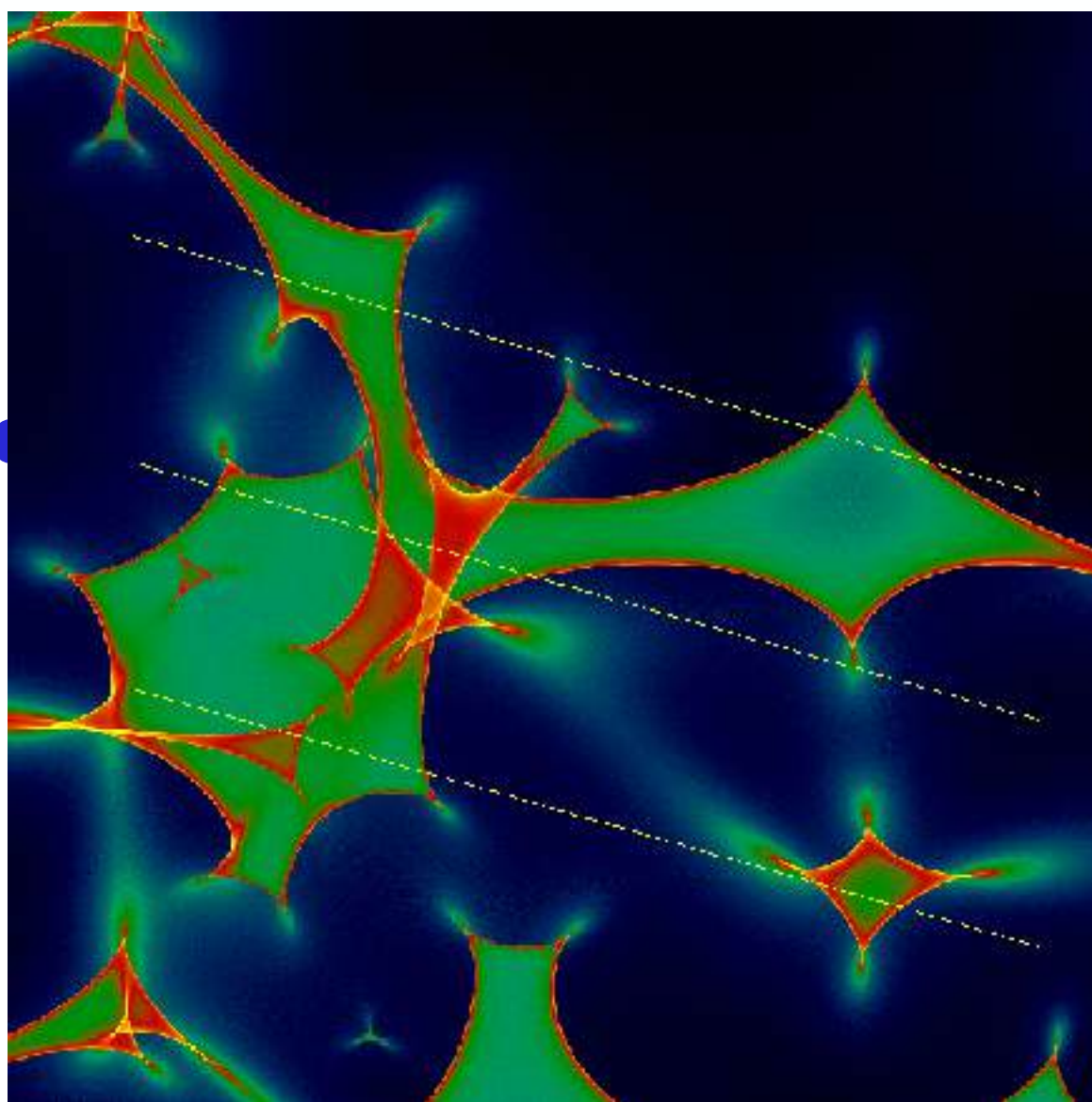


critical lines and caustics originated by 400 stars

Witt, 1990, A&A, 236, 311

Mililentes de Cuasares

- Patrón de magnificación
- Curvas de luz



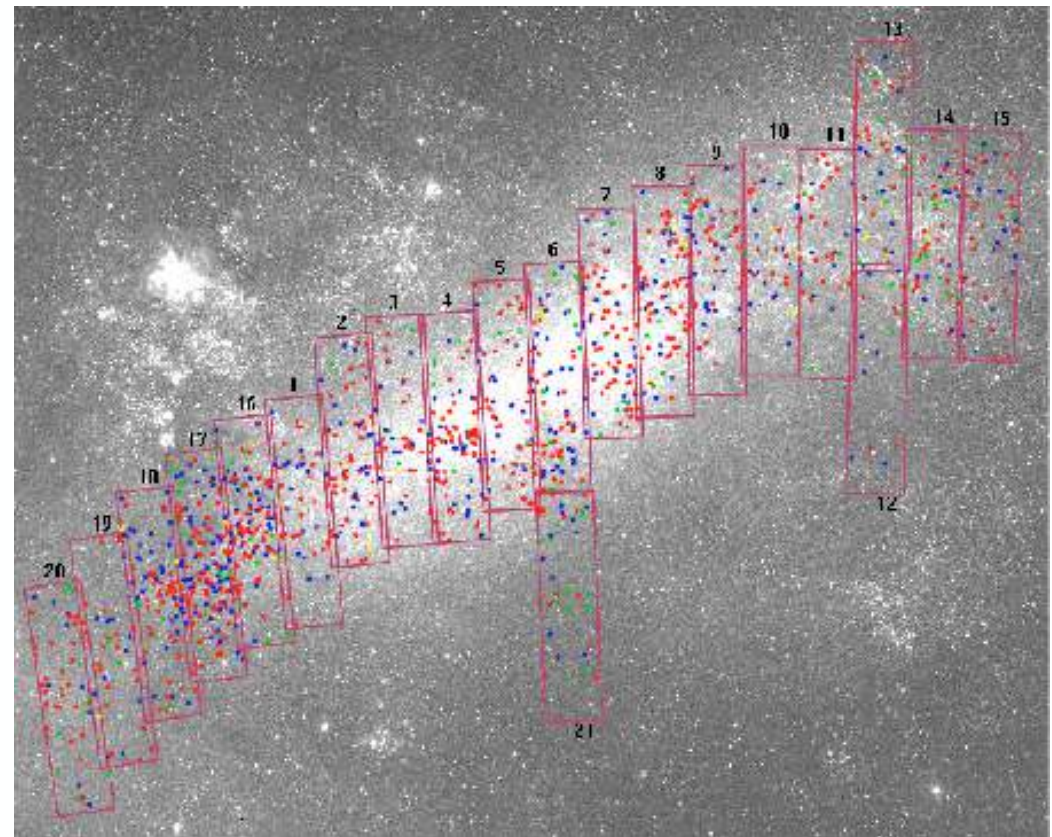
En la práctica

Proyectos de descubierta: fotometría, gran campo de visión

- proyectos dedicados (MACHO, OGLE, EROS...)
- *Time-domain* surveys: ZTF, LSST (+brokers...)

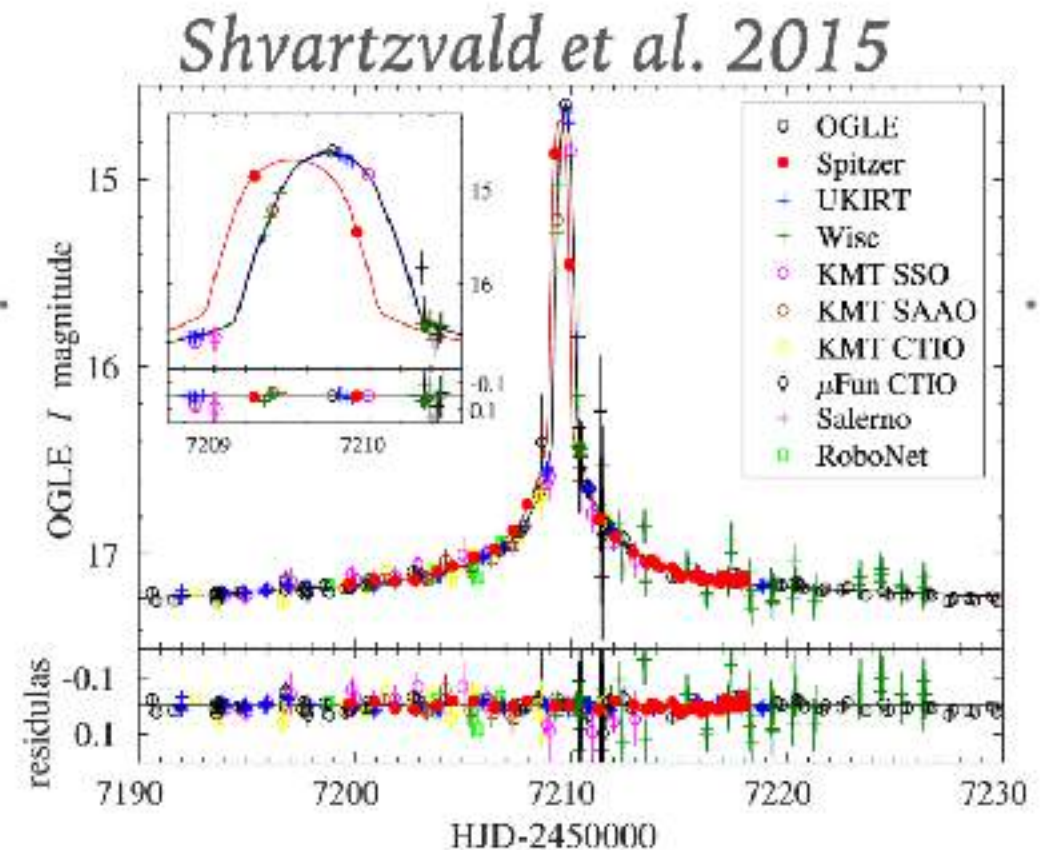
Seguimiento de eventos:

- Fotometría:
mayor cadencia,
profundidad, filtros
- Espectroscopia
- Óptica adaptativa
- Interferometría
- Observaciones del espacio (HST, Gaia, Spitzer...)
- Coordinación: redes globales (e.g. MOP)



THE FUTURE OF MICROLENSING

- Korean Microlensing Telescope Network (KMTNet, South Africa, South America, Australia, 3x1.6m, 4 sq. deg.)



An analysis of binary microlensing event OGLE-2015-BLG-0060

Y. Tsapras¹,[★] A. Cassan,²[★] C. Ranc,³ E. Bachelet,⁴ R. Street,⁴ A. Udalski,⁵

. Euteneuer,¹ D.

. Mao,^{11,12,13}

absganss,^{1,18}

owicz,⁵

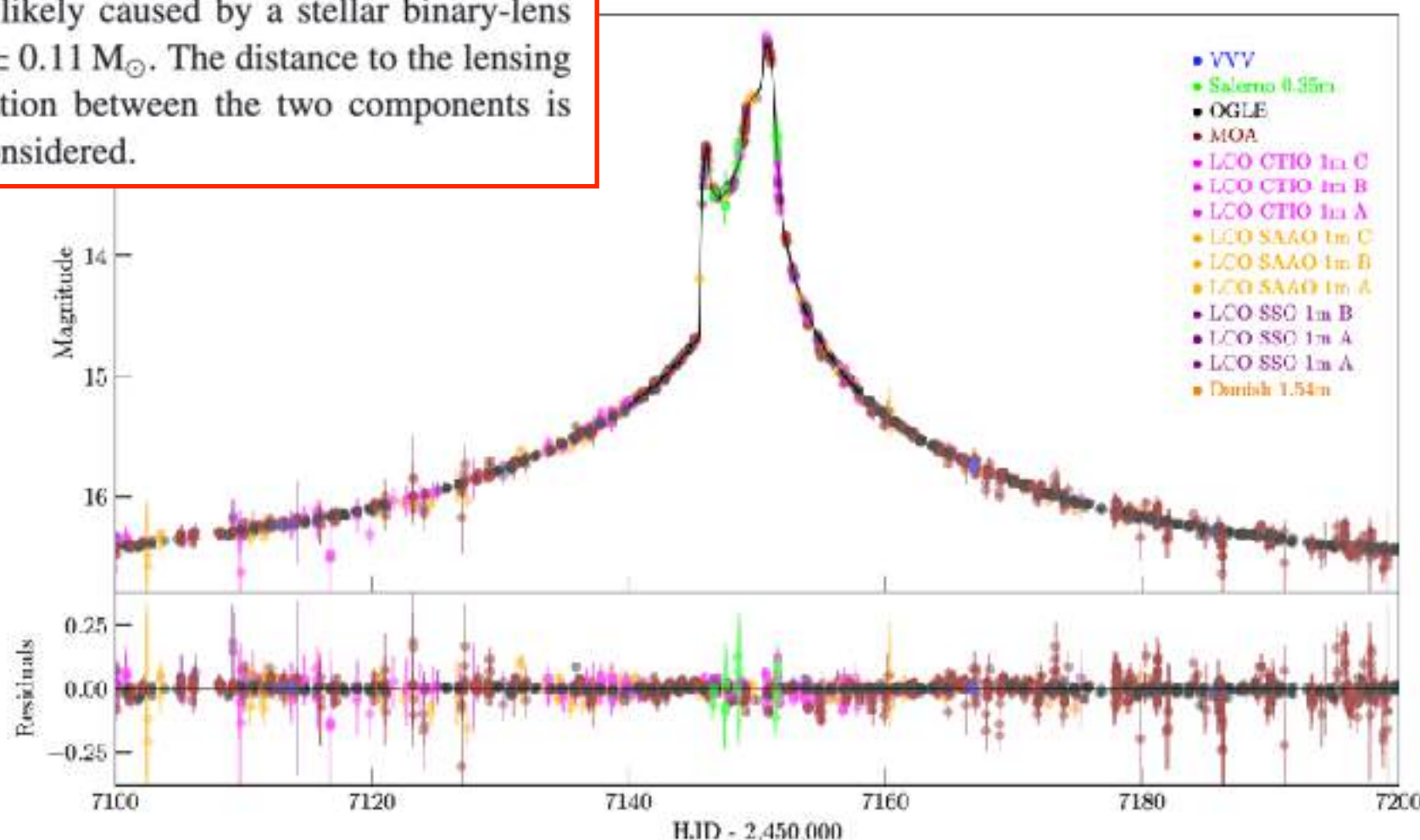
nsen,²⁰

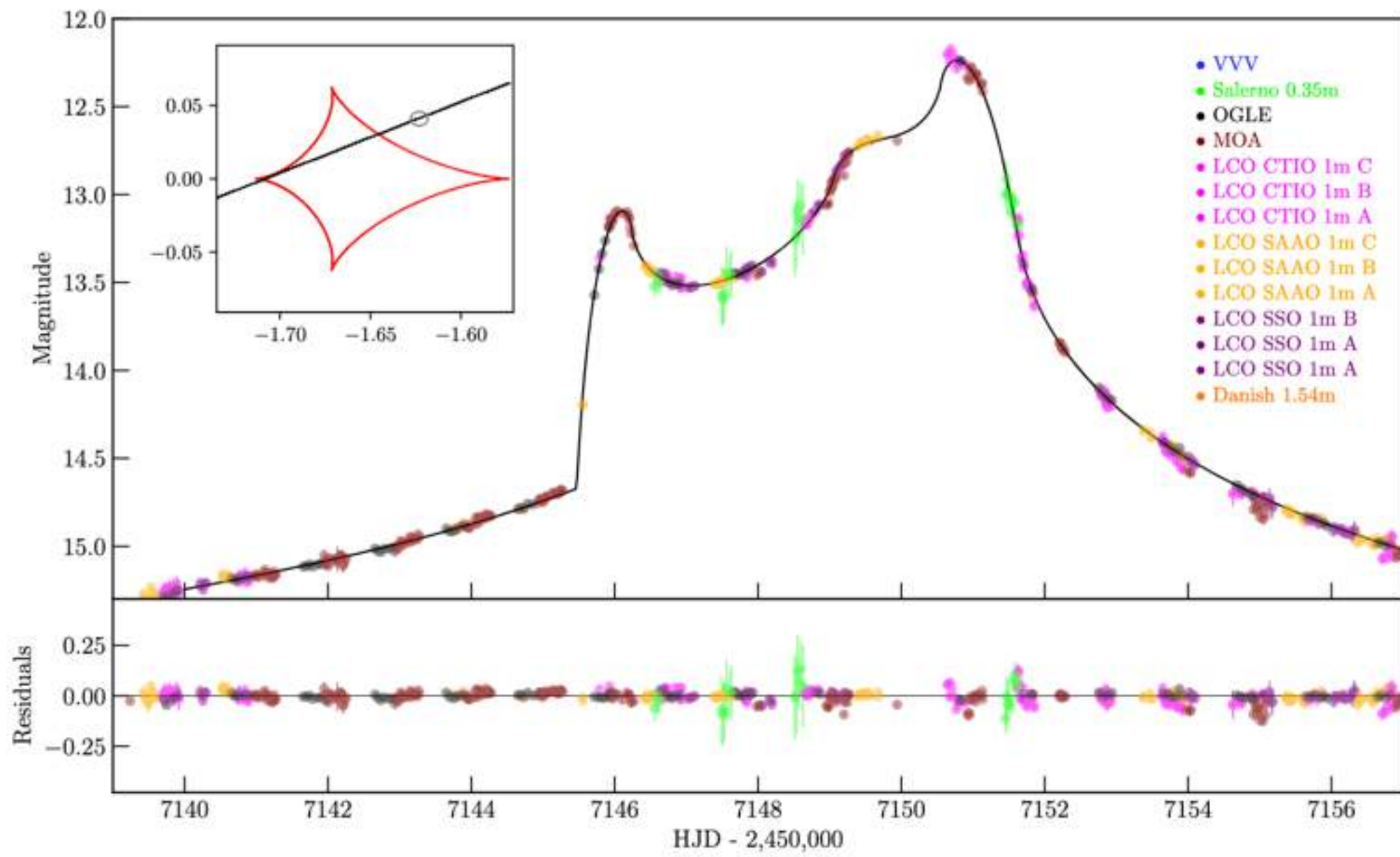
Kuffmeier,²⁰ D.

ABSTRACT

We present the analysis of stellar binary microlensing event OGLE-2015-BLG-0060 based on observations obtained from 13 different telescopes. Intensive coverage of the anomalous parts of the light curve was achieved by automated follow-up observations from the robotic telescopes of the Las Cumbres Observatory. We show that, for the first time, all main features of an anomalous microlensing event are well covered by follow-up data, allowing us to estimate the physical parameters of the lens. The strong detection of second-order effects in the event light curve necessitates the inclusion of longer-baseline survey data in order to constrain the parallax vector. We find that the event was most likely caused by a stellar binary-lens with masses $M_{*1} = 0.87 \pm 0.12 M_{\odot}$ and $M_{*2} = 0.77 \pm 0.11 M_{\odot}$. The distance to the lensing system is 6.41 ± 0.14 kpc and the projected separation between the two components is 13.85 ± 0.16 au. Alternative interpretations are also considered.

F. Abe,⁴² Y. Asakura,⁴³ D. P. Bennett,⁴⁴ P. Evans,⁴² A. Fukui,⁴³ Y. Hirao,⁴⁴ Y. A. Li,⁴² C. H. Ling,⁴⁵ K. Masuda,⁴⁰ M. Nagakane,⁴⁴ K. Ohnishi,⁴⁶ N. Ra J. Sullivan,⁴⁸ T. Sumi,⁴⁴ D. Suzuki,³ RoboNet team,[†] The OGLE collabor MOA collaboration[‡]

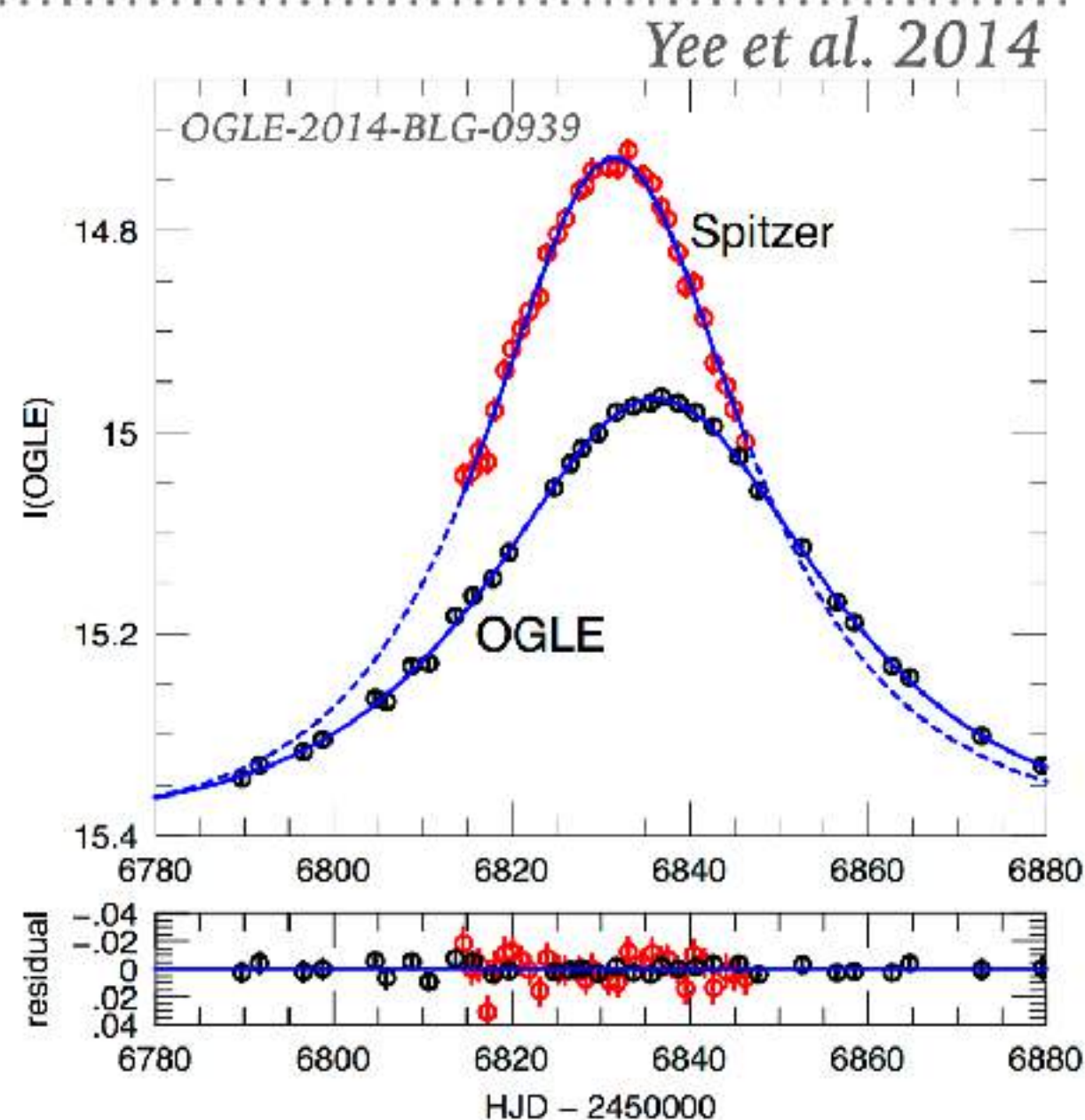




Parameter	OGLE + MOA	OGLE	Follow-up
χ^2/dof	0.878	0.883	0.779
t_0 (HJD')	7037.92 ± 0.76	7048.54 ± 1.31	7045.13 ± 0.95
u_0	-0.756 ± 0.004	-0.709 ± 0.008	-0.720 ± 0.006
t_E (d)	72.98 ± 0.19	70.28 ± 0.31	68.98 ± 0.30
s	3.433 ± 0.006	3.353 ± 0.010	3.374 ± 0.008
q	0.870 ± 0.007	0.939 ± 0.012	0.867 ± 0.011
α (rad)	-2.687 ± 0.001	-2.689 ± 0.002	-2.703 ± 0.002
ρ	0.0048 ± 10^{-5}	0.0051 ± 10^{-5}	0.0050 ± 10^{-5}
$\pi_{E,N}$	-0.004 ± 0.004	-0.022 ± 0.004	-0.003 ± 0.003
$\pi_{E,E}$	-0.049 ± 0.003	-0.055 ± 0.005	-0.057 ± 0.006
ds/dt (yr $^{-1}$)	—	—	—
$d\alpha/dt$ (yr $^{-1}$)	—	—	—

THE FUTURE OF MICROLENSING

- microlensing searches from space
- possibility to resolve main sequence star lenses
- continuity of observations
- possibility to observe in the NIR-IR where several lenses are brighter
- satellite microlensing parallax
- currently: Spitzer (parallax measurements of 21 single-lens events)
- in 5-10 years: WFIRST, Euclid



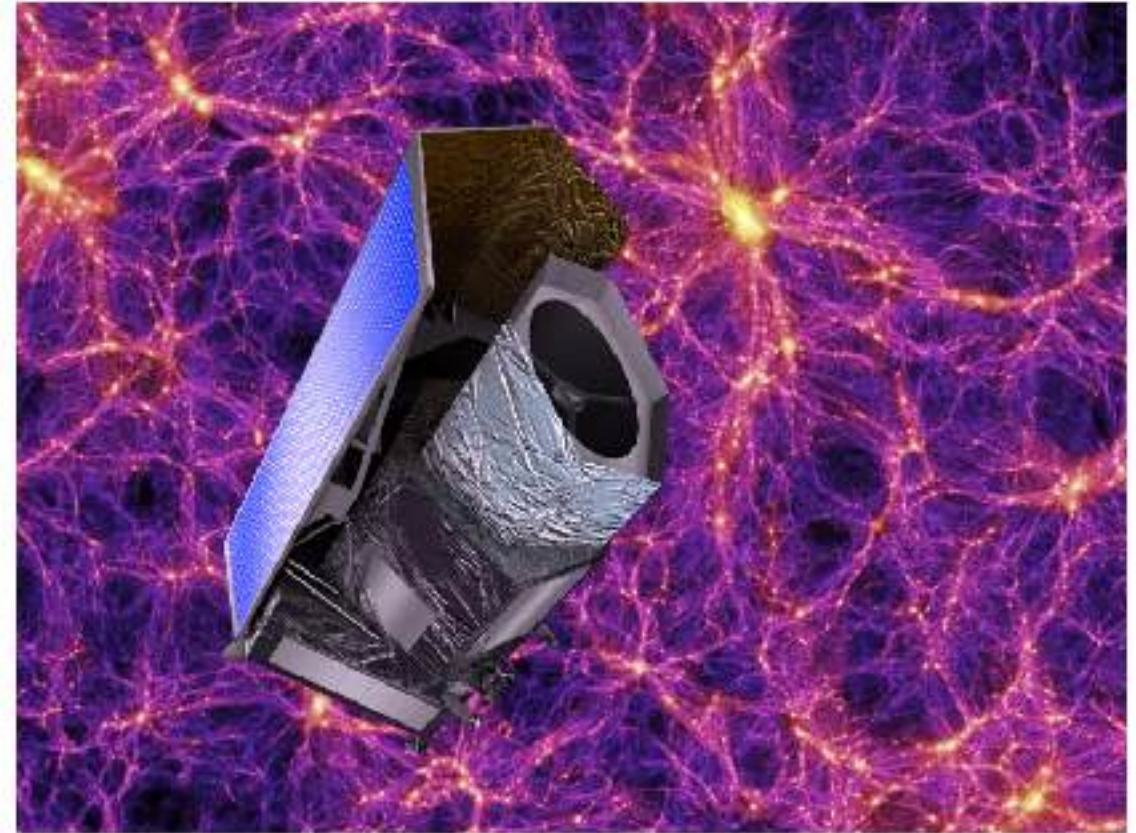
Microlentes con Gaia!!

THE FUTURE OF MICROLENSING: EUCLID

- Lanzado en 2023

1.2m telescope with 0.5 sq. deg FOV;
riz (VIS, 0.1"), Y, J, H (NIR,
0.3")

- primary science: cosmology
(growth of the cosmic
structures, dark energy)
- likely, it will perform secondary
surveys for other science goals:
planet searches via microlensing
- limited view over the galactic
bulge: can observe for about a
month twice a year



- expected performance:
 - Cold earths and neptunes:
35 planets/month
 - Free-floating planets: 15
planets/month

THE FUTURE OF MICROLENSING: WFIRST

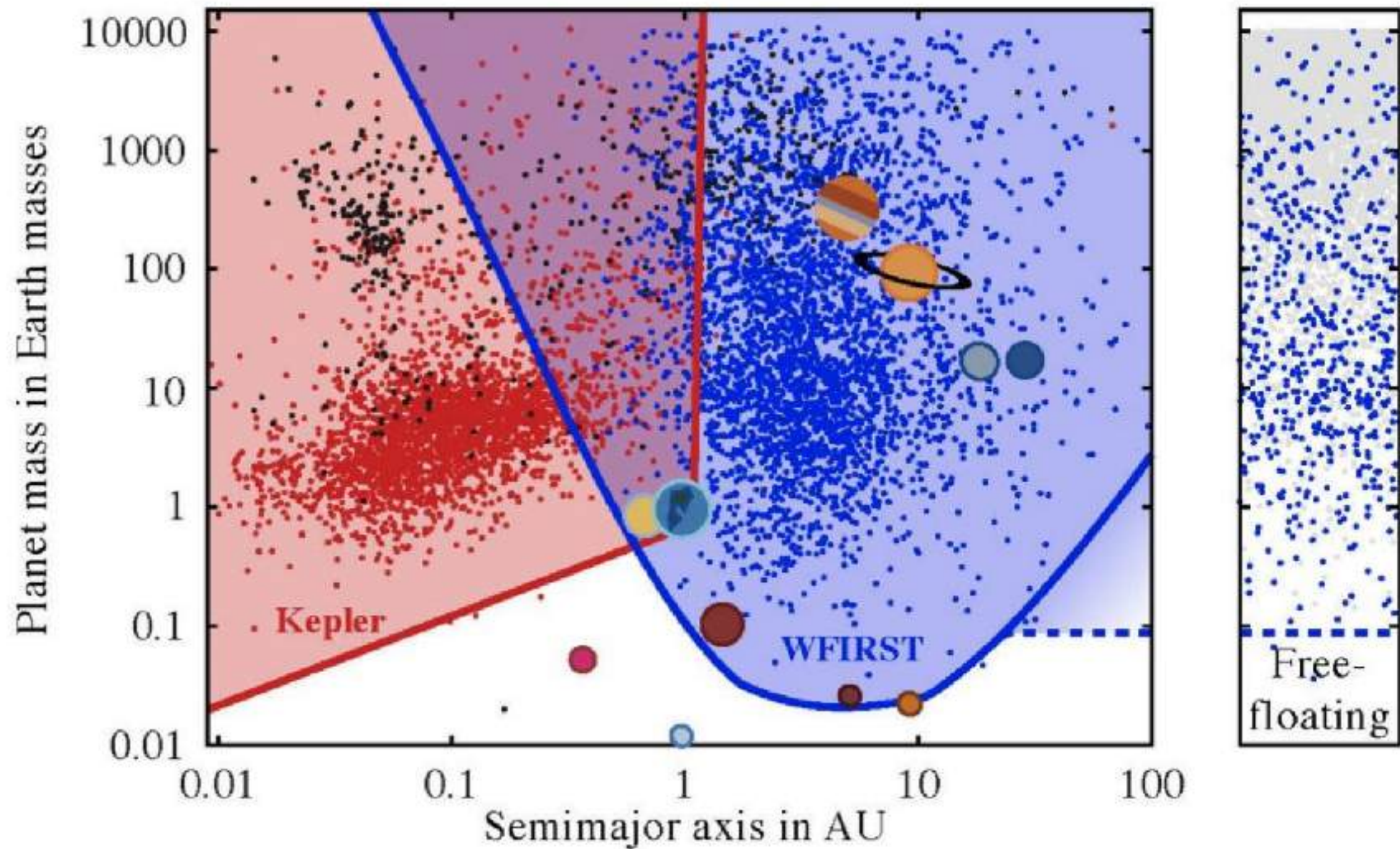
- Roman (WFIRST), exp 2027: 2.4m telescope with 0.28 sq. deg FOV; NIR, 0.76-2.0 μm , $\sim 0.2''$ res.
- primary science: cosmology and planets
- NIR imaging for microlensing
- Chronograph for characterizing the planets and their atmospheres (via direct imaging)
- more flexible telescope: will perform several surveys and will host a GO program



Cadencia de 15 minutos por 72 días!

- expected performance (5 years survey)
 - 3250 bound exoplanets in the range 0.1-1000 Earth mass, 0.1-40 AU
 - 2080 free-floating planets

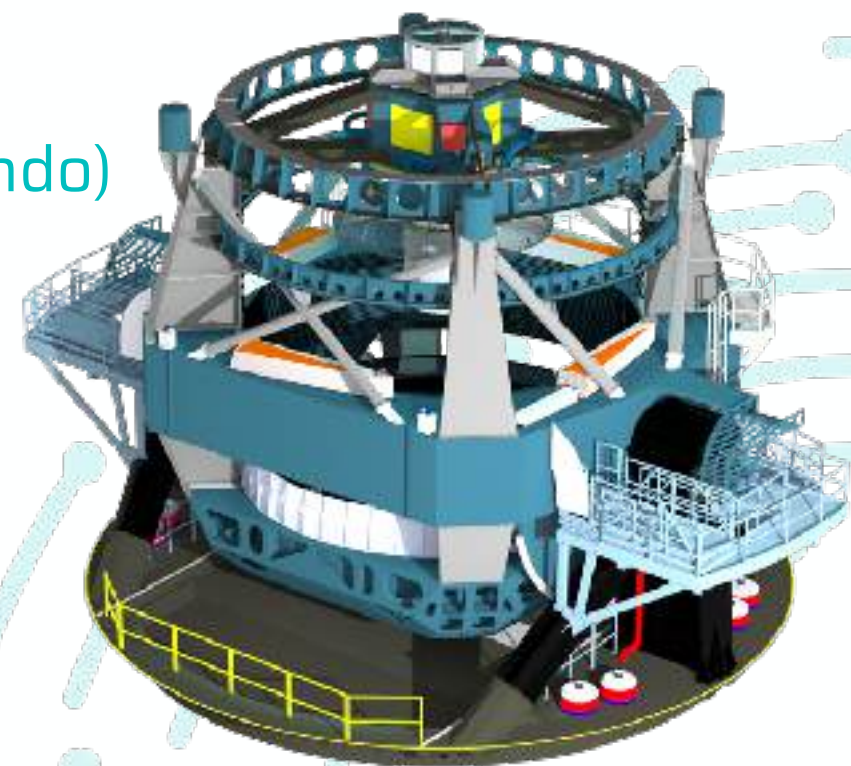
Detección de planetas con Roman



Telescópio Vera Rubin y su LSST

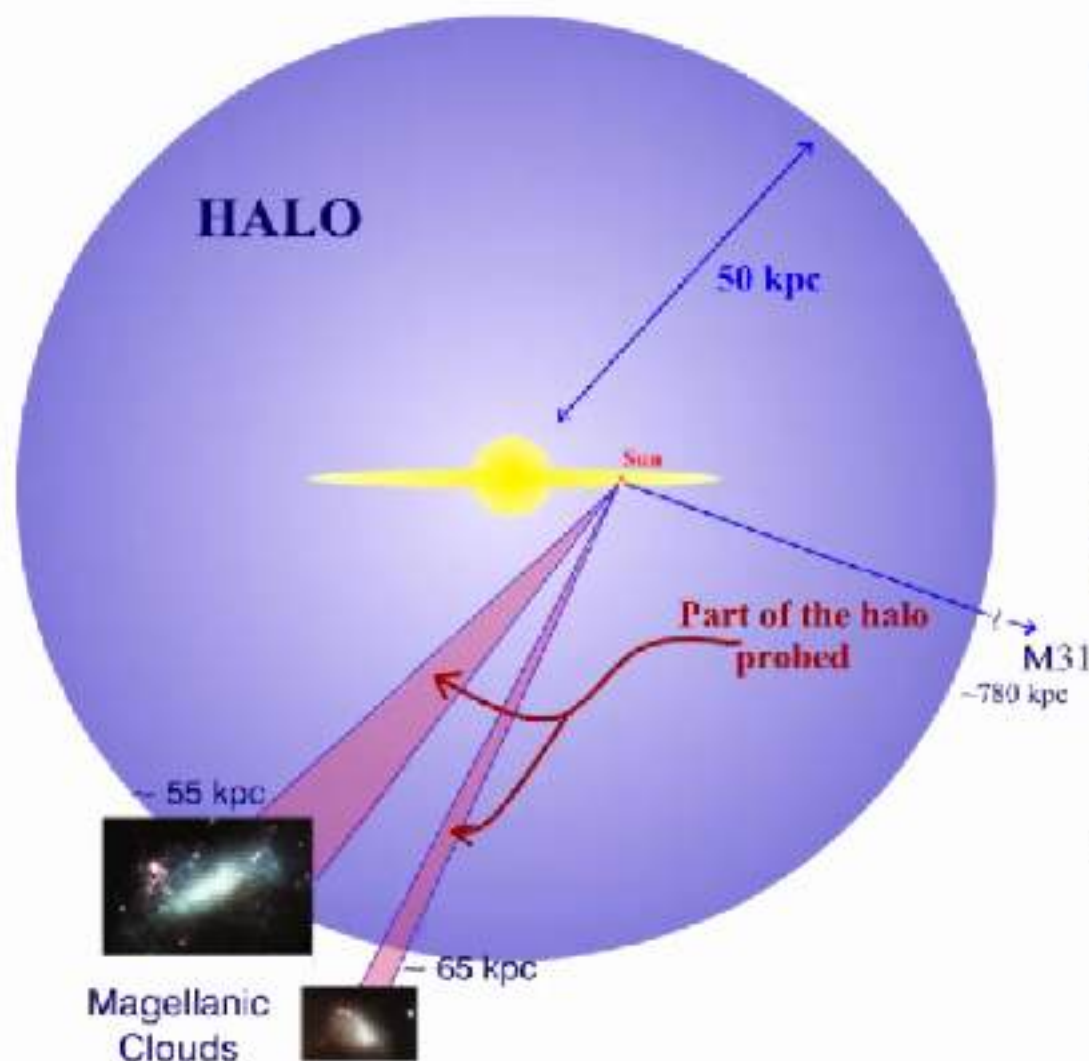
Estado del arte de la astronomía por imágenes con *seeing* natural

- Observatorio completamente nuevo en Cerro Pachón, Chile (con Gemini y SOAR)
- Gran apertura, luminosidad y campo de visión: espejo primario de 8.4 m, nuevo diseño óptico $f/1.2$
- Cámara de 10 *sq-deg* en 3.2 Gpx (mayor cámara del mundo)
- **CCDs gruesas (sensible al rojo) y de lectura rápida (2s!)**
- Habilidad de exposiciones cortas, totalmente automatizado
- Instrumento **ideal y único para relevamientos**
- **No solo el próximo paso: nueva dimensión temporal!**
- 1 millón de alertas por noche!
- Inicio del *survey* con la cámara completa: 2024
- Contribución *in-kind* del IATE/AOC/UNC: membresía en LSST!



Microlentes con Vera Rubin LSST

Adaptado de Tristan Blaineau



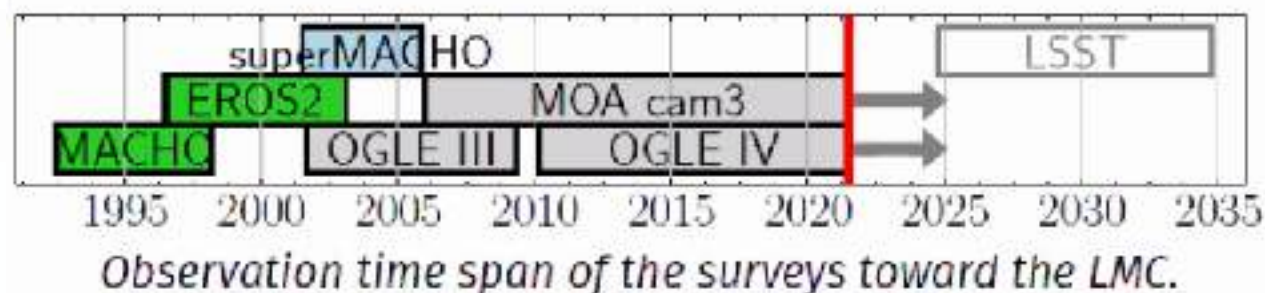
+ Efecto fuerte por galáxias y cúmulos, lensing de supernovas, kilonovas, ondas gravitacionales, microlensing de cúasares, etc.

Hasta el presente:

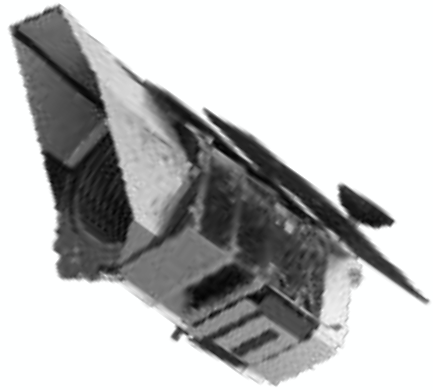
- Búsqueda restringida a regiones con mayor densidad de estrellas de fondo: nubes de Magallanes, M31, bulbo de nuestra galáxia
- Uso de telescopios pequeños ($\sim 1\text{m}$)

Con LSST:

- Búsqueda en toda la esfera celeste! (particular atención al disco de la galáxia y a cúmulos globulares)
- Telescopio moderno de gran apertura efectiva (6,67 m) en un sitio excelente!
- Amplia gama de cadencias accesibles: amplio rango de masa!

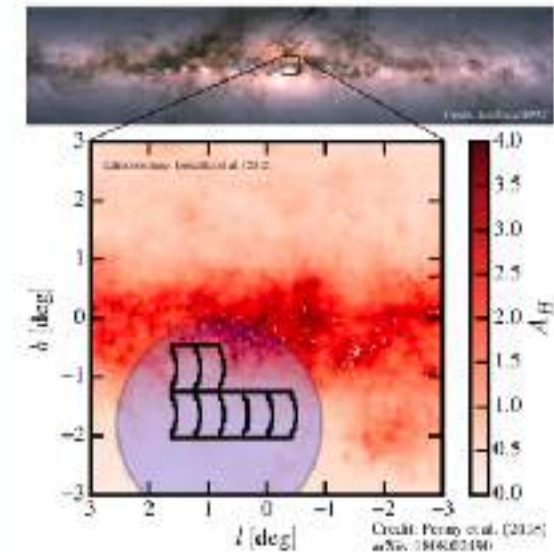


Microensing con Rubin y Sinergia con Roman



- Planetas flotantes, lentes binarias, agujeros negros
- Distribución realista de fuentes con movimientos propios
- Incluye modelos de errores y cadencias de ambos relevamientos
- Incluye efectos de tamaño finito y paralaje(s)
- Ajuste extenso de curvas de luz con pyLima

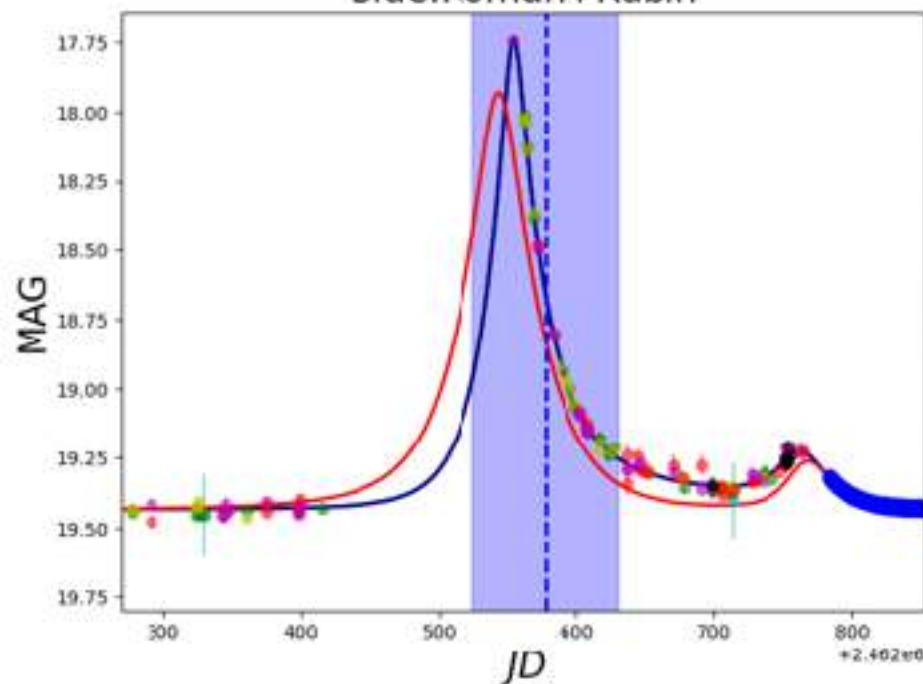
Anibal Varela, UNSAM



Event: 8253 - Roman and RR fits

Red: Roman

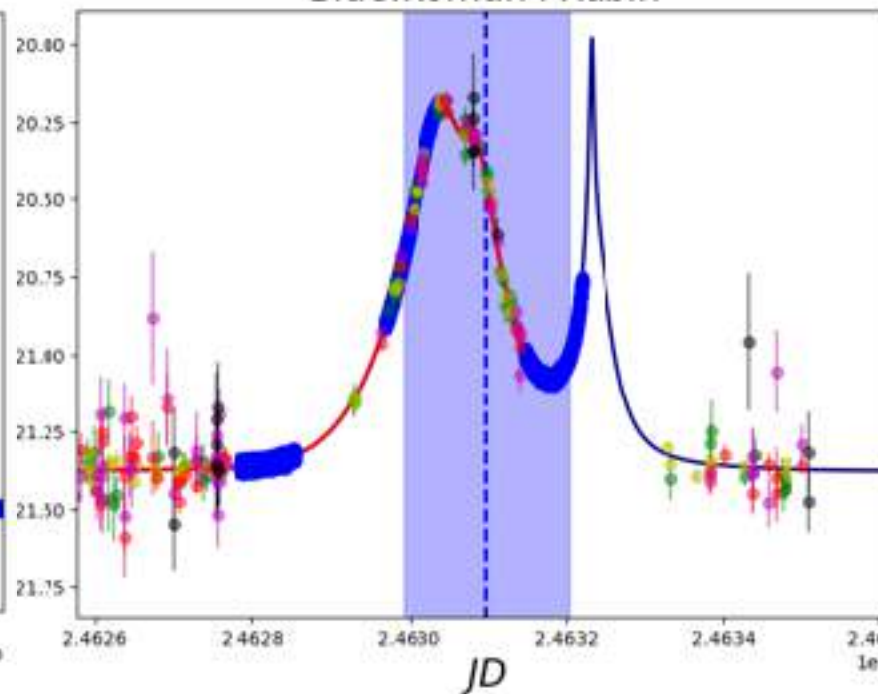
Blue: Roman+Rubin



Event: 14 - Roman and RR fits

Red: Roman

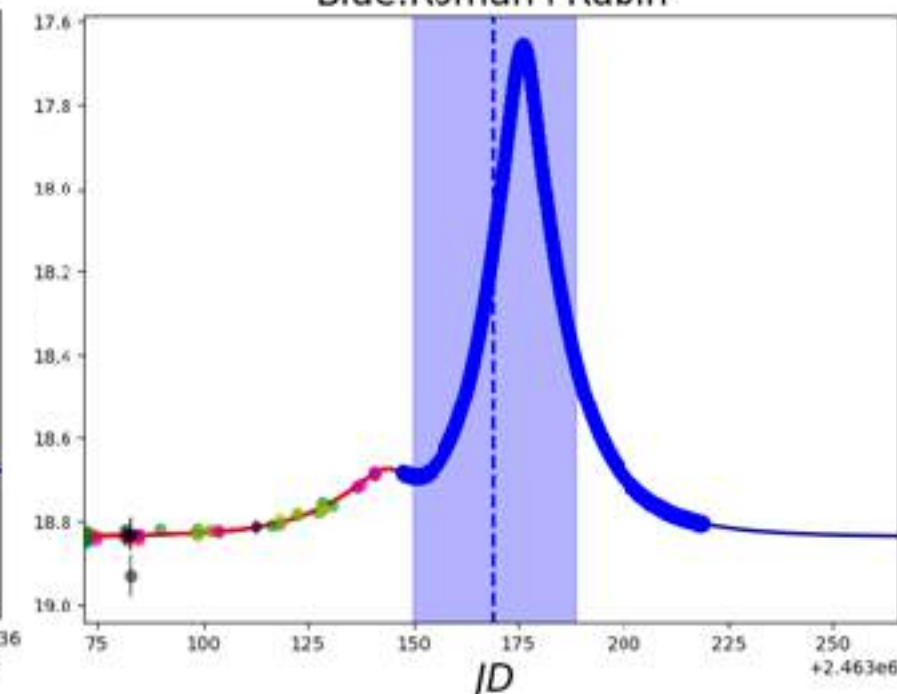
Blue: Roman+Rubin



Event: 214 - Roman and RR fits

Red: Roman

Blue: Roman+Rubin



Case for Rubin-Roman
coordination

arXiv:2306.13792

- Proporcionar una línea de base para Roman
- Rellenar los vacíos en las observaciones de Roman
- Determinar el paralaje para una fracción de los eventos

Y CASLEO??

Un telescopio de 2.15 m ya fue....

Rubin/LSST

- Diámetro efectivo: 6.67 m
- Tiempo de exposición: 30s (2x15s), en 6 filtros (u, g, r, i, z, y)

Jorge Sahade



- Diámetro efectivo: 2.06 m
- Tiempo de exposición para profundidad equivalente a LSST: ~ 300 s
- 6 filtros de LSST en 30 min! (mientras LSST observa en noches distintas)
- Match perfecto para LSST, usando pequeña fracción del tiempo
- Propuesta de una camera sensible al rojo: *skipper* CCDs/Fermilab

HSH

- buen match para observaciones actuales de *microlensing*



Microlensing desde CALEO

Andrea Buccino, Mariano Dominguez, Juan Luna, Luis Mammana, Martin Makler, Damián Mast, Karen Nowogrodzki, Rachel Street, Anibal Varela

Máquinas de descubrimiento: fotometría de campo amplio y baja cadencia (Rubin, ZTF, OGLE)
Necesitan seguimiento: mayor cadencia, anomalías, espectroscopía (para deconvolución y caracterización)



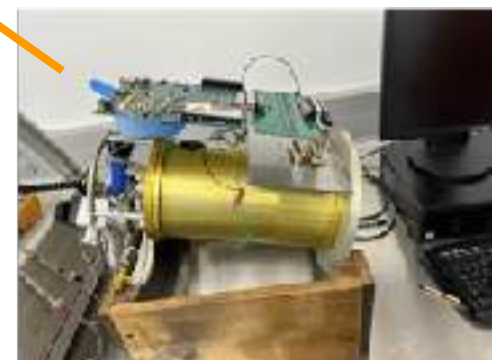
Seleccionar sistemas usando MOP (nuevas características para nuestro programa), red Omega

Fotometría con HSH (0.6m), espectros ToO con JS (2.15m)

Futuro: filtro para FINK (Godines, Nowogrodzki, et al.), también ALeRCE

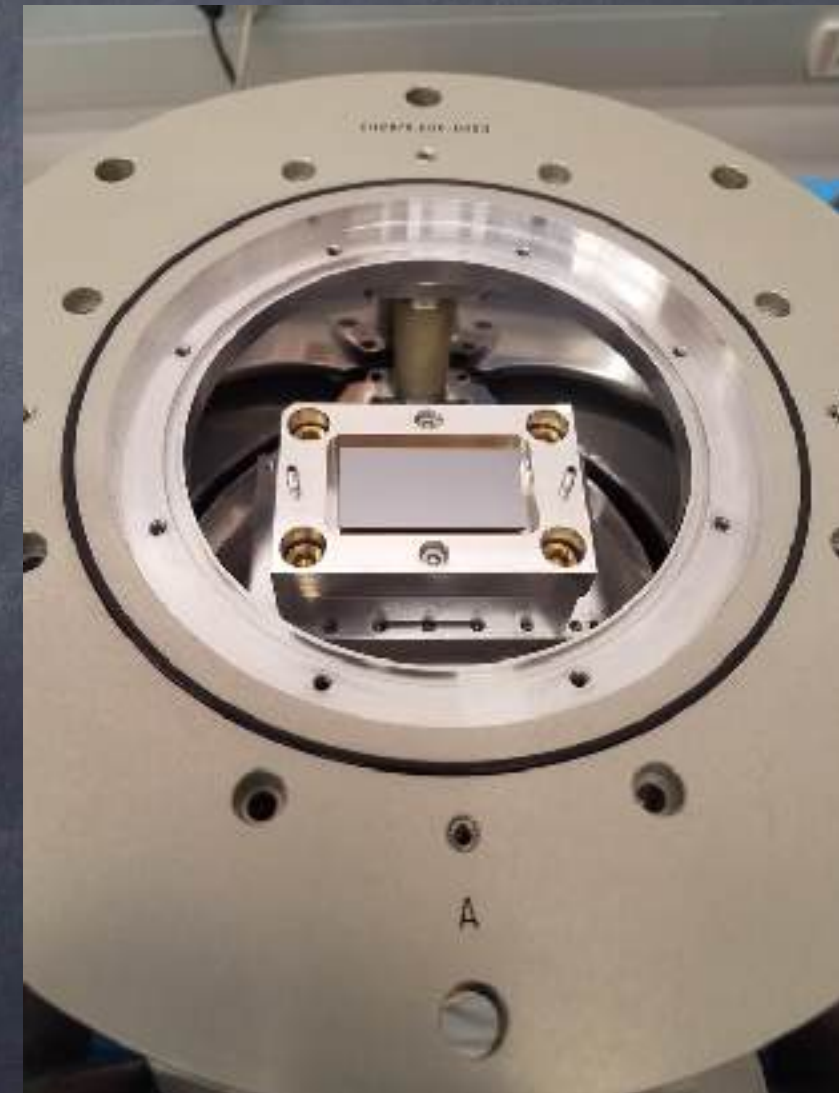
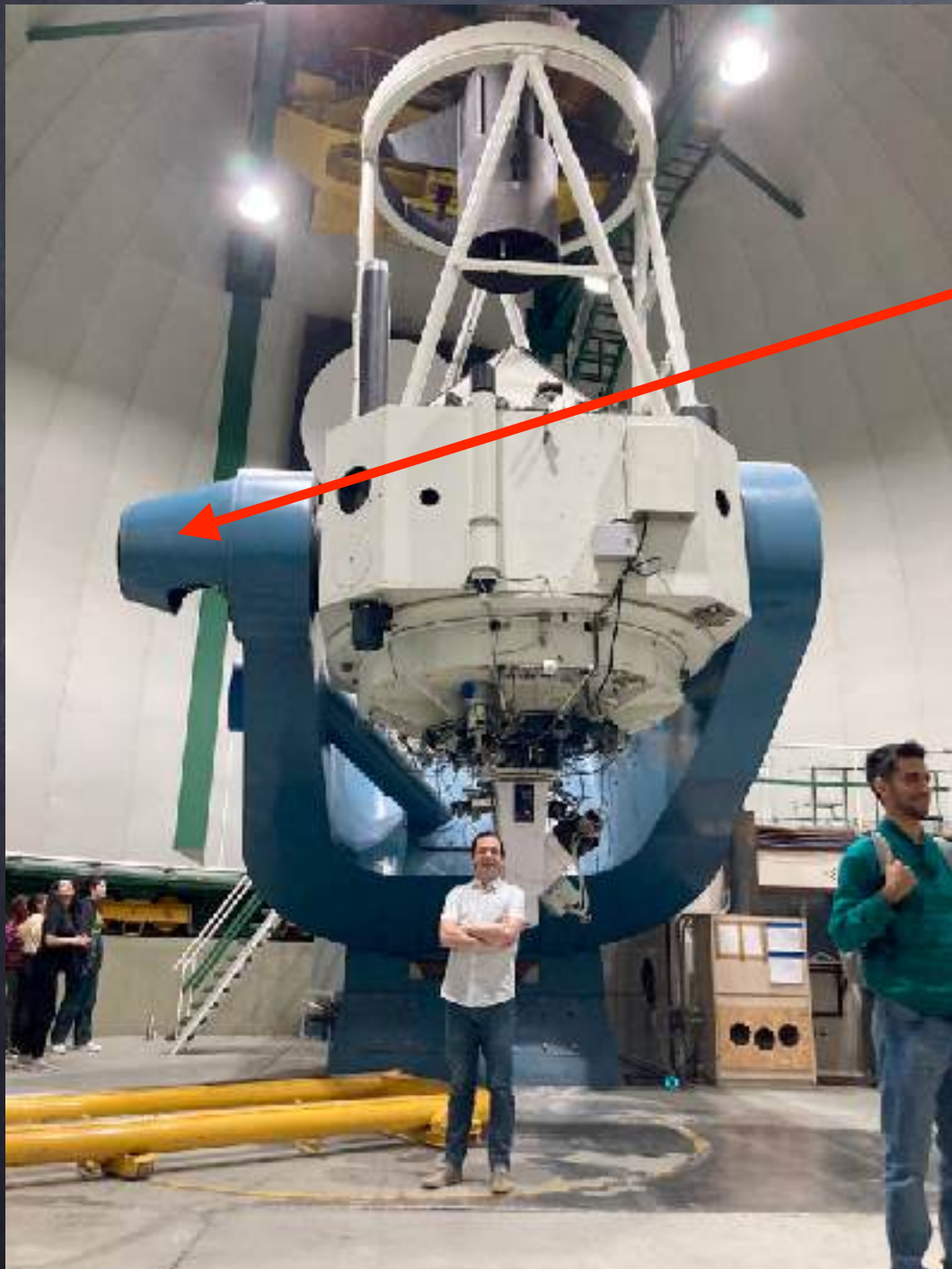
Bonus: nueva cámara Skipper-CCD para JS (Fermilab)

Sensibilidad en el rojo, 16 canales (lectura rápida), se espera en el cielo: ¡2024/2!



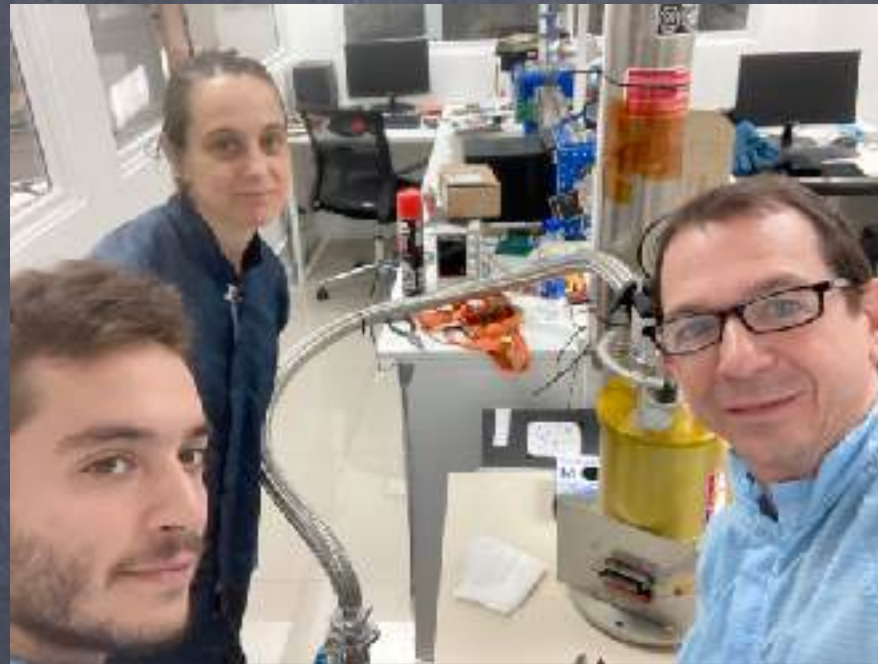
Una nueva cámara para CASLEO

- Para estudiar las microlentes gravitacionales (entre otra cosas...)
- con la nueva tecnología de CCD skipper

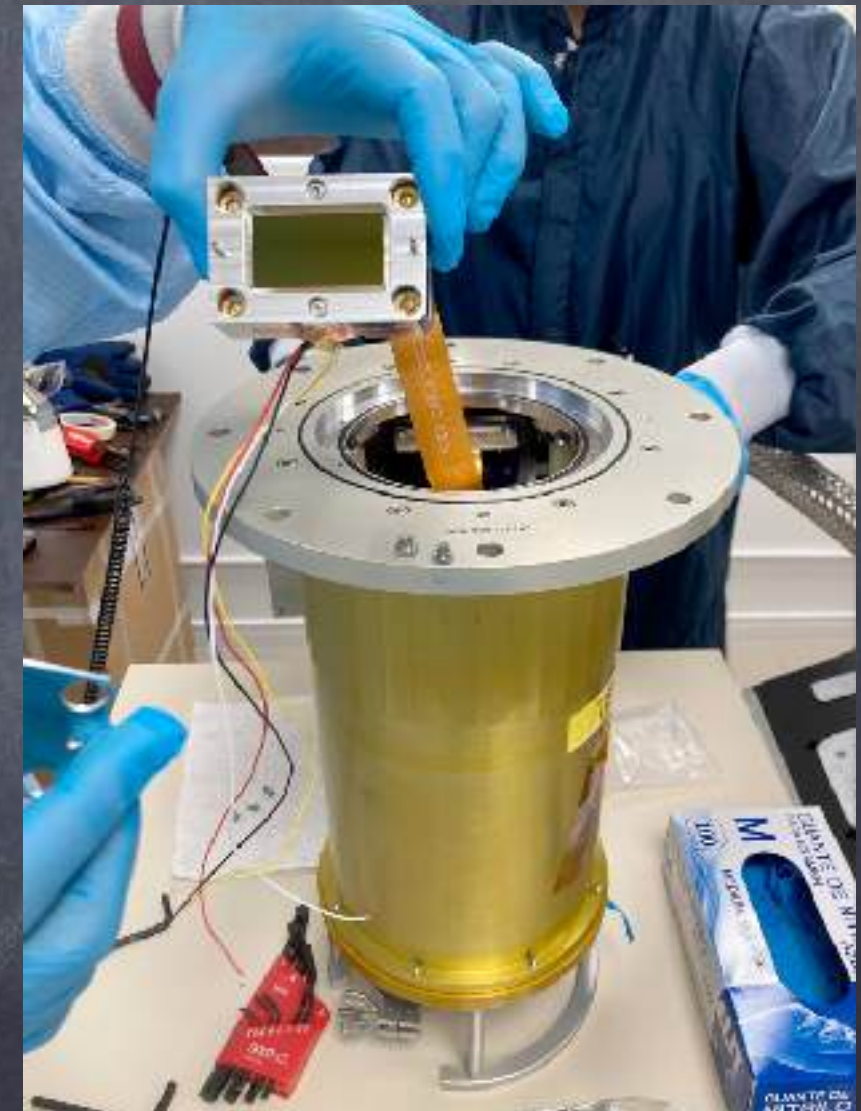


Una nueva cámara para CASLEO

- con la nueva tecnología de CCD skipper



Gracias a nuestros
colaboradores en
NOIRLab/Chile y
Fermilab, la cámara
está ahora en
LAMBDA/UBA en
Buenos Aires!!



A wide-angle photograph of a beach. The foreground is a sandy beach with some small rocks and debris. The middle ground is the turquoise ocean with gentle waves. The background is a clear blue sky. The text is overlaid in the center of the image.

ESTADÍSTICA DE MICROLENTE Y MATERIA OSCURA

Materia Oscura

- Hay materia oscura!
- Se detecta de muchas formas
- No se puede ver: es oscura!
- No solo no se puede ver
 - No puede tener interacción electromagnética
 - No puede tener interacción nuclear débil
- Es una nueva partícula?
- Son agujeros negros (primordiales)?
- Cambiar la gravedad no ha resuelto...
- Es una de las mayores incógnitas de la física

Agujeros Negros Primordiales (PBH)



- Diversos mecanismos de formación en el Universo primordial
- Podrían prescindir de física “exótica” (más allá del modelo estándar) para explicar la materia oscura.
- Abarcan un rango enorme de masas.
- Pueden estar cerca de ser descartados.
- Su confirmación o eliminación tiene implicaciones profundas.
- La mayoría de los límites son de origen astrofísico o cosmológico.
- Algunos límites también son aplicables a otros escenarios de “materia oscura macroscópica”.
- ¿Cómo podemos ayudar a explorar las ventanas aún prometedoras?

Límites en la abundancia de materia oscura



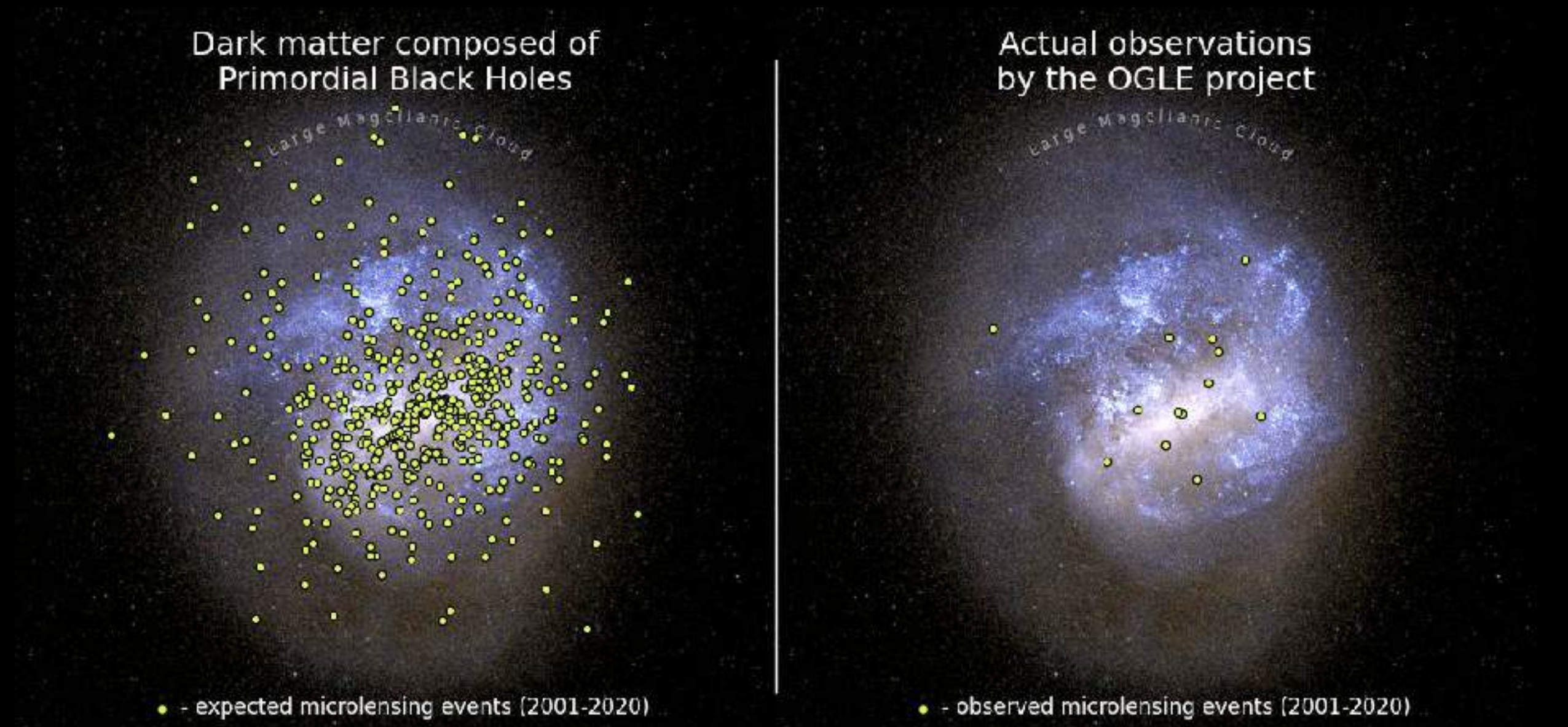
- Modelo de la distribución de materia oscura en nuestra galaxia (datos y simulaciones): $\rho_{DM}(r, \theta, \phi)$
- Suposición: materia oscura en forma de objetos “compactos” (MACHO) de masa M
- $$n(r, \theta, \phi) = \frac{\rho_{DM}(r, \theta, \phi)}{M}$$
- El modelo predice la tasa de detección de eventos de microlente
- La tasa observada permite imponer límites en la fracción de materia oscura en forma de objetos compactos
- La escala de masas accesible depende de las escalas de tiempo y de las distancias de las observaciones (suponiendo que la distribución de velocidades es conocida)

“Si toda la materia oscura en la Vía Láctea estuviera compuesta por agujeros negros de 10 masas solares, deberíamos haber detectado 258 eventos de microlenteo. Para los agujeros negros de 100 masas solares, esperábamos 99 eventos de microlenteo. Para los agujeros negros de 1000 masas solares, 27 eventos de microlenteo.”

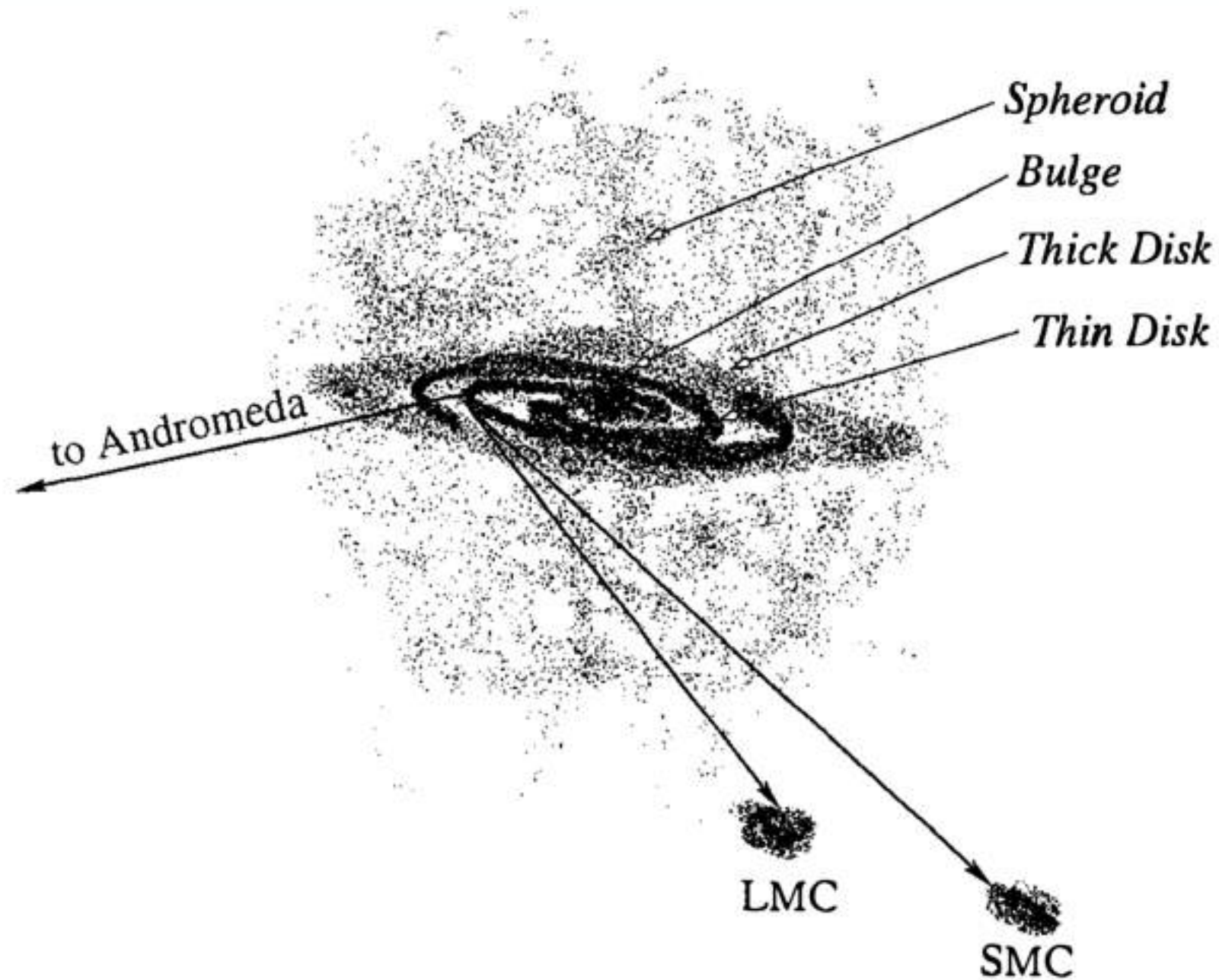
En contraste, los astrónomos de OGLE han encontrado solo 13 eventos de microlenteo. Su análisis detallado demuestra que todos pueden explicarse por las poblaciones estelares conocidas en la Vía Láctea o en la misma Nube de Magallanes, no por agujeros negros.

Los cálculos detallados demuestran que los agujeros negros de 10 masas solares podrían componer, como máximo, el 1,2% de la materia oscura; los agujeros negros de 100 masas solares, el 3,0%; y los agujeros negros de 1000 masas solares, el 11% de la materia oscura.

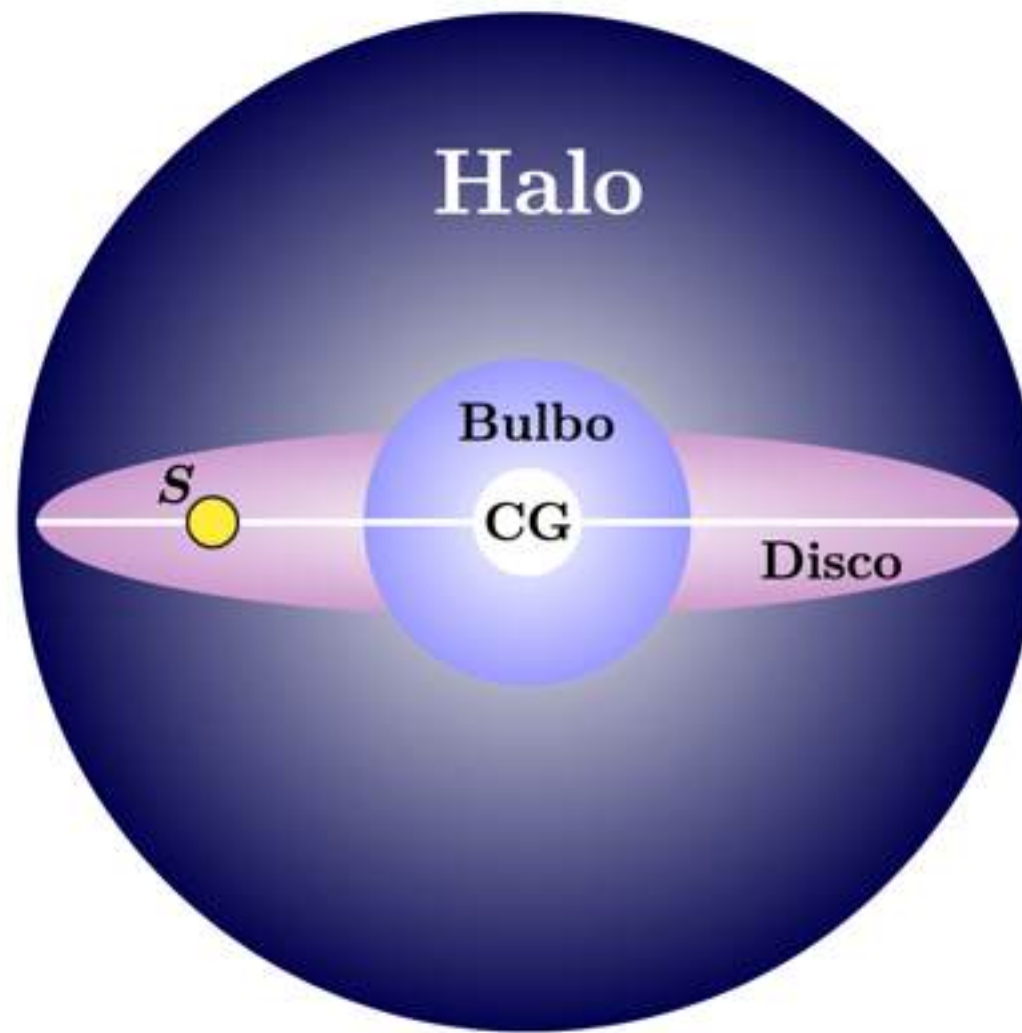
¿Cómo se pueden obtener esas conclusiones?



Nuestra galaxia

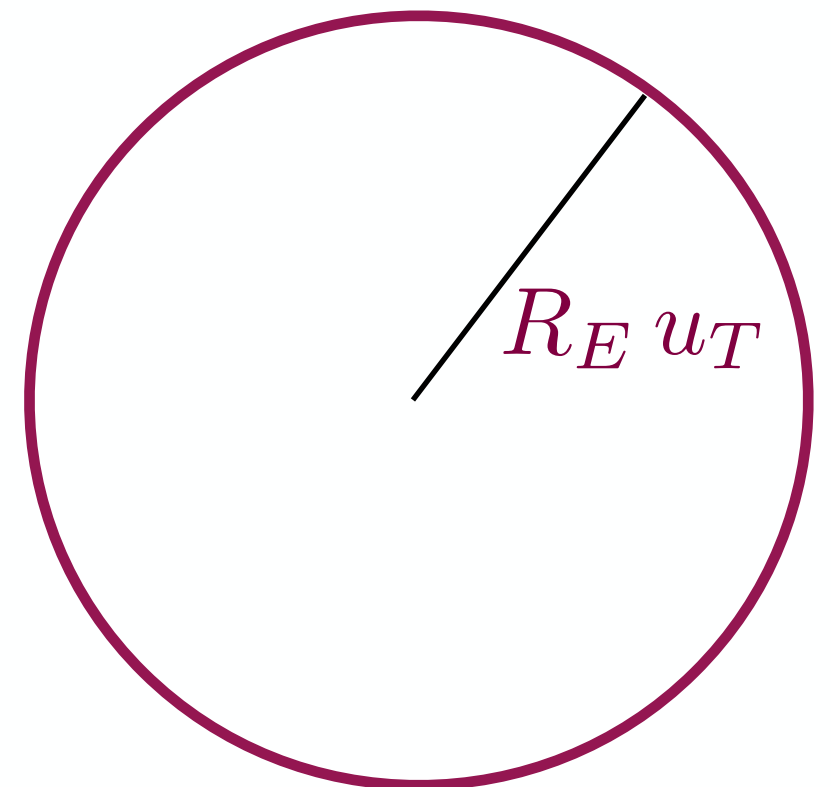


Nuestra galaxia



Sección eficaz

- área en el plano de las fuentes en que se genera un evento detectable
- hipótesis/modelo: magnificación superior a un umbral μ_T
- Recordando $\mu = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}$
- Condición $\mu > \mu_T \rightarrow u < u_T$
- Ejemplo $\mu_T = 1,34 \rightarrow u_T = 1$
- Pregunta: ¿mejor definición práctica de detectabilidad?



Profundidad óptica

- Probabilidad de un evento de *microlensing* en un dado momento

Número de lentes en ángulo sólido

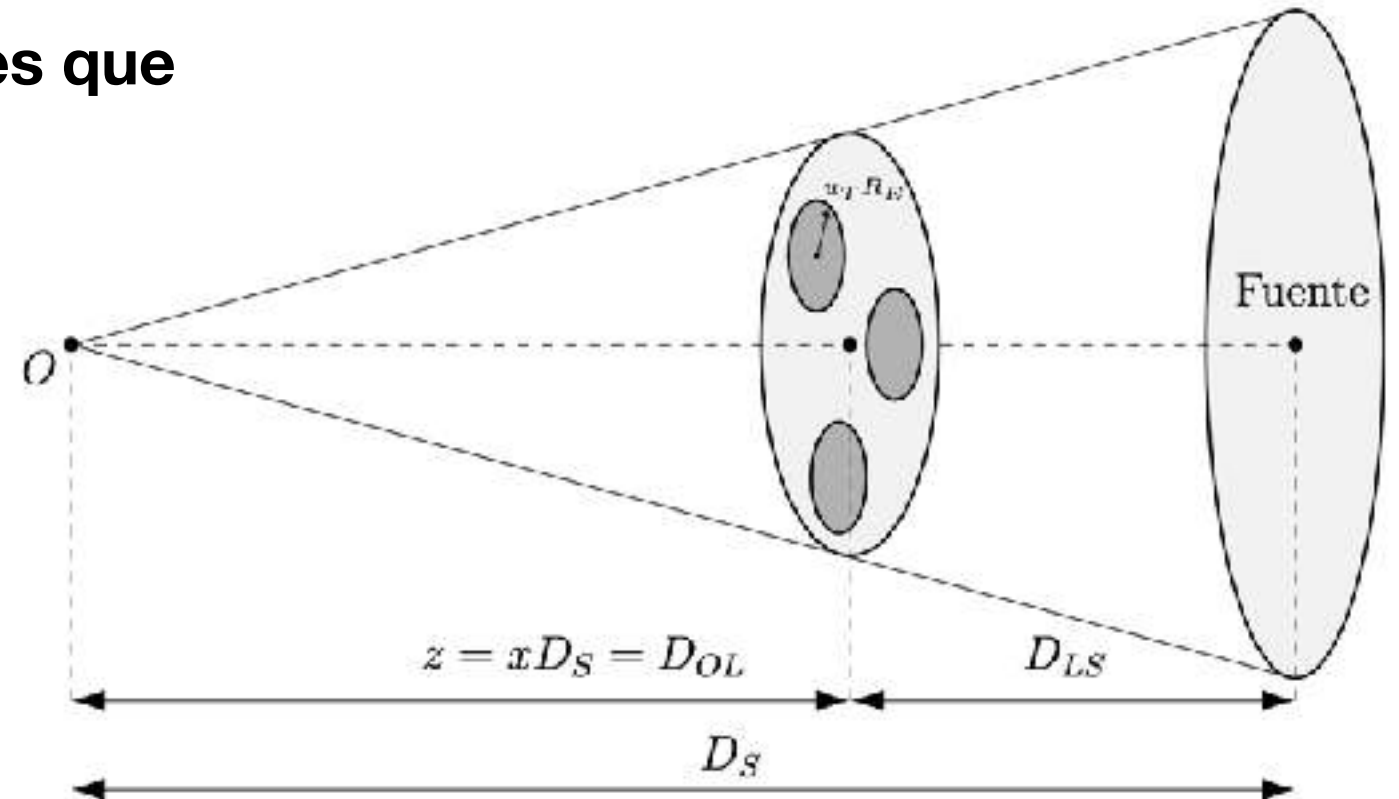
$$dN(z) = \frac{\rho(z)}{M} z^2 \Omega dz$$

densidad de masa promedio generada por la población de lentes

masa de las lentes (monocromático)

Superficie cubierta por fuentes que pueden ser detectadas

$$dA = \pi R_E^2 u_T^2 \frac{\rho(z)}{M} z^2 \Omega dz$$



Profundidad óptica

- Probabilidad de un evento de *microlensing* en un dado momento

**Número de lentes
en ángulo sólido**

$$dN(z) = \frac{\rho(z)}{M} z^2 \Omega dz$$

**Superficie cubierta por fuentes que
pueden ser detectadas**

$$dA = \pi R_E^2 u_T^2 \frac{\rho(z)}{M} z^2 \Omega dz$$

**Probabilidad que a un dado instante se produzca un evento de
microlente detectable sobre una fuente determinada, causado por una
lente entre z y $z + dz$**

$$d\tau = \pi R_E^2 u_T^2 \frac{\rho(z)}{M} dz$$

Profundidad óptica

Probabilidad que a un dado instante se produzca un evento de microlente detectable sobre una fuente determinada, causado por una lente entre z y $z + dz$

$$d\tau = \pi R_E^2 u_T^2 \frac{\rho(z)}{M} dz \quad R_E^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS} D_L}{D_S}$$

integrando a lo largo de la línea de visión y escribiendo el radio de Einstein en términos de las distancias a la lente y a la fuente

$$\tau(D_S) = \frac{4\pi G}{c^2} u_T^2 \int_0^{D_S} \rho(D_L) \frac{D_{LS} D_L}{D_S} dD_L$$

definiendo

$$x = \frac{D_L}{D_S}$$

$$D_{LS} = D_S - D_L = D_S(1 - x)$$

$$\tau = \frac{4\pi G D_S^2}{c^2} \int_0^1 \rho(x) x(1 - x) dx$$

Independiente de la masa de la lente!

Distribución de materia oscura

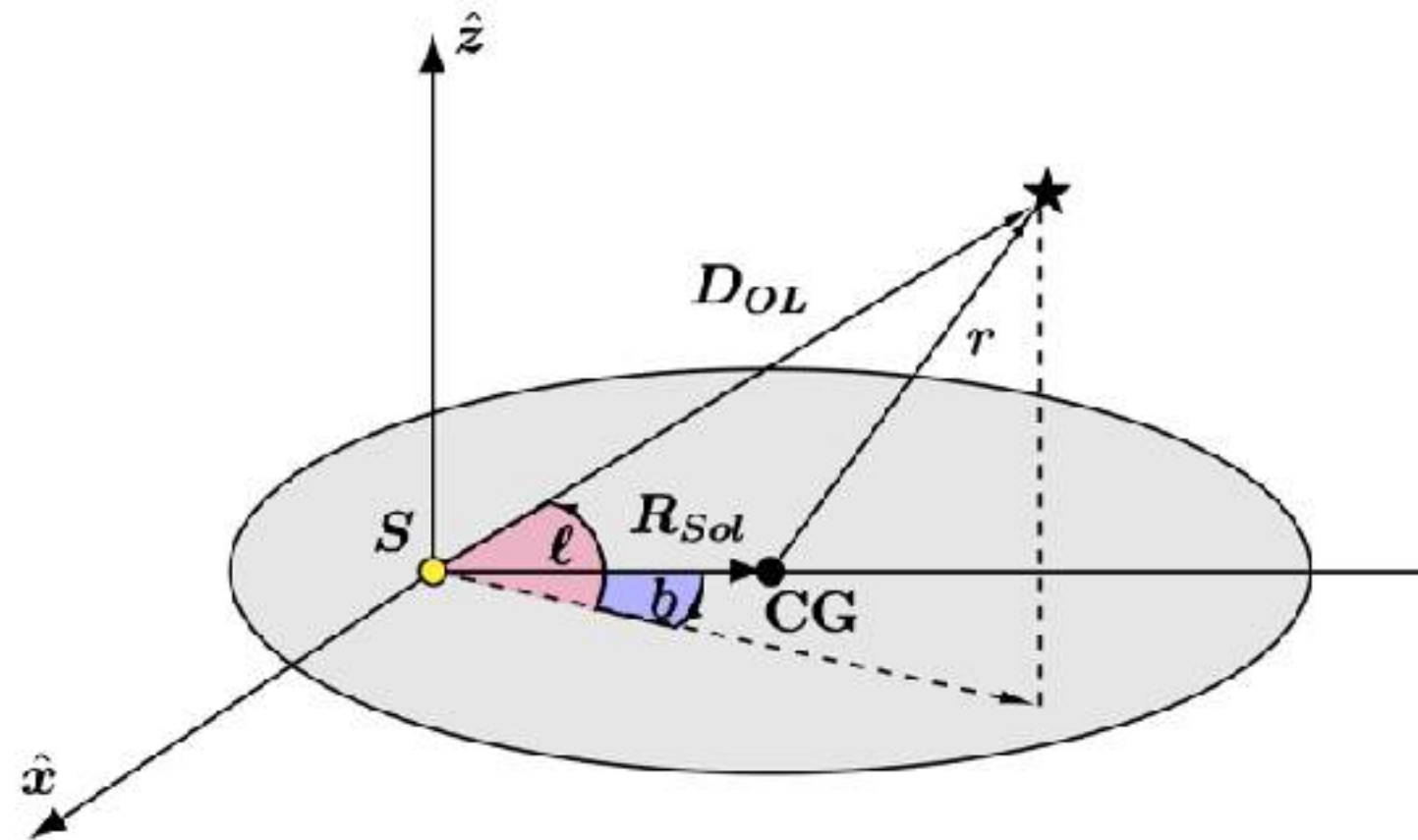
Esfera isotérmica suavizada

$$\rho_{isot}(R) = \rho_{\odot} \frac{R_{Sol}^2 + R_C^2}{R_C^2 + R^2}$$

Navarro-Frenk-White

$$\rho_{NFW}(R) = \frac{\rho_0}{\frac{R}{R_s} \left(1 + \frac{R}{R_s}\right)^2}$$

distancia al centro
de la galaxia



$$r^2 = |\mathbf{D}_{OL} - \mathbf{R}_{sol}|^2 = D_{OL}^2 + R_{sol}^2 - 2D_{OL}R_{sol} \cos(\ell) \cos(b)$$

Profundidad óptica

Esfera isotérmica suavizada

$$\rho_{isot}(R) = \rho_{\odot} \frac{R_{Sol}^2 + R_C^2}{R_C^2 + R^2}$$

Navarro-Frenk-White

$$\rho_{NFW}(R) = \frac{\rho_0}{\frac{R}{R_s} \left(1 + \frac{R}{R_s}\right)^2}$$

Profundidad óptica:

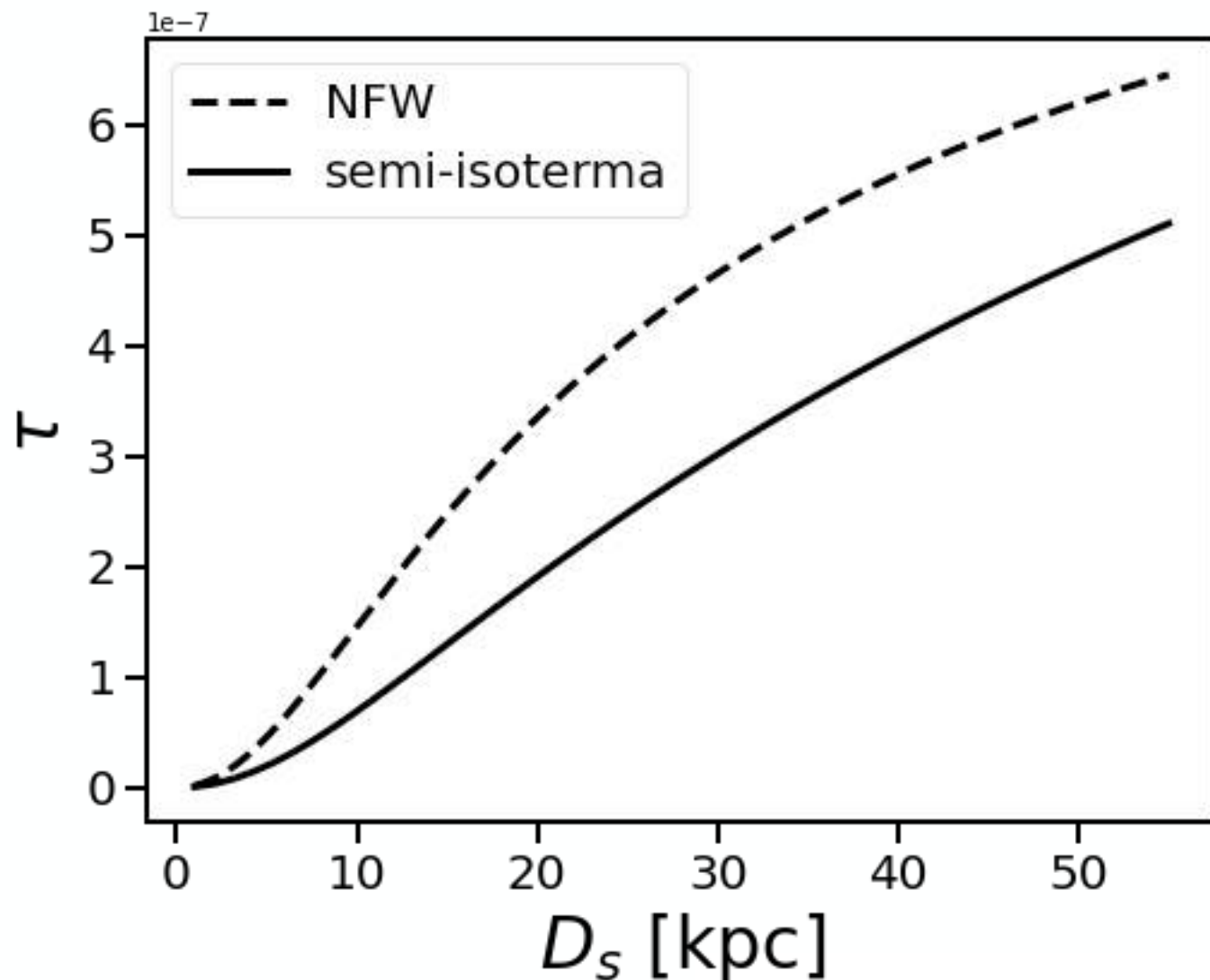
$$\tau = \frac{4\pi G D_S^2}{c^2} \int_0^1 \rho(x) x(1-x) dx$$

$$x = \frac{D_L}{D_S}$$

$$D_{LS} = D_S - D_L = D_S(1-x)$$

$$r^2 = |\mathbf{D}_{OL} - \mathbf{R}_{sol}|^2 = D_{OL}^2 + R_{Sol}^2 - 2D_{OL}R_{Sol} \cos(\ell) \cos(b)$$

Profundidad óptica



Profundidad óptica:

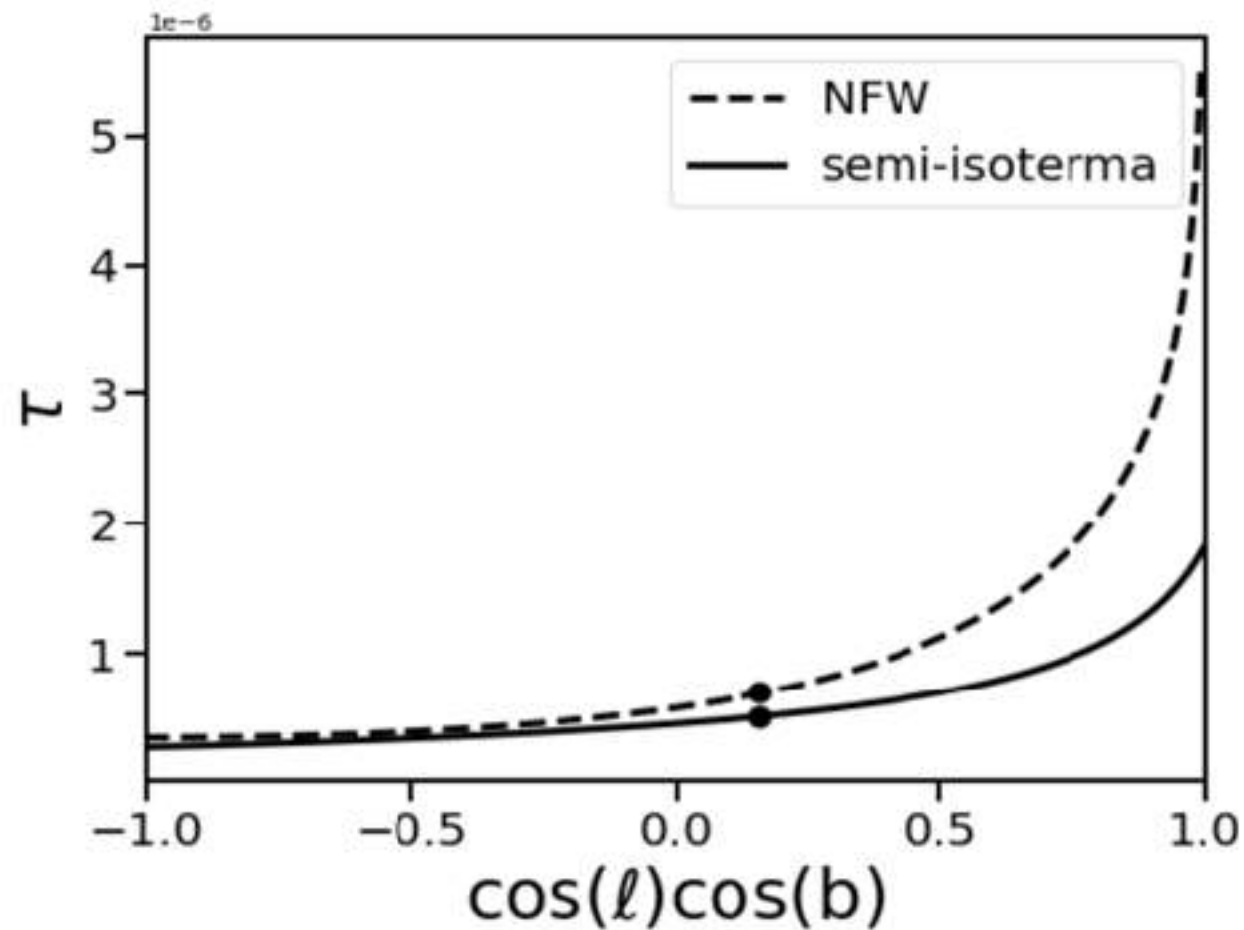
$$\tau = \frac{4\pi G D_S^2}{c^2} \int_0^1 \rho(x) x(1-x) dx$$

$$x = \frac{D_L}{D_S}$$

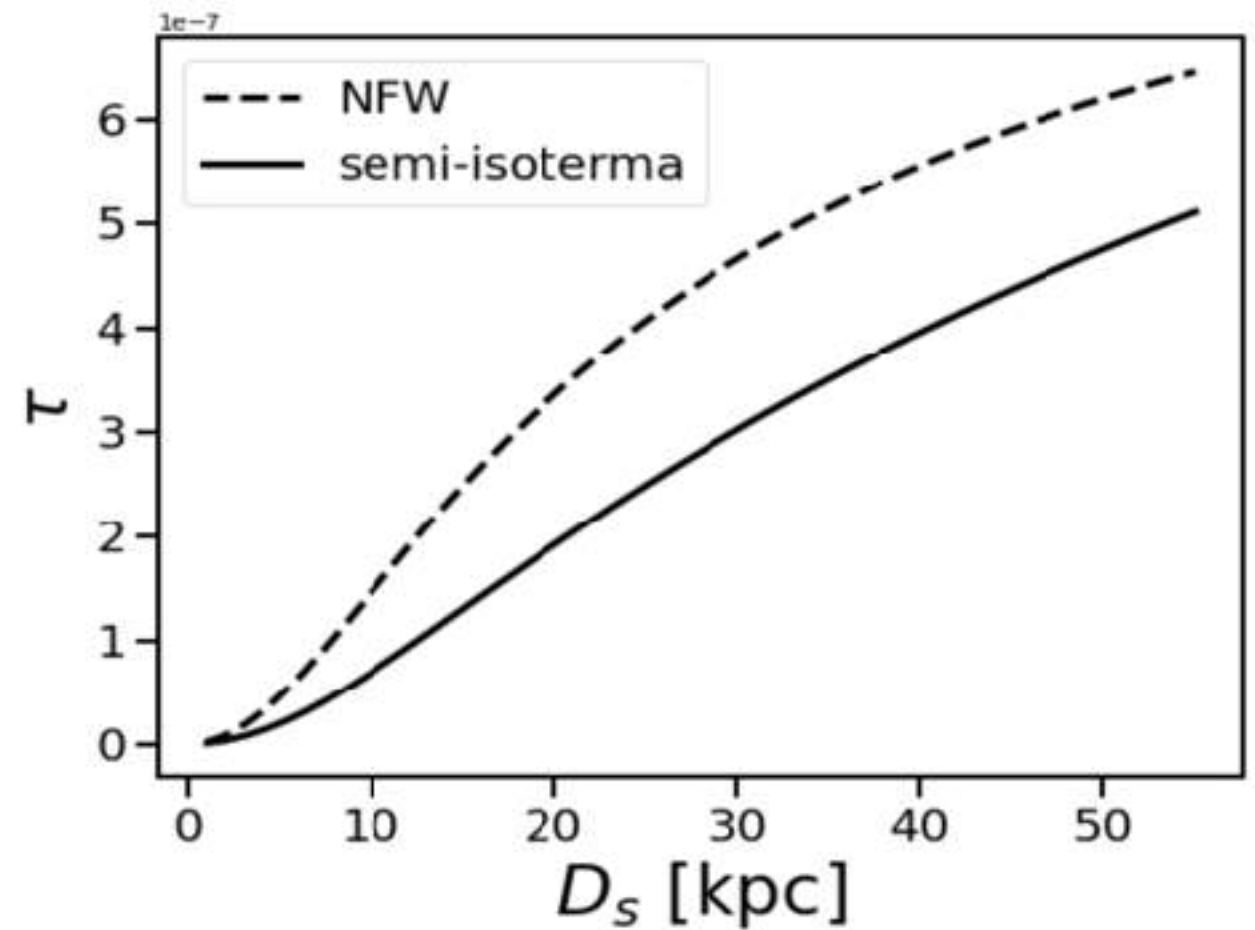
$$D_{LS} = D_S - D_L = D_S(1-x)$$

$$r^2 = |\mathbf{D}_{OL} - \mathbf{R}_{sol}|^2 = D_{OL}^2 + R_{sol}^2 - 2D_{OL}R_{sol} \cos(\ell) \cos(b)$$

Profundidad óptica a LMC



$$\tau_{LMC-SEMIS} = 5,1 \times 10^{-7}$$



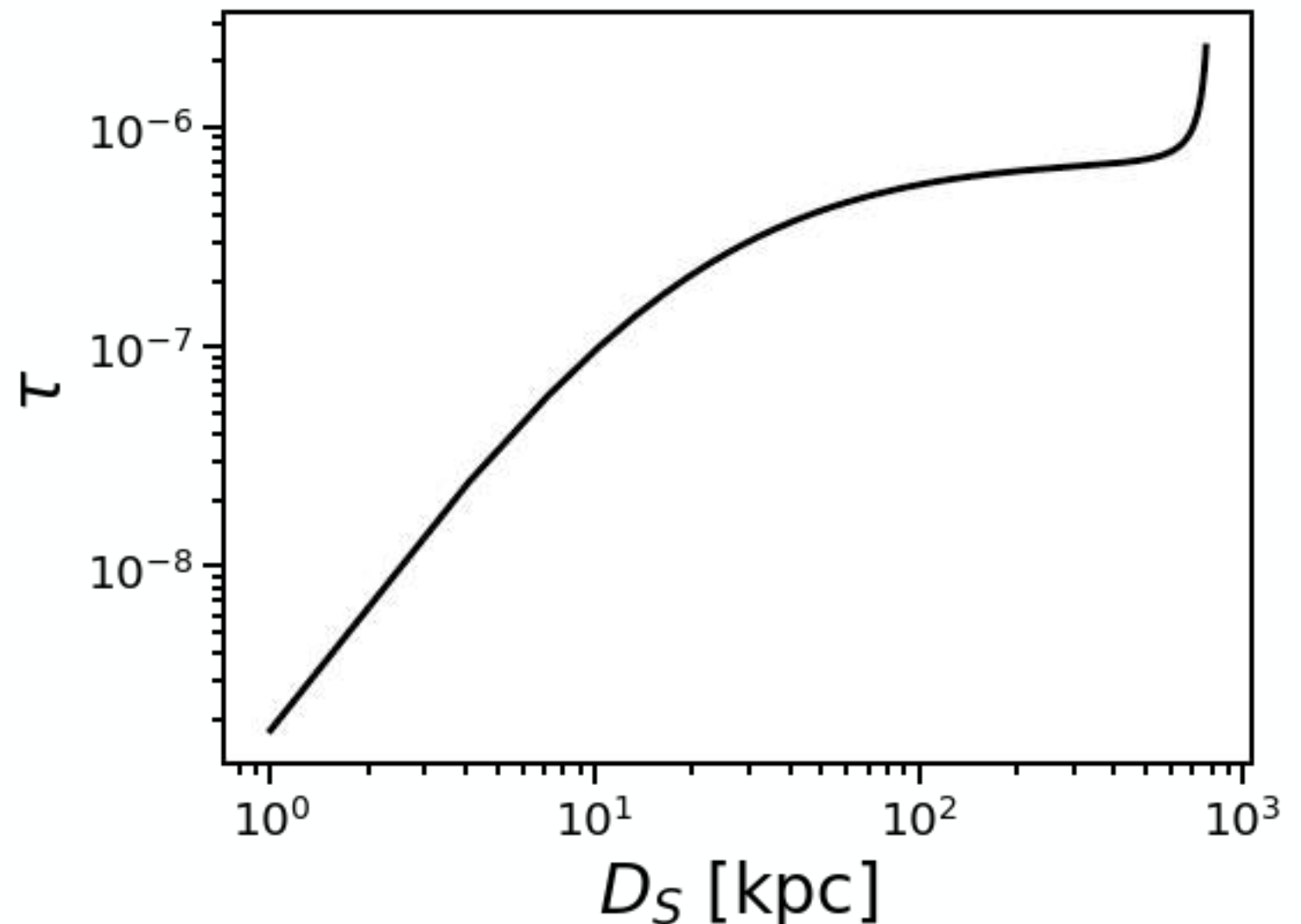
$$\tau_{LMC-NFW} = 6,5 \times 10^{-7}$$

Profundidad óptica a M31

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{MW}(\mathbf{r}) + \rho_{M31}(\mathbf{r})$$

Ejercicio: calcular
la profundidad óptica a M31

$$\tau_{M31} = 2,33 \times 10^{-6}$$



Profundidad óptica para espectro de masas

- Probabilidad de un evento de *microlensing* en un dado momento

$$\tau(D_S) = \int_0^{D_S} dD_{OL} \int_0^\infty dm \frac{dn_L}{dm} \pi R_E^2$$

- Si las lentes poseen la misma masa

$$= \int_0^{D_S} dD_{OL} \frac{\rho_\ell}{m} \pi R_E^2$$

Número de eventos

- Duración característica de los eventos

$$t_E = \frac{\theta_E}{\mu_{\text{rel}}} \simeq \frac{D_L \theta_E}{v_{\perp}^L} \sim 6 \times 10^6 \sqrt{\frac{M}{M_{\odot}}} \sim 0.2 \text{ year} \sqrt{\frac{M}{M_{\odot}}}$$

$\nwarrow \sim 10 \text{ kpc}$
 $\nearrow \sim 200 \text{ km/s}$

- Una primera estimación del número de eventos:

$$N \sim n\tau \frac{\Delta t}{t_E}$$

$\longleftarrow$ duración de la
 campaña de observación
 $\nwarrow$ número total de
 fuentes monitoradas