Lentes gravitacionales
en astrofísica y cosmología

Actividades Prácticas - Día 1

1. [Opcional] Algunos pasos para obtener la desviación de la luz por una fuente puntual (Schwarzschild) en relatividad general (siguiendo el camino del libro Mollerach y Roulet)

   Demuestre que extremizar la acción de una partícula libre es equivalente a extremar $(ds/d\lambda)^2$. *Tip*: eligiendo λ como parámetro afín, $ds/d\lambda$ e constante **a lo largo de la trayectoria**.

   Muestre que la propagación de un fotón en el campo de una masa puntual ocurre en un plano. *Tip*: use las ecuaciones de Euler-Lagrange para $(ds/d\lambda)^2$, elija como condición inicial $\theta = \pi/2$ y muestre que, en ese caso $\dot{\theta} = const.$ a lo largo de la trayectoria.

   Muestre que la desviación de la luz, del infinito al punto de máxima aproximación es dado por:

   $$\Delta\phi := \phi_m - \phi_\infty = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{2GM}{r_m c^2}(1 - x^3)}}, \qquad (1)$$

   donde $x := r_m/r$ y r_m es la distancia de máxima aproximación (i.e. parámetro de impacto).

   Muestre que el ángulo de deflexión puede ser escrito cómo $\hat{\alpha} = 2\Delta\phi - \pi$.

2. Solución exacta versus aproximación de campo débil

   Calcule numéricamente el ángulo de deflexión $\hat{\alpha}$ sin hacer la aproximación de campo débil ($r_m \ll R_S := 2MG/c^2$). Haga una gráfica de $\hat{\alpha} \times r_m/(2R_S)$ en función de (r_m/R_S) para ilustrar el comportamiento del ángulo de desviación próximo al radio de Schwarzschild.

3. Ángulo de deflexión vía teorema de Fermat

   Según la argumentación heurística hecha en clase, podemos asociar la propagación de la luz en un espacio-tiempo curvo a la propagación de la luz en un medio material con índice de refracción n dado por;

   $$n(\vec{x}) = 1 - 2\frac{\phi(\vec{x})}{c^2}. \qquad (2)$$

Usando el principio de Fermat, muestre que el ángulo de deflexión está dado por

$$\vec{\hat{\alpha}}(b) = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\perp}\phi \, \mathrm{dz} \tag{3}$$

donde z es la coordinada en la dirección que une la fuente y el observador (linea de visada, *line-of-sight*), el gradiente es tomado en el plano perpendicular a esa dirección y b es el parámetro de impacto.

Considere $\vec{x}$ dado por el potencial de una masa puntual M. Obtenga el ángulo de deflexión en ese caso.

Tip: Vea el desarrollo en las notas de Massimo Meneghetti.

4. Demuestre que el efecto de lente gravitacional preserva el brillo superficial, de forma que la magnificación es dada por la razón entre las áreas de la imágen y de la fuente. *Tip*: vea la demostración en Petters, Lavine & Wambsganss o Mollerach e Roulet.

5. Obtenga la magnificación de las dos imágenes y la magnificación total en el caso de una lente y fuente puntuales.

6. Curvas de luz de lente y fuente puntuales

   6.1 Hacer curvas de magnificación en función del tiempo en unidades de t/t_E para algunos valores de u_0. *Tip:* considerar valores de u_0 en el rango de 0.2 a 1.2.

   6.2 Considerar una fuente (estrella) situada en el bulbo de nuestra galaxia (aproximadamente el centro galáctico), una lente de una masa solar a mitad de distancia entre la fuente y la Tierra y una velocidad de la fuente de 100 Km/s. Hacer una gráfica de magnificación en función del tiempo, algunos valores de u_0, en ese caso.

7. Solución numérica usando códigos públicos

   Como suele ocurrir en todos los campos, para aplicaciones prácticas de microlentes es necesario usar códigos numéricos. Para empezar a ganar alguna familiaridad con ese tema, se pide que hagan **curvas de luz de lente y fuente puntuales (*point source, point lens*, PSPL) usando alguno de los códigos disponibles públicamente**. Pueden elegir cualquiera. Algunas sugerencias: `pyLIMA`, `MulensModel`, `muLAn` o `eesunhong` (`https://github.com/rges-pit/eesunhong`).

8. Hacer gráficas de la curva de luz de un evento de lente y fuente puntuales en términos de $\Delta m \times (t - t_0)/t_E$. ¿Qué se puede medir a partir de la curva de luz de un evento de lente y fuente puntuales?

9. A partir de la solución de la ecuación de la lente puntual para una fuente puntual, obtener la expresión del desplazamiento del centroide
$$\delta\vec{\theta} = \frac{\vec{y}}{y^2 + 2}\theta_E \tag{4}$$

10. Hacer gráficas del *shift* astrometrico en las dos direcciones ($\delta_{\parallel}$ y $\delta_{\perp}$) en función de $\times(t - t_0)/t_E$, para un evento de lente y fuente puntuales en movimiento uniforme. *Tip:* pueden correr el *notebook* `Lecture 9` de `http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching_2016.html`

11. Obtener la diferencia entre los tiempos de máxima aproximación Δt_0 y entre los parámetros de impacto Δu_0 de un evento medido a partir de dos puntos de observación separados de una distancia $D_{\perp}$ en la dirección perpendicular a la linea de visión. Mostrar que el paralaje normalizado por θ_E se puede obtener a partir de:
$$\vec{\pi}_E = \frac{1}{D_{\perp}}\left(\frac{\Delta t_0}{t_E}, \Delta u_0\right) \tag{5}$$
¿Existe alguna degeneración en la determinación de la paralaje, ya sea satelital o por el movimiento de la Tierra?

    Tip: Ver Morellach & Roulet sección 6.2.3

12. Mostrar que
$$M = \frac{c^2}{4G}\frac{\theta_E}{\pi_E} \tag{6}$$
¿Qúe más, a parte de la masa de la lente, se podría medir usando eventos de microlente y/o combinando con datos externos (no de microlentes)?

    ¿Se les ocurre algún ejemplo más allá de lo discutido en la clase?

    ¿Se les ocurre algún avance tecnológico/de instrumentación/observacional que permitiría medir nuevos fenómenos asociados a microlentes?

13. Al considerar el movimiento relativo entre lente y fuente observado desde distintos puntos y su consecuencia en las curvas de luz, mostrar que la paralaje es dada por $\pi_E = |\vec{\pi}_E|$ con
$$\vec{\pi}_E = \frac{1}{D_{\perp}}\left(\frac{\Delta t_0}{t_E}, \Delta u_0\right) , \tag{7}$$
donde $D_{\perp}$ es la distancia entre los dos puntos de observación en la dirección perpendicular a la línea de visión.

14. Mostrar que
$$M = \frac{c^2}{4G}\frac{\theta_E}{\pi_E} \tag{8}$$
¿Qué más, a parte de la masa de la lente, se podría medir usando eventos de microlente y/o combinando con datos externos (no de microlentes)?

¿Se les ocurre algún ejemplo más allá de lo discutido en la clase?

¿Se les ocurre algún avance tecnológico/de instrumentación/observacional que permitiría medir nuevos fenómenos asociados a microlentes?

15. Ecuación de da lente en el formalismo complejo

Definiendo
$$x = \frac{\theta_x + i\theta_y}{\xi_0} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{\beta_x + i\beta_y}{\eta_0}, \tag{9}$$
muestre que la jacobiana del mapeo del plano das imágenes en el plano de las fuentes es dada por
$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix} = \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|^2 - \left|\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right|^2,$$
donde la barra denota el complejo conjugado.

16. Hacer gráficas de magnificación versus posición en el plano de las fuentes para lentes puntuales y: i) fuentes uniformes con distintos valores de radio en unidades del radio de Einstein ($r = R/(D_S\theta_E)$, ii) una fuente con $r = 0.25$ y coeficientes de oscurecimiento del limbo $u_\lambda = 0.3, 0.6, 0.9$.

Para ambos casos pueden usar las expresiones que vimos en la clase teórica o bien usar algún código público como los mencionados en la práctica 1.

17. Lentes binarias

Muestre que con las variables complejas definidas en la Eq. (9), la ecuación de la lente para lentes binarias se puede escribir como:
$$y = x - \frac{\mu_A}{\bar{x} - \bar{x}_A} - \frac{\mu_B}{\bar{x} - \bar{x}_B},$$
donde $\mu_i := M_i/\left(M_A + M_B\right)$ y x_i son las posiciones de las masas puntuales ($i = A, B$). Para obtener este resultado, elija $\xi_0 = \theta_E$, donde el radio de Einstein es el asociado a la masa total $M_A + M_B$.

Encuentre la ecuación que define las curvas críticas. Por simplicidad, defina el origen en el punto medio de las dos componentes (es decir, $z_A = -z_B$) y alinéelas a lo largo del eje real.

La forma de las cáusticas y curvas críticas depende de la separación entra las componentes de la lente (en unidades del radio de Einstein), $d := |x_A - x_B| = 2\,|x_A|$, y de la relación entre las masas, $q := \mu_A/\mu_B$. Obtenga las curvas críticas y cáusticas para algunos valores de estas cantidades.

Existen tres diferentes regímenes para las formas de las cáusticas y curvas críticas, dependiendo de la topología de estas curvas: sistemas de gran separación, intermedia y pequeña. Obtenga la distancia que define la transición entre estos regímenes (en función de μ_A y μ_B).

Tip: La transición entre estos regímenes ocurre cuando dos curvas críticas se fusionan (o se separan) en uno o más puntos. Como las curvas críticas tienen el mismo valor de J ($J = 0$), en el momento en que se fusionan, el gradiente de J debe anularse (al menos en una dirección). Así, los puntos de fusión deben satisfacer $J = 0$ y $\partial J/\partial \bar{x} = 0$. La combinación de estas condiciones lleva a $\partial^2 y/\partial \bar{x}^2 = 0$, lo que fija la relación entre el valor crítico de $\bar{x}$ y μ_i. Más específicamente, esta relación será dada por:

$$\bar{x} + \bar{x}_A = 2x_A \left[1 - \left(-\frac{\mu_A}{\mu_B} \right)^{1/3} \right]^{-1}.$$

La raíz cúbica llevará a tres soluciones para esta ecuación. Insertando estas soluciones en la condición $J = 0$, se obtiene la expresión final para la separación (que es función solo de μ_1 y μ_2). La solución -1 de la raíz cúbica llevará al valor d_g, referente a la transición entre los regímenes intermedios y de gran separación. Ya las soluciones $e^{\pm i\pi/3}$ llevarán al valor d_p, referente a la transición entre los regímenes intermedios y de pequeña separación. Obtenga d_g y d_p. Note que, como dos soluciones de la ecuación anterior llevan al mismo d_p, esto significa que las curvas críticas se fusionan en dos valores distintos de x. Compare sus resultados con los de Meneghetti.

Referencia: Para el formalismo de lentes con números complejos, vea el capítulo 15 del libro *Singularity Theory and Gravitational Lensing* (sección 15.1 para el formalismo general y sección 15.2.2 para lentes binarias). Para el formalismo complejo, vea también Schramm, T.;

Kayser, R., *The complex theory of gravitational lensing. Beltrami equation and cluster lensing*, A&A, **299**, 1 (1995).

18. Hacer gráficas de las curvas críticas y cáusticas de lentes binárias. *Tip:* pueden correr el *notebook* `Lecture 11` de `http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching_2016.html`

19. Bajar alguna curva de luz disponible públicamente en que sea aparente el efecto de fuente finita.

    - hacer una gráfica de la curva de luz, incluyendo las barras de error fotométrico
    - ajustar ese evento con una curva de lente y fuente puntuales
    - obtener el residual entre los datos y el modelo
    - ajustar por un modelo de fuente finita con o sin oscurecimiento del limbo
    - obtener los residuales en ese caso y comentar los resultados

20. Bajar alguna curva de luz disponible públicamente en que sea aparente el efecto de paralaje secular (o sea, por el movimiento de la Tierra el rededor del Sol)

    - hacer una gráfica de la curva de luz, incluyendo las barras de error fotométrico
    - ajustar ese evento con una curva de lente y fuente puntuales en movimiento relativo uniforme
    - obtener el residual entre los datos y el modelo
    - ajustar por un modelo con paralaje
    - obtener los residuales en ese caso y comentar los resultados

    Tips para los items 19 y 20: muchos eventos están disponibles públicamente, ya sea como tablas en los papers publicados o en bases de datos de microlensing. Es relativamente fácil encontrar eventos notables con paralaje prominente o con efectos de fuente finita (especialmente en el caso de candidatos a plateas libres (*free floating* o *rogue planets*). Además, vários códigos de microlentes suelen tener demos, usando datos ya cargados en sus tutoriales.

    En cualquier caso, describa de dónde se han bajado los datos, a que proyecto corresponden, como se han hecho los plots y fits, etc.

21. Para una lente binaria y una fuente puntual, obtener las imágenes y las curvas de luz para distintas trayectorias de la fuente, variando: razón entre las masas de la lente, distancia entre las componentes de la lente, punto de máxima aproximación de la trayectoria, ángulo de la trayectoria con relación al eje que une las dos componentes de la lente.

    Tip: pueden correr el *notebook* `Lecture 11` de `http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching_2016.html`

22. Como en el ítem anterior, hacer curvas de luz de lentes binarias, para varias configuraciones de los parámetros de la lente y de la trayectoria de la fuente. Sin embargo, ahora considerar los efectos de fuente finita. O sea, hacer las gráficas para fuente infinitesimal y para fuentes finitas suficientemente grandes como para que se note su efecto.

    Tip: De la misma forma que para los ítems 3 y 4, pueden usar algún código disponible públicamente, en este caso que incluya el efecto de fuente finita. Entre los códigos disponibles en github, con algún nivel de documentación, podemos citar: `pyLIMA`, `MulensModel`, `muLAn`, `RTModel` y `eesunhong` (`https://github.com/rges-pit/eesunhong`). Algunos de ellos poseen tutoriales en sus repositórios o disponibles en la web.

23. Sesión eficaz

    i) Obtenga la sesión eficaz de una lente puntual para magnificaciones superiores a 10.

    ii) Obtenga la sesión eficaz de una lente puntual para un *shift* astrométrico superior a 10 mas.

    iii) Extra: ¿Si en lugar de usar una **magnificación umbral**, μ_T, como criterio de detección, eligiéramos un dado valor umbral de la razón señal ruido (S/N), R_T, cómo se obtendría la sesión eficaz?

    Aquí, definamos como S/N como la significancia del pico de la curva de luz. O sea, dado el valor de la magnitud en el máximo $m_{\max}$ (que ocurre en $u = u_{\min}$) y su error $\Delta m_{\max}$ y dado el valor de la línea de base (fuente sin magnificación) m_0, definimos

    $$R = \frac{m_0 - m_{\max}}{\Delta m_{\max}} \,. \tag{10}$$

    Obtener la sección eficaz para $R > R_T$. Esa sección eficaz dependerá ahora solamente de u_T o tendrá una dependencia en otras variables?

    Si midiéramos el flujo de la fuente y su error, como eso se relaciona con el error en la magnitud ¿cómo quedaría la sección eficaz expresada en términos del flujo y su error?

iv) Extra: Si estamos en situaciones en que el efecto de fuente finita es importante, ¿cómo se obtendría la sección eficaz para una magnificación de corte μ_T?

24. Profundidad óptica en el halo de la Vía Láctea

Calcular la profundidad óptica de microlensing para fuentes en la Gran Nube de Magallanes (LMC), suponiendo que toda la materia oscura está en la forma de objetos puntuales que generan microlensing observable con un umbral de magnificación de $\mu_T \simeq 1.34$. Usar que la distancia de la Tierra a LMC es 50 kpc y que su posición en coordenadas galácticas es (ℓ, b)=(-32^o, 281^o).

Consideren dos modelos esféricos para la distribución de masa en el halo de la galaxia:

i) Perfil isotermo y no singular dado por

$$\rho_{isot}(R) = \rho_{\odot} \frac{R_{Sol}^2 + R_C^2}{R_C^2 + R^2} , \tag{11}$$

con $\rho_{\odot} = 0.0097 M_{\odot}\mathrm{pc}^{-3}$, $R_C = 5\mathrm{kpc}$, $R_{Sol} = 8$ kpc (distancia del Sol al centro de la galaxia).

ii) Perfil de Navarro-Frenk-White (NFW), dado por

$$\rho_{NFW}(R) = \frac{\rho_0}{\frac{R}{R_s}\left(1 + \frac{R}{R_s}\right)^2} , \tag{12}$$

con $R_s = 21.5$ kpc y $\rho_0 = 4.88 \times 10^6 M_{\odot}\mathrm{kpc}^3$.

Observación: si así lo desean, la respuesta puede estar sólo en formato de código donde se calcula lo que se pide. En ese caso, pegar el código y el resultado de su ejecución a la respuesta o, alternativamente, poner un link al código.

25. Tasa de eventos y límites a la fracción de materia oscura

Considere el modelo de halo de materia oscura isotermo y no singular del ítem anterior, con los mismos parámetros. Considere que la distribución de velocidades de la materia oscura en la galaxia es dada por una distribución de Maxwell con $v_c = 220$ km/s.

i) Calcule la tasa de eventos para fuentes en la Gran Nube de Magallanes, suponiendo que toda la materia oscura está en la forma de objetos puntuales de masa M. Mostrar la tasa en función del tiempo característico para varios valores de M.

ii) Vamos a considerar una situación observacional en la que se puede aproximar la eficiencia como siendo nula para tiempos característicos menores a un día y mayores que 400 días y que es 100% para eventos entre 1 y 400 días. También vamos a suponer que se siguieron 10^8 estrellas durante 2 años. Bajo esas condiciones, y suponiendo toda la materia oscura está en la forma de objetos puntuales de masa M ¿cuál es el número esperado de eventos en función de M?

iii) Suponiendo que no se observó ningún evento que no esté asociado a alguna lente detectada (por ejemplo una estrella), ¿qué límites esa observación impondría sobre la fracción f de la materia oscura que estaría compuesta de objetos puntuales de masa M? ¿Y si se detectaran 10 o 100 eventos no asociados a una lentes detectada, qué límites eso impondría en f?

Tip: adaptar el notebook que está en
`https://github.com/CosmoObs/FoF_lensing_2022/blob/main/MicroLensing/FoF-Microlensing_%26_Dark_Matter.ipynb`
Si no anda el link, ir al repositorio
`https://github.com/CosmoObs/FoF_lensing_2022` y ahí abrir el fichero `MicroLensing`

26. Extra: tasa de eventos en situaciones más realistas

En la discusión hecha en clase (y en las filminas) supusimos que la eficiencia depende solo del tiempo característico del evento, $\hat{t}$. Parecería más realista pensar que la eficiencia debe depender también de la magnitud de las fuentes m_s ($\varepsilon = \varepsilon(\hat{t}, m_s)$). ¿Cómo quedaría la expresión de $N_{\rm exp}$ si tomamos en cuenta la dependencia de la eficiencia con la magnitud?

tip: en ese caso es importante considerar que el número de fuentes por unidad de área en la región de observación depende de la magnitud de las fuentes, lo que se representa por la función de luminosidad dN_s/dm_s.

En el ejemplo que vimos en clase, como la eficiencia no dependía de la magnitud de la fuente (o, si queremos, suponemos que todas las fuentes poseen una misma magnitud) simplemente se multiplicaba la tasa de eventos total ($\int_0^\infty \mathcal{E}(\hat{t}) \frac{d\Gamma}{d\hat{t}} d\hat{t}$) por el tiempo total de observación y por el número total de estrellas seguidas. Ahora habrá que integrar también dN_s/dm_s.

¿Qué cambiaría en el cálculo de la tasa de eventos si consideramos el efecto de fuente finita? Considerar, por simplicidad, que todas las fuentes tienen una misma dimensión física (por ejemplo, el radio solar).

27. Extra: otras aplicaciones de microlensing y perspectivas a futuro

    Además de los ejemplos y observables que vimos en las clases ¿qué más se podría medir con microlensing?

    ¿Qué otras aplicaciones podría tener?

    ¿Qué tipo de instrumentación nueva podría llevar a nuevas descubiertas o nuevas medidas en el campo?