MEFE 2025: Notación de variables aleatorias continuas

Matías Leizerovich *
Cátedra Otero y Garzón
Departamento de Física, FCEyN, UBA

April 14, 2025

1 Notación de variables aleatorias

1.1 Variable aleatoria

Una variable aleatoria está asociada a una función que asigna un número real a cada resultado de un experimento aleatorio. Se denota como X, y puede tomar valores en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. La variable aleatoria puede ser discreta o continua. En este apunte nos enfocaremos en la notación de variables aleatorias continuas.

1.2 Realización de un experimento aleatorio

La realización de un experimento aleatorio es un resultado específico de un experimento aleatorio. Se denota como x, y es un número real que representa el resultado de la variable aleatoria X. La realización de un experimento aleatorio es un valor específico que toma la variable aleatoria. Por ejemplo, si X es la variable aleatoria que representa la altura de una persona, entonces una realización de un experimento aleatorio podría ser $x = 1.75$ metros, que representa la altura de una persona específica. En este caso, X es la variable aleatoria y x es una realización de un experimento aleatorio.

*mleize@df.uba.ar

1.3 Densidad de probabilidad

La densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X se denota como $f_X(x)$, y se define como la función que cumple:

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx \tag{1}$$

donde A es un conjunto medible. En particular, si A es un intervalo $[a, b]$, entonces:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \tag{2}$$

Decimos que X se distribuye con densidad de probabilidad $f_X(x)$ y se nota como: $X \sim f_X(x)$. x es una variable que recorre todos los posibles valores de la variable aleatoria X. Algunos ejemplos de densidades de probabilidad son:

- La distribución normal, que tiene la forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \equiv G(\mu, \sigma) \tag{3}$$

  donde μ es la media y σ^2 es la varianza.

- La distribución uniforme, que tiene la forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \equiv \mathcal{U}([a, b]) \tag{4}$$

1.4 Función de distribución acumulada

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua X se denota como $F_X(x)$, y se define como:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \tag{5}$$

1.5 Esperanza

La esperanza de una variable aleatoria continua X se denota como $E[X]$, y se define como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \tag{6}$$

1.6 Varianza

La varianza de una variable aleatoria continua X se denota como $Var(X)$, y se define como:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \tag{7}$$

donde $E[X^2]$ se define como:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \tag{8}$$

2 Cambio de variables

Sea X una variable aleatoria continua con densidad $f_X(x)$, y sea g una función derivable e invertible. Si $Y = g(X)$ es una variable aleatoria con densidad $f_Y(y)$, esta viene dada por:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \tag{9}$$

Obervacion: En el ejercicio 8 de la guía 3 la función $g = \text{Max/Min}\{...\}$ no es inyectiva, por lo que no se puede aplicar la fórmula anterior. Por esta razón tuvimos que operar con la función de distribución acumulada $F_X(t)$ como hicimos en el pizzarrón.

3 Variables aleatorias IID (Independientes e idénticamente distribuidas)

Dos variables aleatorias X_1 y X_2 son IID si son independientes y tienen la misma distribución.

En la segunda parte de la materia esto es importante porque nos permite hacer inferencias sobre la población a partir de una muestra. Si tenemos una muestra de variables aleatorias IID, podemos usar la información de la muestra para estimar parámetros de la población, como la media y la varianza.