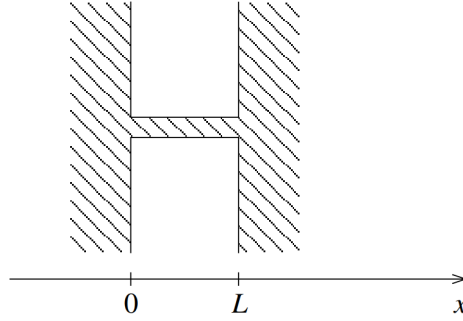


SUPERCONDUCTIVIDAD

GUÍA 6: EFECTO JOSEPHSON, SQUID Y Q-BITS SUPERCONDUCTORES

1. Considere dos superconductores idénticos (L y R) débilmente acoplados por un puente del mismo material de longitud $L \ll \xi$ y sección transversal A . Empleando las ecuaciones de Ginzburg-Landau en ausencia de campo magnético (aproxime $\mathbf{A} \approx 0$), resuelva.



- Asumiendo que los dos superconductores son uniformes, idénticos e independientes, determine la solución del parámetro de orden superconductor en *bulk*. ¿En qué difiere la solución a un lado y al otro del *link*?
- Asumiendo que las dimensiones transversales del puente de acople son despreciables ($w, t \ll \xi$), y que por lo tanto se puede considerar $\psi(\mathbf{r}) \equiv \psi(x)$, plantee la ecuación adimensional de GL que debe satisfacer el parámetro de orden en el enlace.
- Simplifique la ecuación diferencial en el límite $L \ll \xi$ y resuélvala usando las condiciones de contorno obtenidas en el inciso (a).
- A partir de la solución $\psi(x)$, obtenga la corriente superconductora I_s que fluye entre los dos superconductores (efecto Josephson DC). ¿Cómo es consistente la presencia de una corriente no nula con la aproximación $\mathbf{A} \approx 0$?
- Empleando las mismas aproximaciones consideradas en los incisos anteriores, calcule la energía libre del puente superconductor.
- Asumiendo que toda la variación de la energía libre de la juntura está dada únicamente por la supercorriente, es decir, que la potencia eléctrica está dada por

$$P = I_s V = \frac{d}{dt} F,$$

derive la relación entre el voltaje de *bias* V y la diferencia de fase de la juntura (efecto Josephson AC).

2. Considere una juntura Josephson $S_1 - I - S_2$ formada por dos superconductores diferentes, S_1 y S_2 . En el modelo de dos niveles de Feynmann, se describen ambos superconductores mediante los estados Ψ_1 y Ψ_2 , con

$$\langle \Psi_1 | \hat{H} | \Psi_1 \rangle = E_1, \quad \langle \Psi_2 | \hat{H} | \Psi_2 \rangle = E_2,$$

y con un acoplamiento débil a través de la barrera aislante dado por

$$\langle \Psi_1 | \hat{H} | \Psi_2 \rangle = \langle \Psi_2 | \hat{H} | \Psi_1 \rangle = K.$$

Suponga además que puede aproximarse

$$\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle \simeq \langle \Psi_2 | \Psi_2 \rangle \simeq N.$$

- a. ¿Qué ocurre en equilibrio químico con las energías E_1 y E_2 ? ¿Qué se produce en la juntura como consecuencia?
 - b. Derive las ecuaciones de Josephson para este caso.
 - c. ¿Cómo se relaciona la derivada temporal de la fase $\phi = \theta_2 - \theta_1$ con el voltaje total medido a través de la juntura? Distinga entre el voltaje de contacto, el voltaje externo aplicado y el voltaje total medido.
3. Considere una juntura Josephson descrita por el modelo RCSJ, sometida a una corriente continua aplicada I_{dc} .
- a. Escriba la ecuación del circuito en función del voltaje V y luego en función de la diferencia de fase ϕ .
 - b. Escriba el potencial efectivo $U(\phi)$ asociado a la dinámica de la fase, conocido como *washboard potential*, y gráfiquelo cualitativamente para $I_{dc} < I_c$.
 - c. Para $I_{dc} < I_c$, despreciando fluctuaciones térmicas y cuánticas, discuta qué ocurre con ϕ , V y las corrientes que pasan por cada una de las ramas del circuito RCSJ a tiempo infinito.
 - d. Grafique cualitativamente el potencial para $I_{dc} > I_c$. Explique qué ocurre con ϕ , V y las corrientes que pasan por cada una de las ramas del circuito RCSJ a tiempo infinito.
 - e. Luego vuelve a colocar $I_{dc} < I_c$. ¿Qué ocurre con el voltaje en el caso sobreamortiguado? ¿Y en el subamortiguado?
4. Considere los SQUIDS mostrados en las figuras 1(a) y 1(b). Cada SQUID está conformado por un monocristal superconductor convencional (con parámetro superconductor isótropo o s -wave) y uno no convencional con simetría d , es decir que el parámetro de orden superconductor cambia de signo al rotar 90° .
- a. Utilizando la cuantización del fluxoide, obtenga la relación entre las fases γ_1 y γ_2 de ambas junturas y el flujo magnético total Φ que atraviesa el SQUID.

- b. Obtenga la corriente total que atraviesa el SQUID en función del flujo magnético aplicado y grafique cualitativamente la corriente crítica $I_c(\Phi)$ para ambas geometrías.

Compare los resultados con el SQUID convencional:

$$I_c^{\text{conv}}(\Phi) = 2I_c \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right|.$$

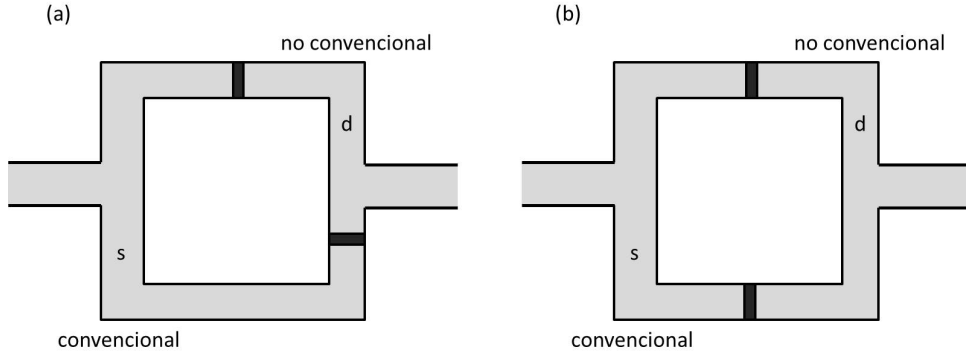


Figura 1: Esquemas de SQUIDS entre un superconductor convencional s -wave y uno no convencional d -wave.

5. (Opcional) Qubits superconductores: Considere una juntura Josephson en el límite lineal de pequeñas oscilaciones alrededor de un mínimo del potencial Josephson.

- Linealice la ecuación RCSJ alrededor del equilibrio.
- Muestre que la dinámica corresponde a un oscilador armónico amortiguado.
- Halle la frecuencia de resonancia ω_p ¿Cómo es el espectro de energía?
- Teniendo en cuenta el potencial Josephson completo, discuta el origen de la anharmonicidad del espectro. ¿Por qué esta anharmonicidad es esencial para la implementación de qubits superconductores?

6. (Opcional) Premio Nobel 2025: Considere una juntura Josephson descrita por el modelo RCSJ, sometida a una corriente continua aplicada $I_{\text{dc}} = I_c - \delta$ con $\delta \ll I_c$.

- Muestre que, en ausencia de fluctuaciones térmicas y cuánticas, la fase queda atrapada en

$$\phi_0 \simeq \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2\delta}{I_c}}.$$

- Expand la ecuación de movimiento para ϕ alrededor de ϕ_0 , y demuestre que la frecuencia de resonancia es

$$\omega_p(\delta) \simeq \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}} \left(\frac{2\delta}{I_c} \right)^{1/4}.$$

- c. Muestre que, bajo esta aproximación, la barrera de potencial es

$$\Delta U = U(\pi/2) - U(\phi_0) \simeq \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\hbar}{e} \frac{\delta^{3/2}}{\sqrt{I_c}}.$$

- d. En el límite de altas temperaturas, las fluctuaciones siguen una distribución de Maxwell-Boltzmann, con lo cual el número de fluctuaciones por unidad de tiempo con energía E o mayor está dada por $\Gamma_t = (\omega_p/2\pi) \exp(-E/k_B T)$. Calcule el tiempo promedio τ que hay que esperar para que el sistema desarrolle un voltaje espontáneo, y grafique $-1/\ln(\omega_p \tau/2\pi)$ en función de T .
- e. En el límite de bajas temperaturas, dominan las fluctuaciones cuánticas. El número de fluctuaciones por unidad de tiempo está dada aproximadamente por $\Gamma_q \sim (\omega_p/2\pi) \exp(-7,2 \Delta U/\hbar\omega_p)$. Corrija el gráfico del inciso anterior de acuerdo con este límite para $T \rightarrow 0$.
- f. Estime por debajo de qué temperatura espera observar los efectos macroscópicos de las fluctuaciones cuánticas en una juntura Josephson con $I_c = 25 \mu\text{A}$, $C = 4 \text{ pF}$, $R = 9 \Omega$, $I_{dc} = 24,8 \mu\text{A}$.