Lentes gravitacionales
en astrofísica y cosmología

Actividades Prácticas - Día 2

1. Ecuación de la lente y variables adimensionales en el caso de la esfera isotérmica singular (EIS)

   A partir de la expresión

   $$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2}, \tag{1}$$

   obtené la densidad superficial de masa $\Sigma(\xi)$ y el ángulo de desvío $\hat{\alpha}$.

   Para fines de implementación numérica, simplicidad de los cálculos e interpretación, es útil trabajar las ecuaciones de lente en forma adimensional (ver, por ejemplo, en las notas de Meneghetti). Una dimensión característica de los problemas con simetría axial es el radio de Einstein ξ_E. Mostrá que eligiendo $\xi_0 = \xi_E$, la ecuación de la lente queda

   $$\vec{y} = \vec{x} - \hat{\alpha}\frac{D_{LS}D_{OL}}{\xi_0 D_{OS}} = \left(1 - \frac{1}{|x|}\right)\vec{x}.$$

   Esta expresión simple facilita el cálculo del jacobiano de la transformación (que es invariante por la elección de ξ_0) y permite resolver numéricamente la ecuación de la lente.

   Calculá el jacobiano $|d\vec{y}/d\vec{x}|$. Obtené la convergencia κ, la cizalladura γ, la magnificación μ y los auto-valores (magnificación en las direcciones tangencial y radial). Mostrá que no hay curva crítica radial.

2. Esfera Isotérmica Suavizada

   Uno de los aspectos poco realistas de la EIS es la presencia de la singularidad central. Para evitar esta singularidad, se puede modificar el perfil de la EIS introduciendo un "núcleo", de modo que para $\theta \gg \theta_c$ la distribución se asemeje a la EIS, mientras que para $\theta \ll \theta_c$ la densidad tienda a un valor finito. Existen muchas formas empíricas de realizar este cambio. Algunas modifican la forma del potencial de la EIS, mientras que otras modifican su distribución de densidad.

Un ejemplo del primer tipo es usar $\Psi = \sqrt{x^2 + x_c^2}$ (en lugar de $\Psi = |x|$, que es el caso de la EIS).

Obtené la ecuación de la lente en este caso. Mostrá que $\kappa = \frac{x^2+2x_c^2}{2(x^2+x_c^2)^{3/2}}$.

Una posible generalización del perfil de densidad de la EIS está dada por $\rho\,(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G(r^2+r_c^2)}$. Obtené la ecuación de la lente en este caso y mostrá que posee una o tres soluciones.

Tips: Para obtener la ecuación de la lente, primero calculá la densidad de masa proyectada y luego la masa proyectada dentro de un círculo de radio θ para obtener el ángulo de desviación. Usá variables adimensionales tomando como escala angular el radio de Einstein de la EIS con el mismo σ_v ($\theta_{E_{EIS}}$). Es fácil ver que la ecuación de la lente puede escribirse como una ecuación de tercer grado. Sin embargo, para ver bajo qué condiciones aparecen 1, 2 o 3 soluciones, es mejor hacer el cambio de variables $z = x - (2/3)y$, de modo que la ecuación queda en la forma $z^2 - 3pz + 2q = 0$, con p y q definidos convenientemente.

Encontrá el radio de Einstein θ_E, que es una curva crítica tangencial.

Obtené la curva crítica radial θ_R, es decir, los puntos para los cuales $dy/dx = 0$.

Calculá el potencial proyectado correspondiente a esta distribución de masa.

3. Mapeo de lentes con simetría axial

   A partir de la hipótesis de simetría axial, mostrá explícitamente que

$$|d\vec{y}/d\vec{x}| = \mathrm{diag}\left[1 - m(x)/x^2, 1 - d(m(x)/x)/dx)\right], \qquad (2)$$

   donde $m = M/\left(\pi\xi_0^2\Sigma_{\rm crit}\right)$, en que ξ_0 es la escala característica elegida para construir las variables adimesionales $\vec{y}$ y $\vec{x}$.

   Mostrá que $\alpha(x) = x\bar{\kappa}(x)$ y que $\gamma(x) = \bar{\kappa}(x) - \kappa(x)$. Esta última expresión será muy útil en los estúdios del efecto débil de lentes por galaxias y cúmulos de galaxias.

4. Perturbaciones externas

   Calculá la magnificación para la esfera isotérmica suavizada (con potencial $\Psi = \sqrt{x^2 + x_c^2}$) con perturbación de cizalladura externa.

5. Potencial elíptico

   Obtené la distribución de masa superficial para el caso del perfil pseudo-elíptico (o sea, potencial elíptico). La distribución de materia derivada,

¿posee simetría elíptica (o sea, $\kappa(X) = const.$ sobre elipses)? ¿Para bajas excentricidades, la distribución es elíptica? Sugerencia: calculá $\kappa(X)$ y obtené la forma de los contornos de isovalores de $\kappa(X)$. ¿Esa curva depende de X?

Para algún perfil específico (a tu elección), hacé una gráfica de las curvas de isodensidad, para varios valores de la elipticidad e.

Sugerencia: utilizá una generalización elíptica del potencial de la esfera isotérmica no singular dado por

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = \frac{D_{\rm ds}}{D_{\rm s}} 4\pi \frac{\sigma_v^2}{c^2} \left[\theta_{\rm c}^2 + (1-\epsilon)\theta_1^2 + (1+\epsilon)\theta_2^2\right]^{1/2} . \tag{3}$$

6. Generando imágenes con soluciones analíticas

   Suponé que la distribución del brillo superficial de una fuente (o sea, su intensidad lumínica) es dado por un perfil se Sérsic elíptico. Obtené la distribución del brillo superficial de las imágenes usando la ecuación de la lente, para algún modelo de lente que vimos en el curso. Ilustrá el resultado con gráficas, mostrando la intensidad lumínica en función de la posición en el plano de las imágenes.

   Tip: podés utilizar el código `PaintArcs` que genera imágenes siguiendo el método discutido en clase, agregando, además, la pixelización, ruido y el efecto de la PSF. El código, con ejemplos, se puede obtener en: `https://github.com/CosmoObs/FoF_lensing_2022` en el fichero `StrongLensing/PaintArcs 2.0`.

7. Soluciones numéricas para cáusticas y curvas críticas

   Obtené las cáusticas y curvas críticas (o sea, hacé gráficas de esas curvas) para las siguientes clases de modelos: elípticos, pseudo-elíptico y con cizalladura externa. Podés elegir los perfiles radiales y los parámetros de los modelos. Pueden obtener las soluciones buscando las raíces de los auto-valores de la jacobiana de la transformación (en el plano de las fuentes y en el plano de las lentes) o usando algún código numérico público de lentes gravitacionales (como el `gravlens`).

   Tip: pueden modificar los códigos que están en `https://github.com/maxmen/LensingLectures/` en particular los notebooks de
   `http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching_2016.html`:

   `http://pico.oabo.inaf.it/ massimo/teaching/notebooks/Lecture 2018.ipynb` y http://pico.oabo.inaf.it/ massimo/teaching/notebooks/Lecture 2020.ipynb

8. Métodos de inversión

   A partir de una imagen real de un sistema con arcos gravitacionales/anillos de Einstein en la escala galáctica (dónde la lente es una galaxia individual), obtené los parámetros del modelo de lente y la reconstrucción de la intensidad de la fuente. Para eso, utilizar algún código público, como `PyAutoLens, lenstronomy, GLAMER` o `GIGA-Lens`, entre otros.

   Tip: mirar los notebooks que están en `https://github.com/CosmoObs/FoF_lensing_2022` en el fichero `StrongLensing/SL modeling`

9. Retraso temporal gravitacional:

   El paso del tiempo se altera en presencia del campo gravitacional. Como consecuencia, al pasar por el campo gravitacional de la lente, la luz de la fuente tarda más tiempo en llegar al observador, en comparación con lo que tardaría si no hubiera lente[1]. Mostrá que, en la aproximación de campo débil, el desfasaje está dado por

$$\delta t_{grav} = -\frac{2}{c^3}\int_{z_O}^{z_S} \varphi(z)dz := -\frac{2}{c^3}\psi, \tag{4}$$

   donde φ es el campo gravitacional de la lente y ψ es el potencial gravitacional proyectado.

   Sugerencia: escribí el elemento de línea ds^2 en la aproximación de campo débil y utilizá el hecho de que la luz se propaga por geodésicas nulas. Elegí el eje z en la dirección observador-fuente (OS). Calculá el intervalo de tiempo que la luz tarda en propagarse de S a O y compará con el intervalo sin la presencia de la lente. El intervalo teniendo en cuenta φ puede obtenerse de forma aproximada integrando sobre una trayectoria no perturbada, con el mismo parámetro de impacto de la trayectoria real. Este procedimiento es conocido como aproximación de Born y es una excelente aproximación en casos reales.

[1] También hay otro “retraso” (que será discutido en el próximo ejercicio) debido a que la trayectoria de la luz es más larga, debido al desvío. En este ejercicio estamos interesados solo en el atraso gravitacional.

10. Desvío temporal geométrico

    Mostrá que la diferencia de longitud entre la trayectoria no perturbada de la luz y la trayectoria real debida al desvío gravitacional está dada aproximadamente (o sea, para pequeños ángulos) por

    $$\delta L = \frac{D_{OS} D_{OL}}{2 D_{LS}} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 \, . \tag{5}$$

    De este modo, el retraso temporal debido a la diferencia del camino recorrido por la luz está dado por $\delta t_{\rm geom} = \delta L / c$.

    Nota: la expresión (5) puede ser obtenida teniendo en cuenta un fondo de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (secciones espaciales homogéneas e isótropas) y es válida para cualquier curvatura.

11. Principio de Fermat

    En primera aproximación, la diferencia entre el tiempo que la luz tardaría en recorrer el camino no perturbado entre fuente y lente y el tiempo que tarda en presencia de la lente está dado por

    $$\delta t_L = \delta t_{\rm geom} + \delta t_{\rm grav} .$$

    Notá que estos desfasajes temporales son generados en las proximidades de la lente. Sin embargo, para distancias cosmológicas (o altas velocidades relativas), es necesario tener en cuenta también la dilatación temporal de Lorentz. En el caso cosmológico, los intervalos de tiempo en la lente y en el observador están relacionados por $\delta_{t_O} / \delta_{t_L} = a_O / a_L = (1 + z_L)$ (donde a es el factor de escala del Universo). De este modo, el desfasaje temporal total estará dado por[2]

    $$\delta t_L = (1 + z_L) \frac{D_{OS} D_{OL}}{c D_{LS}} \left(\frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \Psi \right) . \tag{6}$$

    Mostrá que la condición $\vec{\nabla}_\theta (\delta t) = 0$ lleva a la ecuación de la lente.

    Pensá en la relación de ese resultado con el princípio de Fermat. La formulación en términos del retraso temporal (o potencial de Fermat) es muy útil para entender muchos resultados de los fenómenos de lentes gravitacionales. Como una aplicación, vean el (brevisimo) artículo de Burke (Astrophysical Journal Letters, vol. **224**, p. 1, 1981).

    Para fuentes con variabilidad, las diferencias temporales (entre diferentes imágenes) son mensurables y pueden aportar informaciones sobre la lente, la geometría del Universo y los parámetros cosmológicos.

[2] Recordando que $\Psi = \frac{2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}} \psi$.

12. (Opcional) Obtené la expresión (6) directamente a partir de la métrica de un universo homogéneo e isótropo con una perturbación escalar.

13. Superficies de desfasaje temporal y multiplicidad de imágenes

    Hacé gráficos de la superficie de desfasaje temporal para modelos con simetría circular y modelos no circularmente simétricos a elección (sugerencia, agregá una "cizalladura externa"). Incluí tanto curvas de nivel de δt (isócronas), como la curva "3D" $\delta t(x_1, x_2)$, como, por ejemplo en Mollerach & Roulet (p. 44). Elegí posiciones de las fuentes de modo a obtener diferentes multiplicidades de imágenes, evidenciando el mínimo, el máximo y el "punto de silla". (ver, por ejemplo, SEF p. 180-181). Además de los gráficos, enviá los códigos utilizados para hacerlos.

    Tip: Adaptá el *notebook* en `http://pico.oabo.inaf.it/~massimo/teaching/notebooks/Lecture 06.ipynb`

14. Obtené una estimación para el desfasaje temporal entre imágenes en una configuración típica de microlensing en la galaxia. Se te ocurre alguna forma/situación en que se podría medir ese desfasaje?

15. Encontrá un artículo reciente sobre la determinación del parámetro de Hubble a través de lentes gravitacionales y discutí los resultados.

16. Cizalladura promedio

    Muestre que

    $$< \gamma_t > (\theta) = \bar{\kappa}(\theta) - < \kappa(\theta) > , \tag{7}$$

    donde $< \gamma_t > (\theta)$ es el promedio a lo largo de un círculo de radio θ de la componente tangencial de la cizalladura, $\bar{\kappa}(\theta)$ es el promedio de la convergencia en un disco de radio θ y $< \kappa(\theta) >$ es el promedio de la convergencia sobre el círculo.

    Muestre que, para la componente cruzada de la Cizalladura (i.e. rotada de 45 grados) tenemos

    $$< \gamma_\times >= 0 \tag{8}$$

    ¿Cómo se puede utilizar el resultado (7) para ajustar modelos de perfiles de densidad de materia a los datos? ¿Cómo se hace para combinar datos de diferentes lentes? ¿Cómo se puede utilizar el resultado (8) para controlar los errores sistemáticos?

17. Ajuste de perfiles promedios de densidad

    ¿Qué elementos se consideran actualmente para realizar un ajuste de perfiles de densidad a la señal de lente débil de un conjunto de lentes (galaxias, grupo, etc.)?

    Realizar en la práctica el ajuste de un modelo a partir de medidas reales de la elipticidad de galaxias de fondo y utilizando un catálogo real de galaxias o agrupaciones de galaxias.

    Tip: Seguir el ejemplo del notebook `fit_redmapper.ipynb` que está en el repositorio `https://github.com/CosmoObs/FoF_lensing_2022` en el fichero `WeakLensing/example_fit/`. Describir lo que hace ese notebook, que datos utilizar, que modelos incluye e interpretar los resultados.