1 El Teorema de Noether

La vez pasada dijimos que al imponer la invariancia de gauge a la teoría de Dirac necesariamente debía aparecer una corriente conservada. Este enunciado constituye el *Teorema de Noether*. Ahora vamos a desarrollar este tema.

La idea básica del teorema es considerar la variación de la acción frente a una transformación infinitesimal que se asume es una invariancia de la teoría (también decimos que es una *simetría* de la teoría. Nosotros vamos a considerar solamente transformaciones *internas*, es decir, transformaciones de los campos, pero no de las coordenadas. las transformaciones correspondientes al grupo de Poincaré también son simetrías, pero *externas*, y la discusión es algo distinta, ver Weinberg [1].

El teorema se basa en calcular la variación de la acción de dos maneras distintas, para después pedir que sean equivalentes. Estamos considerando una transformación en que cada campo de la teoría obedece

$$\phi\left(x\right) \to \phi'\left(x\right) = \phi\left(x\right) + \delta\phi\left(x\right) \tag{1}$$

donde $\delta\phi$ puede depender de un número finito de derivadas. También vamos a asumir que

$$\delta\partial_\mu\phi\left(x\right) = \partial_\mu\delta\phi\left(x\right) \tag{2}$$

La densidad lagrangiana se puede ver como un “campo” más de la teoría, con su propia ley de transformación

$$L \to L' = L + \delta L \tag{3}$$

pero en este caso la integral de la densidad lagrangiana sobre un dominio cuatridimensional debe ser la misma ya sea que usemos L y L', si las condiciones de contorno sobre el borde son las mismas (eso es lo que quiere decir que la transformación es una simetría). Por lo tanto debe ser

$$\delta L = \partial_\mu \delta K^\mu \tag{4}$$

para alguna corriente δK^μ. Por otro lado L es una función conocida de los campos y sus derivadas primeras, por lo cual

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\delta\partial_\mu\phi + \frac{\partial L}{\partial\phi}\delta\phi \\ &= \partial_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\delta\phi\right] + \left[\frac{\partial L}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right]\delta\phi\end{aligned} \tag{5}$$

(si hay varios campos simplemente sumamos sobre todos ellos). El segundo término contiene las ecuaciones de movimiento, por lo tanto *on shell*, es decir, cuando la configuración del campo que estamos transformando es una solución de las ecuaciones de movimiento, se anula. Comparando las dos expresiones que hemos obtenido para δL, concluimos que

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\delta\phi - \delta K^\mu\right] = 0 \tag{6}$$

que es nuestra ley de conservación.

En el caso de la teoría de Dirac, el Lagrangiano es (prescindimos de todas las constantes no esenciales)

$$L = \bar\psi\gamma^\mu\left(i\partial_\mu + A_\mu\right)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{7}$$

En este caso el Lagrangiano mismo es invariante de gauge, de modo que $\delta K^\mu = 0$. Tenemos tres campos, con

$$\begin{aligned}\delta\psi &= -i\theta\psi \\ \delta\bar\psi &= i\theta\bar\psi \\ \delta A_\mu &= -\delta_\mu\theta\end{aligned} \tag{8}$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{\mu}\psi\right)} &= i\bar{\psi}\gamma^{\mu} \\
\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}\right)} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)} &= -F^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9}
$$

de modo que nuestra corriente conservada es

$$
\begin{aligned}
J^{\mu} &= \bar{\psi}\gamma^{\mu}\theta\psi + F^{\mu\nu}\delta_{\nu}\theta \\
&= \theta\left[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - F^{\mu\nu}_{,\nu}\right] + \partial_{\nu}\left[F^{\mu\nu}\theta\right]
\end{aligned} \tag{10}
$$

El último término se conserva trivialmente, por simetría, de modo que podemos descartarlo. Esta corriente se debe conservar cualquiera sea θ. En particular, puede ser $\theta =$ constante, en cuyo caso obtenemos la conservación de

$$
j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - F^{\mu\nu}_{,\nu} \tag{11}
$$

Nuevamente descartamos el término que se conserva trivialmente, y obtenemos nuestro resultado.

2 Teoría de gauge all'uso nostro

En los días iniciales de la física de partículas, una de las primeras observaciones fue la existencia de grupos de partículas con el mismo spin, masas similares y distinta carga, que sin embargo parecían intervenir de una manera similar en reacciones nucleares, con el protón y el neutrón como ejemplo paradigmático. eso llevó a la conjetura de que en un Universo sin electromagnetismo, estas partículas serían sólo diferentes estados de una única partícula, en este caso, el "nucleón" [2].

La formulación de esta hipótesis considera que el campo del nucleón es en realidad un doblete formado por los campos del protón y del neutrón

$$
\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \tag{12}
$$

y que la teoría, en ausencia de electromagnetismo, es invariante frente a rotaciones en el "espacio interno", que es el "plano complejo" definido por ψ_p y ψ_n (never mind que estos son espinores y no números complejos, la invariancia Lorentz no es una consideración importante en lo que sigue). Por suerte sabemos todo acerca de estas rotaciones gracias a la teoría cuántica del momento angular. La simetría que estamos buscando son las transformaciones

$$
\begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi'_p \\ \psi'_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \tag{13}
$$

donde U es una matriz compleja de 2×2, *unitaria*, y de determinante 1 (para que se preserve la normalización de Ψ, ver Landau [2]). Como aprendimos en cuántica, estas transformaciones forman el grupo $SU\left(2\right)$. La matriz U se puede parametrizar con tres parámetros reales, formando un "vector" $\vec{\theta}$ (que de vector sólo tiene la dimensionalidad, éstas son rotaciones en el espacio interno, no en el espacio físico). La forma más general de la matriz U es

$$
U = e^{-ig\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}} \tag{14}
$$

donde las tres matrices τ_A, $A = 1 - 3$, son los "generadores" de $SU\left(2\right)$. sabemos de cuántica que cada τ_A es la mitad de la matriz de Pauli correspondiente, y que los τ_A obedecen las relaciones de conmutación

$$
\left[\tau_A, \tau_B\right] = i\epsilon_{ABC}\tau_C \tag{15}
$$

Es fácil escribir una acción invariante para partículas libres. LLamando $\psi_1 = \psi_p$, $\psi_2 = \psi_n$, hacemos

$$
S = \int d^4x\, \bar{\psi}_a\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\right)\psi_a \tag{16}
$$

Observamos que las matrices τ_A conmutan trivialmente con las matrices de Dirac, ya que actúan sobre índices distintos de los espinores. Lo que no es fácil es escribir interacciones. La opción obvia era introducir las "corrientes"

$$j_A^\mu = \bar{\psi}_a \tau_A^{ab} \gamma^\mu \psi_b \tag{17}$$

y después escribir algo así como

$$S_{int} = \int d^4x \, g^{AB} j_A^{\mu\dagger} j_{\mu B} \tag{18}$$

Esto se podía hacer funcionar a bajas energías pero traía problemas a energías más altas.

Dejemos de lado el problema de las interacciones, y veamos en cambio cuales serían las consecuencias de "gaugear" la simetría $SU(2)$, es decir, dejar que los parámetros θ dependan de la posición. Obviamente la acción no es más invariante, ya que ahora

$$\partial_\mu U\psi = U \left[\partial_\mu \psi - ig \left(\partial_\mu \theta_A\right) \tau_A \psi\right] \tag{19}$$

Queremos reemplazar las derivadas por derivadas covariantes, de tal manera que

$$D_\mu \psi \to D'_\mu U\psi = U D_\mu \psi \tag{20}$$

La derivada covariante se construye introduciendo un campo compensador

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu \tag{21}$$

de modo que

$$\left(\partial_\mu - igW'_\mu\right) U\psi = U \left(\partial_\mu - igW_\mu\right) \psi \tag{22}$$

ahora

$$\left(\partial_\mu - iW'_\mu\right) U\psi = U \left[\partial_\mu - ig \left(\partial_\mu \theta_A\right) \tau_A - igU^\dagger W'_\mu U\right] \psi \tag{23}$$

De manera que necesitamos que

$$W'_\mu = U \left[W_\mu - \left(\partial_\mu \theta_A\right) \tau_A\right] U^\dagger \tag{24}$$

Observamos que W_μ es una matriz hermítica de 3×3 con traza nula, y que no es invariante ni siquiera cuando los θ_A son constantes. Podemos escribir

$$W_\mu = W_\mu^A \tau_A \tag{25}$$

de manera que necesitamos *tres* campos compensadores. Ante una transformación de gauge,

$$W_\mu^{\prime A} \tau_A = U \tau_B U^\dagger \left[W_\mu^B - \partial_\mu \theta_B\right] \tag{26}$$

En el caso particular de una rotación infinitesimal ($\theta_A \ll \pi$) tenemos

$$\begin{aligned} U \tau_B U^\dagger &= \tau_B - ig\theta_C \left[\tau_C, \tau_B\right] \\ &= \tau_B + g\theta_C \epsilon_{CBD} \tau_D \end{aligned} \tag{27}$$

Entonces

$$W_\mu^{\prime A} = W_\mu^A - D_\mu \theta_A \tag{28}$$

donde

$$D_\mu \theta_A = \partial_\mu \theta_A + g \left(\vec{W}_\mu \times \vec{\theta}\right)_A \tag{29}$$

Ahora podemos calcular el conmutador

$$\begin{aligned} \left[D_\mu, D_\nu\right] \psi &= \left(\partial_\mu - igW_\mu\right) \left(\partial_\nu - igW_\nu\right) \psi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= -ig \left[W_{\nu,\mu} - W_{\mu,\nu} - ig \left[W_\mu, W_\nu\right]\right] \psi \end{aligned} \tag{30}$$

Eso sugiere definir el tensor de campo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig\left[W_\mu, W_\nu\right] \tag{31}$$

o bien, $F_{\mu\nu} = F^A_{\mu\nu}\tau_A$,

$$F^A_{\mu\nu} = W^A_{\nu,\mu} - W^A_{\mu,\nu} + g\left(\vec{W}^\mu \times \vec{W}^\nu\right)^A \tag{32}$$

El tensor de campos no es invariante de gauge, y por lo tanto no es un observable. Ante una transformación de gauge,

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger \tag{33}$$

Por lo mismo,

$$S_G = \frac{-1}{2}\int d^4x \text{ tr } F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{-1}{4}\int d^4x\ F^{A\mu\nu}F^A_{\mu\nu} \tag{34}$$

sí es invariante de gauge. Ahora

$$\frac{\delta S_G}{\delta W^A_\mu} = F^{A\nu\mu}_{,\nu} + g\left(\vec{W}_\nu \times \vec{F}^{\nu\mu}\right)^A \equiv D_\nu F^{A\nu\mu} \tag{35}$$

donde hemos introducido una nueva derivada covariante (comparar con (29))

$$D_\rho F^{\mu\nu} = \partial_\rho F^{\mu\nu} - ig\left[W_\rho, F^{\mu\nu}\right] \tag{36}$$

De paso, observamos que

$$D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} = \frac{-ig}{2}\left[F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}\right] = 0 \tag{37}$$

Observamos que las ecuaciones de campo son no-lineales aún en ausencia de materia. Esta es la diferencia principal entre el electromagnetismo y las teorías de gauge no conmutativas.

Las ecuaciones de movimiento para la materia son

$$\begin{aligned} \left[i\gamma^\mu\partial_\mu + g\gamma^\mu W_\mu - mc\right]\psi &= 0 \\ \bar{\psi}\left[-i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu} + g\gamma^\mu W_\mu - mc\right] &= 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Podemos escribir las ecuaciones para los campos de gauge de dos maneras

$$D_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu \tag{39}$$

donde $j^\mu = j^\mu_A \tau^A$

$$j^\mu_A = -\frac{\delta S_M}{\delta W^A_\mu} = -g\bar{\psi}\tau_A\gamma^\mu\psi \tag{40}$$

o

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu \tag{41}$$

donde J^μ es la corriente "total"

$$J^\mu = j^\mu - ig\left[W_\nu, F^{\mu\nu}\right] \tag{42}$$

Por lo tanto, obtenemos la ley de conservación habitual

$$J^\mu_{,\mu} = 0 \tag{43}$$

y la ley de conservación covariante

$$D_\mu j^\mu = 0 \tag{44}$$

Estas ecuaciones pueden deducirse directamente de las ecuaciones de movimiento.

El haber gaugeado la simetría $SU(2)$ automáticamente introduce una interacción entre los espinores, donde la interacción local entre dos corrientes se reemplaza por el intercambio de un campo de gauge. Si los campos de gauge se portaran como campos escalares, eso daría a bajas energías una interacción local, con una constante de acoplamiento g^2/m^2, donde m sería la masa de los campos, mientras que a altas energías la interacción se vería suprimida por un factor g^2/q^2, con q el momento transferido. Esto funciona mucho mejor fenomenológicamente, y fue el gran argumento de venta de las teorías de gauge.

El problema es que los campos de gauge son necesariamente no masivos, porque un término de masa del tipo $m^2 W^{A\mu} W^A_\mu$ no es invariante de gauge. El tema de cómo darle una masa a los campos de gauge se asocia con la idea de *rompimiento espontáneo de simetría*, al que volveremos en un par de clases.

References

[1] S. Weinberg, *The quantum theory of fields*, Vol. I, Cambridge, 1995.

[2] V. Berestetski, E. Lifshitz y L. Pitayevski, *Theorie Quantique Relativiste*, parte 2, Mir, 1972.